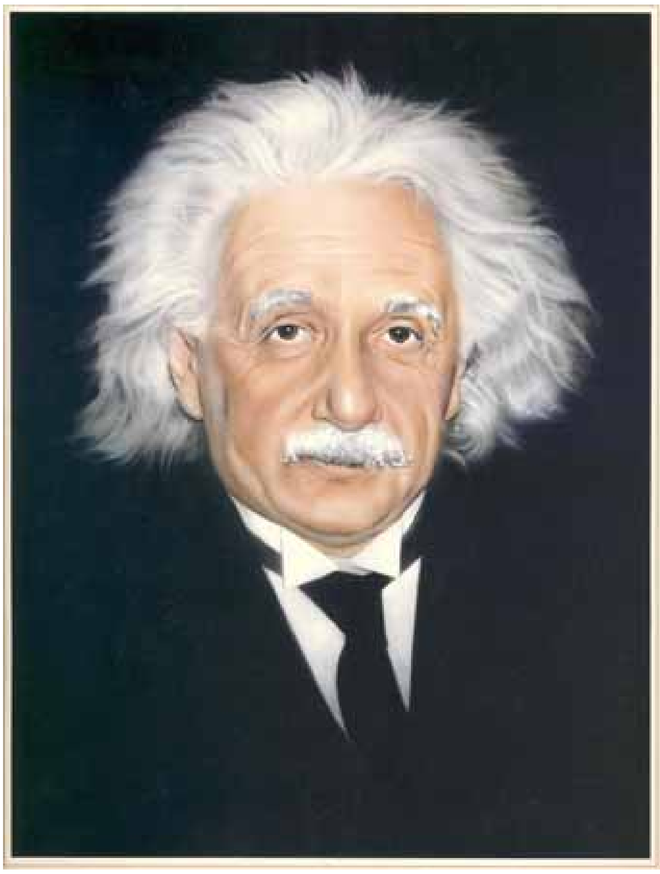
Relativiteit



VWO 6

RELATIVITEIT

Deze module is gebaseerd op het boek 'De sublieme eenvoud van relativiteit' van professor Sander Bais van het Instituut voor Theoretische Fysica van de Universiteit van Amsterdam.
Hierbij dankt Bart Rijkenberg, van het Barlaeus Gymnasium te Amsterdam, Sander Bais voor het veelvuldige en stimulerende overleg dat in hoge mate bepalend is geweest voor deze module.

Colofon

Project	Nieuwe Natuurkunde
Auteurs	Sander Bais, Bart Rijkenberg
M.m.v.	Rob Ouwerkerk (tekentool en clips), Onne Slooten, Loran de Vries
Vormgeving	Loran de Vries
Redactie	Harrie Eijkelhof, Koos Kortland, Guus Mulder, Maarten Pieters, Chris van Weert, Fleur Zeldenrust
Versie	6-8-2010

INHOUDSOPGAVE

Leeswijzer

Het is mogelijk om, zonder de lijn van het verhaal te verliezen, hoofdstuk 5 en de appendix over te slaan. Zij kunnen als extra leerstof beschouwd worden.
Waar mogelijk is er voor gekozen om aan de hand van diagrammen afleidingen van formules te geven. Het is aan de lezer in hoeverre hij of zij hieraan aandacht wil besteden: de lijn van het verhaal blijft te volgen, ook als geen inzicht wordt verkregen in de manier waarop de formules afgeleid worden.
Het verdient sterke aanbeveling bij het lezen ruitjespapier, liniaal en potlood bij de hand te hebben. Zo kunnen vragen die opkomen via de diagrammethode aangepakt worden. Voor wie dit graag op een computer uitvoert: er bestaat een tekentool, ontwikkeld door Rob Ouwerkerk van het Stedelijk Gymnasium Haarlem waarmee dit eenvoudig uitvoerbaar is. Ook kunnen daarmee nette prints worden gemaakt.
Tevens zijn clips ontwikkeld waar met enige regelmaat verwezen wordt. De manier waarop relativistisch snelheden opgeteld moeten worden wordt met behulp van clips 8 en 9 verduidelijkt.
Er zijn op uiteenlopende plaatsen teksten te lezen die tussen gele lijnen geplaatst zijn. Zij verwijzen naar aanvullend leesmateriaal of naar simulaties op het internet. Teksten tussen groene lijnen vormen aanvullende leesstof op zich.

In de tekst zijn tekstvragen opgenomen; de bedoeling is dat deze beantwoord kunnen worden direct na lezing of behandeling van de daaraan voorafgaande teksten. Aan het eind van elk hoofdstuk zijn de antwoorden op deze tekstvragen te vinden.
Vraagstukken zijn steeds aan het eind van elk hoofdstuk opgenomen; hiervan zijn geen uitwerkingen in dit boekje aanwezig.

Lessentabel

Les	Onderwerpen	Vraagstukken en clips
1	hoofdstuk 1: ruimtetijd, gebeurtenissen, schaal, wereldlijnen, de postulaten	1, 2, 3, 7, 9, 11, 15, 16, 17
2	reflectie les 1; hoofdstuk 2: toelichting werking clips, relativiteit van gelijktijdigheid, synchronisatie van klokken	19, 21, 22, 23, 25 clip 1
3	reflectie les 2; hoofdstuk 2 - vervolg: synchronisatie van klokken in bewegende stelsels aan de hand van clip 2, gelijktijdigheid is relatief	27, 28, 29, 31, 32 clips 2 t/m 5
4	ruimte voor het bespreken van (eventueel extra) vraagstukken	
5	hoofdstuk 3: causaliteit - is er een probleem mee? snelheden optellen volgens Newton, snelheden optellen volgens Einstein aan de hand van clip 8	35, 37, 38 clips 6 t/m 8
6	hoofdstuk 3 - vervolg; reflectie les 4 en optelformule van snelheden - afleiding aan de hand van clip 9; optelformule van snelheden - rekenen	39, 41, 42
7	hoofdstuk 3 - slot; causaliteit - er is geen probleem mee, tijdrek	44, 47, 48, 50, 51, 52 clip 10
8	toets H 1 t/m 3	
9	bespreking toets; rekenen aan tijdrek; de symmetrie van tijdrek	47, 48, 49 clips 11 en 12
10	hoofdstuk 4, tweelingparadox	50, 51, 52 clips 13 t/m 14
11	reflectie les 10; hoofdstuk 4 – restant	53, 55, 56, 57
12	hoofdstuk 6: $E=mc^2$; CERN met het Atlasexperiment	73, 74, 75, 76
13	reflectie hoofdstuk 6; het Iterproject	
14	ruimte voor diagnostische toets; vragenuur	
15	toets gehele module	

Inleiding

In deze module houden wij ons bezig met de relativiteitstheorie van Albert Einstein, die hij opzette in 1905. Omdat hij later de theorie heeft uitgebreid wordt deze eerste theorie de *speciale relativiteitstheorie* genoemd; de uitgebreide theorie is de algemene relativiteitstheorie. De speciale theorie wordt in deze module behandeld. De speciale theorie gaat over inertiële waarnemers – dat zijn waarnemers die een constante snelheid ten opzichte van elkaar hebben. Einsteins uitbreiding naar de algemene theorie omvatte ook waarnemers die ten opzichte van elkaar versnellen.

Het jaar 1905 wordt wel een *Wunderjahr* genoemd. Einstein leverde in dat jaar drie geweldige bijdragen aan de natuurkunde. Behalve de relativiteitstheorie verklaarde hij het foto-elektrisch effect. Een moderne toepassing daarvan vind je in een digitale fotocamera: op een sensor vallend licht maakt lading vrij. De hoeveelheid vrijgemaakte lading wordt per punt ("pixel") gemeten en als getal opgeslagen op een geheugenkaartje. Teruglezing van die getallen stelt een computer later in staat het beeld te reconstrueren. Einstein verklaarde dit foto-elektrisch effect door aan te nemen dat licht uit deeltjes, fotonen, bestaat. Voor deze prestatie kreeg hij later de Nobelprijs. Ook in 1905 bewees hij, via berekeningen, dat materie écht uit kleine deeltjes bestaat. In de decennia voor 1905 was een deel van de natuurkundigen gaan twijfelen aan de realiteit van het bestaan van atomen. Door te rekenen aan de Brownse beweging, de willekeurige beweging die heel lichte deeltjes in een gas of vloeistof maken ten gevolge van de toevallige botsingen van de deeltjes van dat gas of die vloeistof (atomen), werd definitief bewezen dat de duizenden jaren oude aanname dat materie uit kleine deeltjes bestaat juist was.

De speciale relativiteitstheorie gaat over waarnemingen. Een aantal van die waarnemingen kunnen alleen maar in gedachte gedaan worden. Het gaat over treinreizigers die in treinen rijden met een snelheid van 100.000 km/s en soms ook nog eens met die snelheid door de trein rennen. We zullen zien dat die waarnemers zaken waarnemen waarvan je misschien nu nog zegt dat ze onmogelijk zijn – de tijd die voor de één langzamer loopt dan voor de ander bijvoorbeeld.

Mocht je denken dat reizigers die zich voortspoeden met 100.000 km/s niet bestaan, dan zie je de hele bevolking van de aarde over het hoofd. De aarde beweegt met dat soort enorme snelheden ten opzichte van verre sterren. Ook spelen deze snelheden een grote rol bij deeltjesversnellers – van tv's tot het CERN. In de echte waarnemingen die daar gedaan worden blijken alle voorspelde effecten van de relativiteitstheorie ook daadwerkelijk op te treden.

Door ervaringen uit het dagelijks leven en door wat je eerder leerde bij het vak natuurkunde heb je een intuïtie opgebouwd die je vertelt hoe de wereld in elkaar zit en wat je kunt verwachten over de uitkomst van experimenten. Die intuïtie vertelt je beslist niet dat een klok in de trein langzamer loopt voor een waarnemer op het perron dan voor de reiziger. En zeker niet dat de klok op het perron voor de reiziger langzamer loopt dan voor de man op het perron! Dit is geen ervaringsfeit uit het dagelijks leven: of je op het perron staat of in de trein zit, klokken blijven hetzelfde lopen, vinden we. Of ze dat echt doen, zou je door een meting moeten vaststellen – maar dan heb je wel klokken nodig die de tijd nauwkeuriger dan in secondes of zelfs milliseconden kunnen meten!

In de relativiteitstheorie komen we voortdurend de *lichtsnelheid* tegen. Met zijn reusachtige waarde van, afgerond, 300.000 km/s speelt die een centrale rol in de theorie. En 300.000 km/s is ook de snelheid van radargolven, het gps-signaal en nog veel meer. We zullen telkens zien dat de verrassende effecten alleen maar merkbaar zijn bij reizen met deze hele grote snelheden. Bij snelheden uit het dagelijks leven gaat de nieuwe theorie, inmiddels meer dan 100 jaar oud!, asymptotisch over in de bekende natuurkunde van alledag. Een hele geruststelling! We leren die natuurkunde dus niet voor niets!

Toch heeft relativiteitstheorie ook een direct belang voor ons bestaan. Het meest bekende resultaat van de theorie is zonder twijfel $E = mc^2$. Aan het eind van de module besteden we aan deze beroemde formule ruime aandacht. Ook kijken we naar een directe consequentie van de formule: energiewinning uit massaomzetting - hopelijk een bijdrage aan de oplossing van het huidige energieprobleem.

De relativiteitstheorie is geen theorie die je met je klompen kunt aanvoelen. Het gevoel in je klompen- dat is nu juist je intuïtie. We zullen daarom de theorie stap voor stap opzetten, waarbij het volgende steeds logisch volgt op het voorgaande.

We gaan beginnen met de relativiteitstheorie.

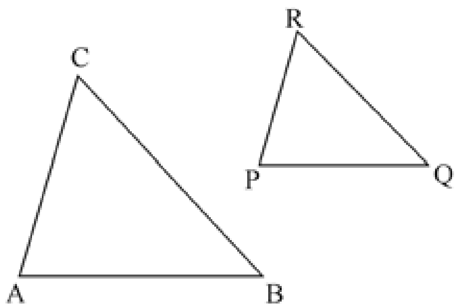
Veel plezier!

Einsteins levensloop tot en met het 'wonderjaar' 1905

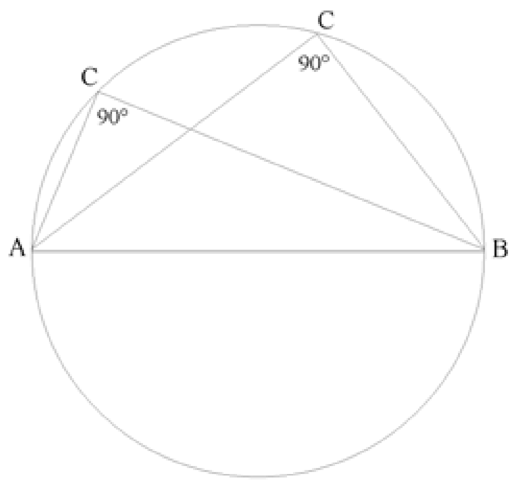
1879	Wordt geboren in Ulm, Duitsland.
1888	Gaat naar het Luitpold-Gymnasium in München.
1895	Verlaat het gymnasium zonder eindexamen te doen.
1896	Doet eindexamen aan de Kantonale Schule in Aarau, Zwitserland. Gaat studeren aan de Eidgenössische Technische Hochschule in Zurich.
1900	Haalt leraarsdiploma aan de ETH, maar kan geen baan vinden.
1902	Krijgt een baan als technisch assistent bij het patentbureau in Bern.
1903	Trouwt met Mileva Marić.
1905	17 maart: artikel over bet bestaan van lichtquanta. Met lichtquanta (fotonen) verklaarde hij het (foto-elektrisch) effect waarbij licht in staat is elektrische lading uit materialen vrij te maken. Toepassingen vind je terug in lichtgevoelige materialen als de sensor van bijvoorbeeld een digitale camera. 11 mei: artikel over de Brownse beweging; Hij bewees met zijn verklaring van het door Brown gevonden effect- lichte deeltjes in een vloeistof of gas voeren chaotische bewegingen uit - dat atomen wérkelijk bestaan en niet slechts een verzonnen hulpmiddel waren dat handig was bij het beschrijven van talloze verschijnselen in de natuurkunde en de scheikunde. 30 juni: artikel over de speciale relativiteitstheorie - het onderwerp van dit boekje. 27 september: tweede artikel over speciale relativiteitstheorie, met $E = mc^2$. 19 december: tweede artikel over Brownse beweging.

Voorkennis

- Plaats-tijddiagram – gegevens aflezen en tekenen in een grafiek die betrekking hebben op de plaats en de snelheid van een lichaam
- Eenparige beweging - $x = v \cdot t$
- Spiegelwet – hoek van inval = hoek van terugkaatsing
- Relativiteit van beweging – als A als stilstaand wordt opgevat en B beweegt ten opzichte van A, kun je ook B als stilstaand opvatten en zeggen dat A (de andere kant op) ten opzichte van B beweegt.
- Relatieve snelheid – de snelheid van een lichaam ten opzichte van een waarnemer die als stilstaand wordt opgevat
- Kooi van Faraday als veldvrije ruimte – in een ruimte die voldoende afgesloten is door een metalen omhulsel (of gaas) kan geen elektrisch veld van buiten naar binnen dringen
- Gelijkvormigheid van driehoeken – driehoeken hebben dezelfde vorm als hun drie hoeken gelijk zijn: hoek ABC = hoek PQR, enz.
- Verhoudingen in gelijkvormige driehoeken – de verhouding tussen overeenkomstige zijden is steeds even groot: AB:PQ = AC:PR = BC:QR, maar ook: AB:BC = PQ:QR, enz.



- Stelling van Thales – Als de basis van een driehoek, AB, de middellijn van een cirkel is en de top C van de driehoek ligt op de cirkel, dan is de tophoek altijd 90°.



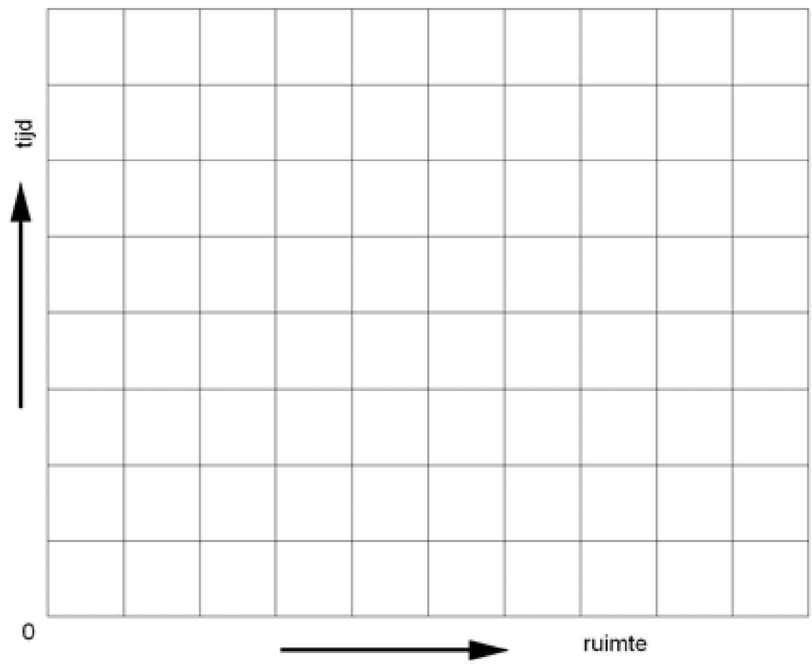
1 Uitgangspunten

Het is een wonder dat nieuwsgierigheid de schoolbanken overleeft.

Waarover gaat de relativiteitstheorie?

1.1 Ruimte + tijd = ruimtetijd

Ruimte en tijd zijn met ons. Ze vormen de arena waarbinnen onze levens zich afspelen. We kunnen ruimte en tijd niet aanraken, maar worden ze gewaar via de waarneming van gebeurtenissen. Ons ruimtelijk bewustzijn ontstaat doordat we voorwerpen op verschillende afstanden kunnen onderscheiden, en ons benul van tijd ontlenen we aan de gewaarwording van verandering. En omdat planeten, tennisballen en honden vloeiende bewegingen uitvoeren, concluderen we dat ruimte en tijd *continu* zijn. De wereld ziet er niet uit als een duistere disco met stroboscopische belichting.
Er zijn echter belangrijke verschillen tussen tijd en ruimte. Zo kunnen we niet teruggaan in de tijd om het verleden te veranderen, en tot de toekomst hebben we al helemaal geen toegang: ons handelen is beperkt tot het tere grensvlak tussen die twee, het heden. Ook in de ruimte kunnen we maar op één plek tegelijk zijn (al proberen we dat veto vaak te trotseren), maar we kunnen ons wel van de ene naar de andere plek verplaatsen.
Tijd meten we met een klok en ruimtelijke afstanden met een meetlat, twee heel verschillende instrumenten. Toch kunnen we beide begrippen samen weergeven in één eenvoudig diagram met ruimte- en tijdcoördinaten zoals afgebeeld in figuur 1.1. In vakjargon wordt dit een **ruimtetijddiagram** of Minkowskidiagram genoemd. Het is een soort conceptuele kaart, niet van de wereld maar van wat zich afspeelt in de wereld, ofwel van de ruimtetijd.
In dit hoofdstuk gaat het over de betekenis van deze ruimtetijddiagrammen die we voortdurend zullen gebruiken bij onze uitleg van de relativiteitstheorie van Einstein. Die theorie bracht een revolutie teweeg in onze kijk op de ruimtetijd.



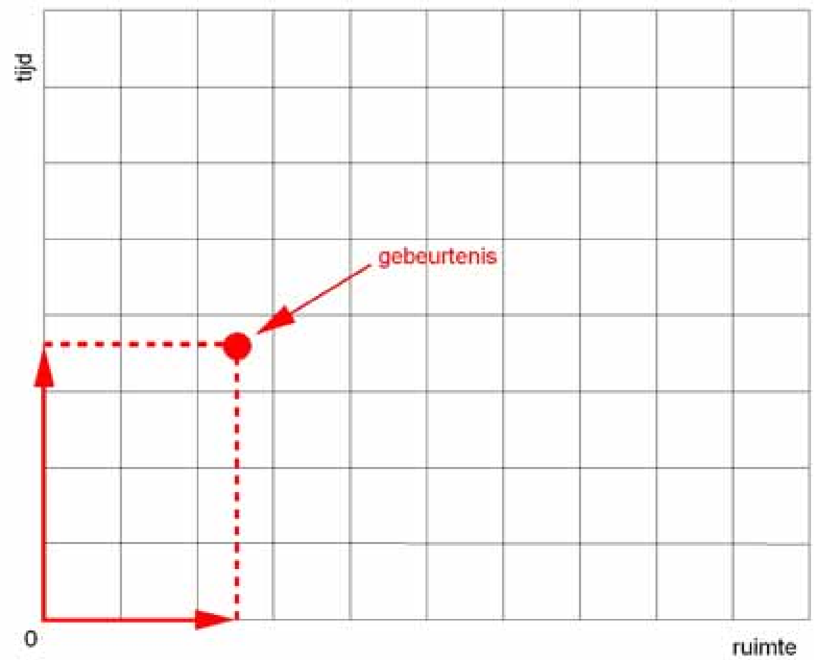
Figuur 1.1 Ruimtetijddiagram

1.2 Gebeurtenissen

Figuur 1.2 toont maar een klein stukje van de ruimtetijd; je moet je voorstellen dat die zich verder uitstrekt in het ‘vlak’ van de pagina. We hebben ervoor gekozen om de tijd langs de verticale as weer te geven en de ruimte langs de horizontale as. Daarmee zijn de drie ruimtelijke dimensies, hoogte, breedte en diepte, teruggebracht tot één as, zodat we het slechts kunnen hebben over beweging vooruit en achteruit in één ruimtelijke richting. Niet voor niets zullen we het vaak over treinen hebben. Gelukkig zal onze uitleg van de speciale relativiteitstheorie niet te lijden hebben onder deze ingrijpende amputatie van de ruimte.

Je kunt je afvragen waar zo’n ruimtetijddiagram goed voor is. Wat stellen punten, lijnen en gebieden op deze kaart voor? We beginnen heel eenvoudig met een punt. Welke betekenis heeft een punt? Het markeert een bepaalde plek op een bepaald tijdstip, kortom, het correspondeert met een **gebeurtenis**. Je klapt precies hier en precies nu in je handen. Je laat iets vallen, lost een schot of botst tegen iemand op. In onze wereld doen zich voortdurend gebeurtenissen voor, die overeenkomen met punten in ons ruimtetijddiagram. En het geheel van de ruimtetijd is de verzameling van alle mogelijke gebeurtenissen.

Meestal nemen we gebeurtenissen waar als reeksen: we zien een bewegende tennisbal niet als een serie losse gebeurtenissen in de tijd, maar als een continue opeenvolging van gebeurtenissen die we beweging noemen. Dingen die bewegen, leggen een pad af in het diagram dat correspondeert met een of andere kromme. Niks bijzonders: soortgelijke krommen worden ook gebruikt om de winstontwikkeling van een bedrijf weer te geven (met winsten en verliezen in miljoenen dollars langs de positieve en negatieve verticale as en de tijd langs de horizontale as) of de bevolkingsgroei van een land (met het aantal inwoners langs de verticale as). Maar voordat we het over deze krommen gaan hebben, moet eerst iets gezegd worden over de keuze van geschikte eenheden.

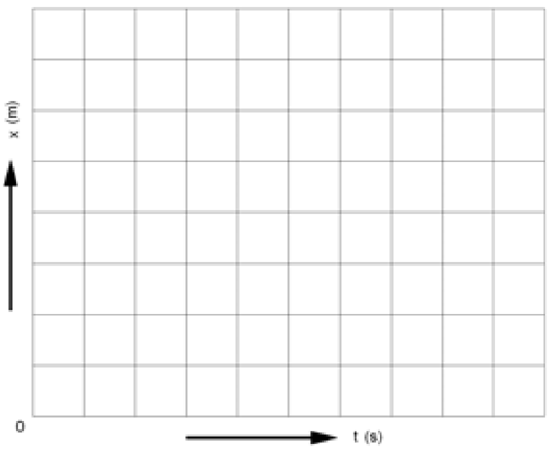


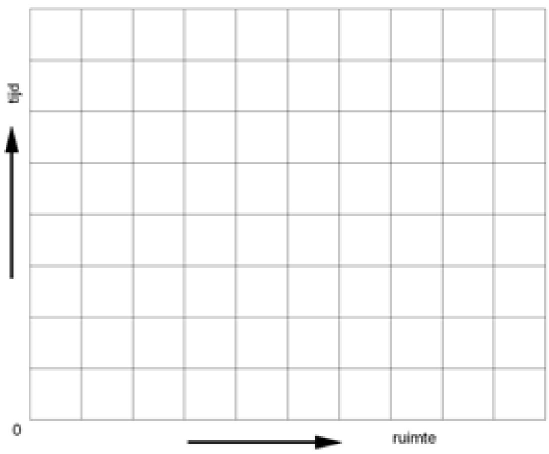
Figuur 1.2 Eén gebeurtenis in een ruimtetijddiagram

T.1 Diagrammen vergelijken

a. Schets de grafieken voor de onderstaande situaties in een *x(t)*-diagram (dus met de tijd op de horizontale as)
b. Schets de grafieken van de onderstaande situaties in een ruimtetijddiagram (met de tijd op de verticale as)

1. Een fietser met een constante snelheid.
2. Een optrekkende raceauto.
3. Een stuiterende bal.

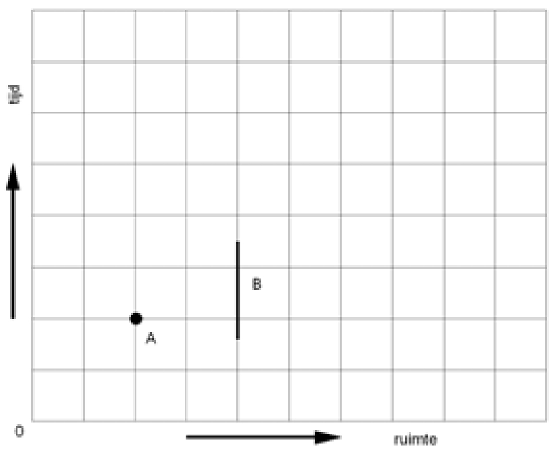




Figuur 1.3 Plaats-tijd-diagram (links) en een ruimtetijddiagram (rechts)

T.2 Een gebeurtenis

a. Wat kun je in het ruimtetijddiagram van figuur 1.4 aanduiden als een gebeurtenis, A of B?
b. Kun je ook een betekenis toekennen aan het andere object?



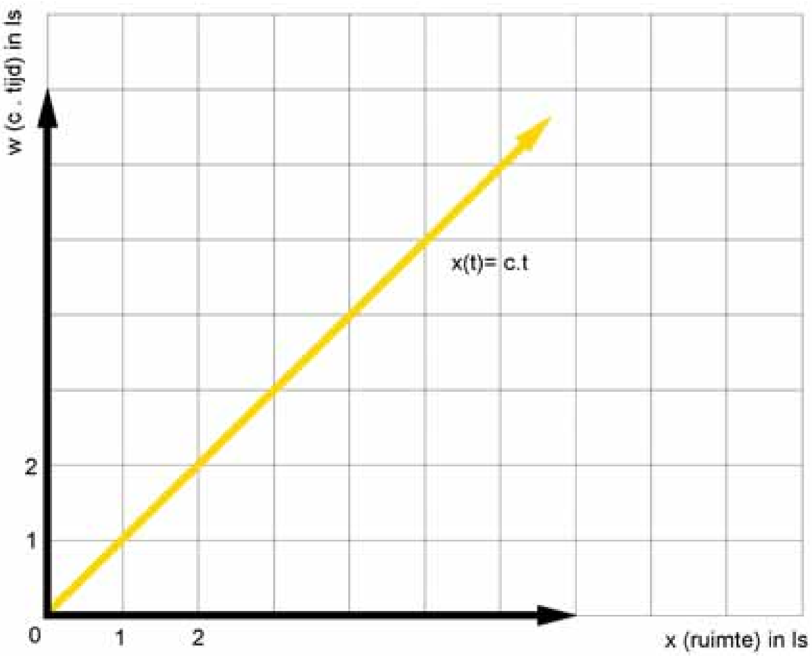
Figuur 1.4 Een gebeurtenis en een …?

1.3 De schaal der veranderingen

In het ruimtetijddiagram hebben we een raster getekend van horizontale en verticale lijnen. Bij elk van de assen van het stelsel hoort een schaal: een doorsnee stadskaart heeft vakjes van een halve kilometer in beide richtingen, maar op een kaart van Europa zal de eenheid eerder 100 km zijn. Wij moeten de schaal voor de ruimte- en tijdassen dus zo kiezen dat de dingen die ons interesseren duidelijk te onderscheiden zijn. Bij de verschijnselen waar wij ons op gaan richten is vooral de verhouding tussen de eenheden langs beide assen van belang: de afstand per tijd, zeg kilometer per uur, maar dat is per definitie het begrip snelheid. We kiezen de verhouding tussen de eenheden langs de ruimte- en de tijdas dus met het oog op de snelheden die ertoe doen in de speciale relativiteitstheorie. We zullen zien dat dat geen alledaagse snelheden zijn van meters per seconde of kilometers per uur, niet de snelheid van een wandelaar, een vliegtuig of zelfs het geluid, maar een zeer uitzonderlijke snelheid, te weten de **lichtsnelheid**, die wordt aangeduid met de letter *c* (van celeritas, Latijn voor snelheid)

Wat is er zo bijzonder aan de lichtsnelheid? Oorspronkelijk had niemand door dat er iets bijzonders mee aan de hand was. Maar toen verscheen Einstein ten tonele, die inzag dat de lichtsnelheid (in vacuüm) universeel is - een universele natuurconstante (zie paragraaf 1.6). Tot die tijd was het gewoon een eindige snelheid als alle andere. Rond 1850 bepaalde de Franse natuurkundige Fizeau de grootte ervan in een eenvoudig maar slim opgezet experiment. Hij vond een snelheid die dicht tegen de 300.000 kilometer per seconde aan lag. Sinds 21 oktober 1983 is *c* zelfs precies 299.792.458 meter per seconde - omdat de meter sindsdien gedefinieerd is aan de hand van *c*. Het is een enorm getal, wat verklaart dat wij de lichtsnelheid als oneindig ervaren: als we het licht aandoen lijkt dat ogenblikkelijk de hele kamer te vullen. Toch is dat een illusie: het licht moet van de gloeilamp naar de muren reizen, wat gewoon tijd kost, ook al is het niet meer dan een miljoenste van een seconde. Ook al lijkt de lichtsnelheid oneindig, ze is het niet.

We zullen ons dus bezig houden met heel snelle bewegingen – vaak in de buurt van de lichtsnelheid. We zetten zulke bewegingen uit in een plaats-tijddiagram. (Het is in de relativiteitstheorie gebruik om de tijd verticaal uit te zetten. Dit heeft geen diepere betekenis en is terug te voeren op traditie.) Om de schaal op de assen van het plaats-tijddiagram te bepalen, gaan we uit van de seconde als de eenheid van tijd. Een asindeling die we in de natuurkunde gebruiken voor fietsers, auto´s en dergelijke is hier niet handig: als de tijd 1 hokje (1 seconde) verstrijkt, zou het licht 300.000 hokjes (met elk hokje 1 km) doorlopen.



Figuur 1.5 Bewegen met de lichtsnelheid

Om dit op te lossen voeren we een nieuwe eenheid in: de **lichtseconde** (ls) die gelijk is aan de afstand die het licht in één seconde in vacuüm aflegt, dus 300.000 km. Deze afstand gebruiken we als schaal langs de tijd-as, d.w.z. we vermenigvuldigen de tijd met de lichtsnelheid en definiëren van nu af aan

$$w = c \cdot t$$

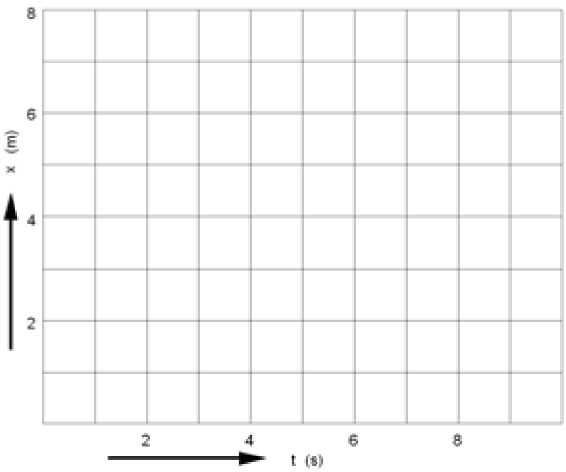
als de coördinaat in de tijdrichting. Hierdoor is verticaal elk hokje 300.000 km groot! En ook in de ruimterichting kiezen we hokjes met lengte 300.000 km. We nemen dus de lichtseconde als eenheid langs zowel de tijd- als de ruimte-as.

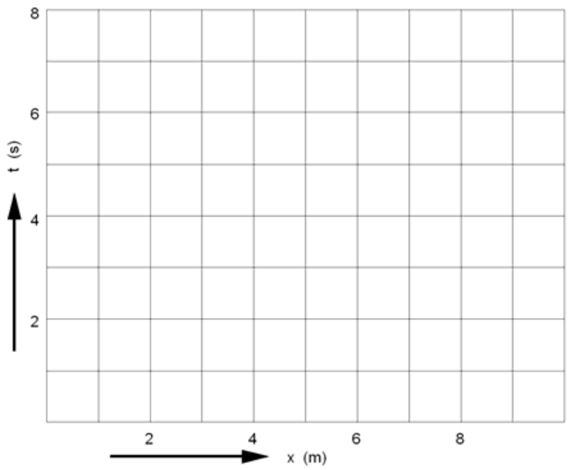
Als we nu een korte lichtflits (of nog liever: een foton, een quantum van licht) uitzenden in de ruimterichting, legt die in ons ruimte-tijd diagram een pad af dat overeenkomt met de gele pijl in figuur 1.5 . We kunnen die lijn beschrijven met de formule $x(t)= c \cdot t=w$. Als t bijvoorbeeld 1 seconde is, dan zijn zowel x als w gelijk aan c kilometer, zijnde 1 ls; als t 4,5 seconde is, is $x=w$ dus 4,5 maal c kilometer, enzovoort. Het pad van het foton maakt dus een hoek van 45^o met de w-as. Merk ook op dat een voorwerp dat zich met constante snelheid voortbeweegt, correspondeert met een rechte lijn in het diagram, omdat het in tweemaal zoveel tijd altijd precies een tweemaal zo grote afstand zal afleggen.

T.3 Diagrammen vergelijken II

Schets de grafieken van de onderstaande situaties in een *x(t)*-diagram (links in figuur 1.6), een *t(x)*-diagram (figuur 1.6 rechts) en een ruimtetijddiagram (figuur 1.6b).

a. Een trein die zich voortbeweegt met de helft van de lichtsnelheid ($v= ½ \cdot c$)
b. Een foton dat zich voortbeweegt met de lichtsnelheid (c).



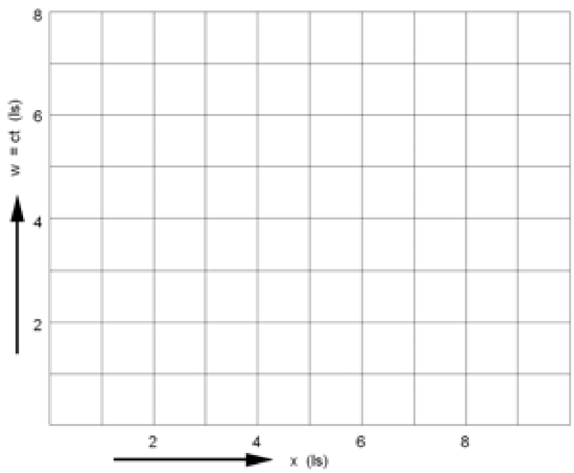


Figuur 1.6 Een plaats-tijd-diagram (links), een tijd-plaats-diagram (rechts).

T.4 Lichtsignalen

Schets in een ruimtetijddiagram (figuur 1.6b):

a. Een lichtsignaal dat precies een seconde duurt
b. Een foton dat in de negatieve ruimterichting beweegt.

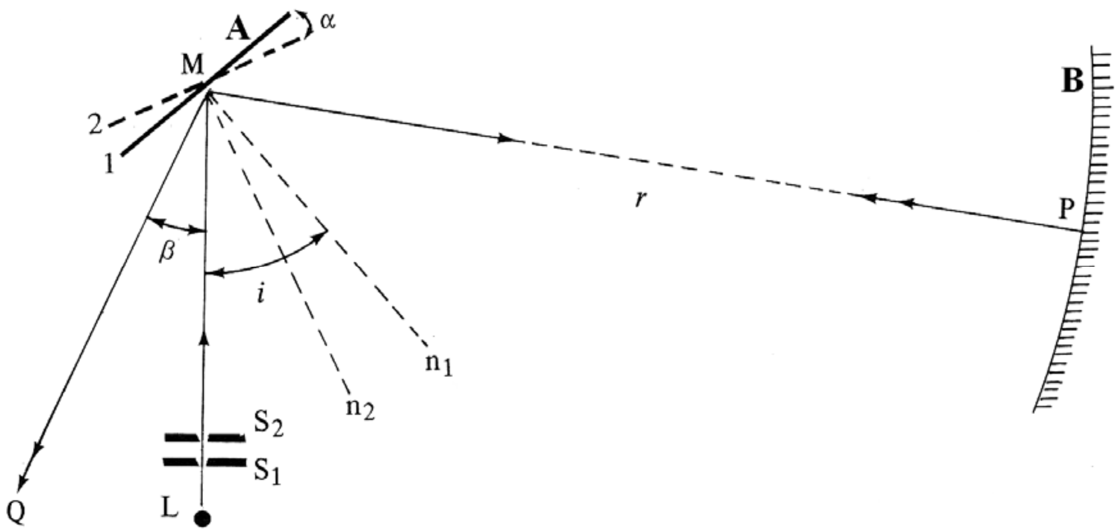


Figuur 1.6b een ruimtetijddiagram.

1.4 Meting van de lichtsnelheid

Foucault’s experiment voor het meten van de lichtsnelheid

Een methode om de snelheid van het licht te meten is in 1850 bedacht door Foucault. Bij deze methode valt een lichtstraal vanuit L op een heel snel draaiend spiegeltje A, in punt M. M is het punt waaromheen A draait. De weerkaatste straal raakt een tweede spiegel B in punt P. Vanuit B wordt die de straal weer precies naar het M teruggekaatst. Dit lukt als B een cirkelvormige holle spiegel is waarbij M samenvalt met het middelpunt van de cirkel waarvan B een deel is. A staat in een iets andere stand dan toen de lichtstraal er de eerste keer op viel, waardoor het licht richting Q wordt weerkaatst. De richtingsverandering bewijst dat het licht tijd nodig heeft om de afstand van M naar P en terug te overbruggen. Meting van de afstand MP, de draaisnelheid van het spiegeltje en de richtingsverandering van de lichtstraal stelde Foucault in staat om de lichtsnelheid vast te stellen.



Figuur 1.7 Het licht valt op punt M, terwijl het spiegeltje in stand 1 staat. Dan legt het de afstand MP en terug af. Intussen is het spiegeltje over een hoek α gedraaid, waardoor het licht vanaf M in de richting van Q wordt teruggekaatst. De hoek β is dan 2 α omdat de normaal met het spiegeltje mee over een hoek α draait.

Bron Middelink – Systematische Natuurkunde deel B.

Het experiment van Michelson en Morley

In 1887 deden Michelson en Morley een experiment om na te gaan of de lichtsnelheid misschien afhing van de richting waarin licht loopt. Gaat licht van noord naar zuid even snel als van west naar oost? Een ogenschijnlijk bizarre vraag, maar 127 jaar geleden had men goede reden om aan te nemen dat het antwoord “nee” moest zijn.
Licht is een golfverschijnsel, zoals bleek uit interferentieproeven uit het begin van de 19e eeuw: licht + licht kan duisternis geven – een effect dat met het begrip golf eenvoudig te verklaren is. Maar als licht zich gedraagt als een golf, door welk medium planten deze golven zich dan voort? Zoals het water de ‘drager’ is van de golven op zee, en lucht de drager is van geluidsgolven, net zo moet er een drager zijn van de lichtgolven, dacht men. Die drager kreeg alvast een naam, ‘ether’ en men ging aan de slag om eigenschappen van die ether op te sporen. Het lukte niet om enige eigenschap als dichtheid of elasticiteit vast te stellen. Bovendien zou de ether reusachtig uitgestrekt moeten zijn – hij moet immers de lichtgolven van de sterren naar ons toe dragen. Ook zou de ether in glas moeten kunnen doordringen, zelfs in onze ogen om daar het licht naar ons netvlies te dragen.

De aarde zou in zijn baan rond de zon door de ether heen vliegen. De aarde draait met een snelheid van 30 km/s rond de zon en er zou dus sprake moeten zijn van een stevige ‘etherwind’. En, zo was het idee, de lichtsnelheid met etherwind tegen zou meetbaar kleiner moeten zijn dan gemeten in een richting loodrecht op die wind.

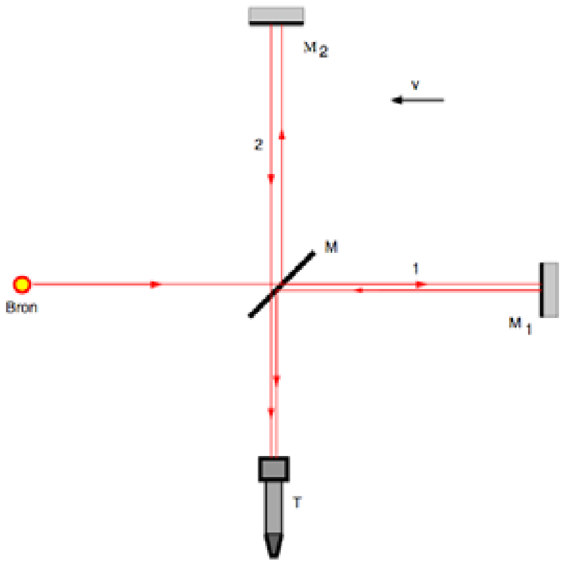
Michelson en Morley slaagden erin de lichtsnelheid met een nauwkeurigheid van 10 km/s te bepalen. Een effect van 30 km/s ‘wind tegen’ zou de lichtsnelheid dus meetbaar kleiner moeten laten worden. Zij maten echter geen verschil of ze nu in de ene richting, of juist in een richting daar loodrecht op hun metingen verrichten. De lichtsnelheid is een constante, was hun conclusie.

Einstein schafte later het hele begrip ether af. Licht kan zich door vacuüm voortplanten en heeft geen dragende stof nodig. Er bestaat dus ook geen etherwind – licht gaat van noord naar zuid even snel als van west naar oost.

Een vereenvoudigde schematische weergave van het Michelson-Morley experiment staat in figuur 1.8. Een lichtbundel vanuit de bron wordt gesplitst op de halfdoorlaatbare spiegel M in twee bundels 1 en 2 die via M_1 respectievelijk M_2 terugkeren naar de spiegel M in de kijker T. Hier veroorzaken de twee bundels een interferentiepatroon als de spiegels M_1 en M_2 net niet loodrecht op elkaar staan. De snelheid van de opstelling t.o.v. de mogelijk aanwezige ether is gegeven door v. De aanwezigheid van een ether zou de relatieve weglengtes die de stralen afleggen en daardoor het interferentiepatroon beïnvloeden. Dit werd niet waargenomen en daarmee was de etherhypothese weerlegd.

Michelson en Morley in een animatie

Op http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/more_stuff/flashlets/mmexpt6.htm kun je het experiment van Michelson en Morley in een animatie bekijken. Let wel: daar worden de resultaten weergegeven die zij dachten te zullen vinden!



Figuur 1.8 Schematische weergave van het Michelson-Morley experiment.

Figuur 1.9 Opstelling van het Michelson-Morley experiment

Fysische eenheden

Vroeger werden eenheden vaak gedefinieerd aan de hand van een prototype. De kilogram is bijvoorbeeld vastgelegd door het massa van een metalen cilinder die in Parijs wordt bewaard. Hierbij moet worden opgelet dat dit stuk metaal niet van massa verandert (bijvoorbeeld door vuil of roesten). Het is gemakkelijker om een eenheid te definiëren aan de hand van een natuurconstante. Bij de meter is dit gedaan aan de hand van de lichtsnelheid. Voor het ogenschijnlijk bizarre getal 299.792.458 meter per seconde is gekozen, om niet alle meetlatten ter wereld te moeten veranderen.

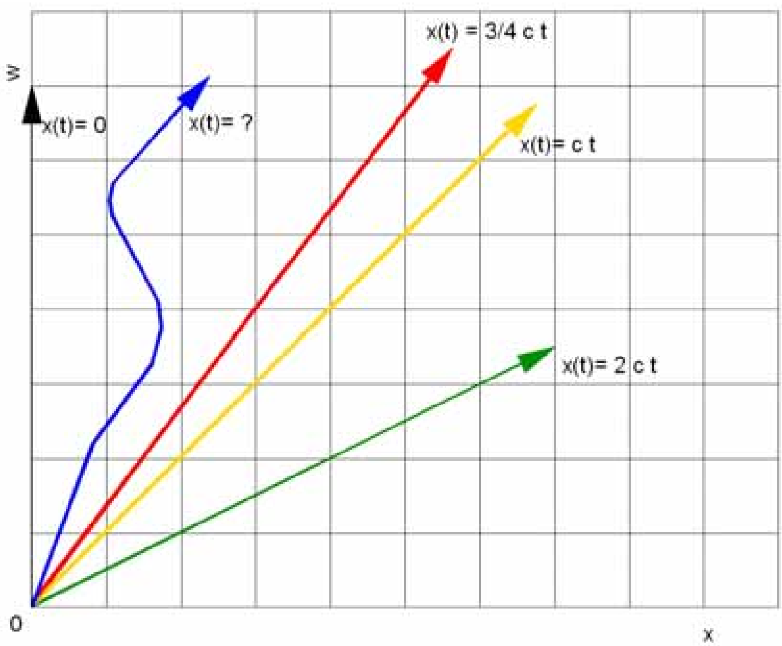
1.5 Wereldlijnen

Zoals gezegd leggen objecten een pad af in de ruimtetijd, dat we weergeven met een lijn. Bij het woord 'pad' denken we algauw aan een paadje in het bos of een fietspad in de stad - een pad in de ruimte dus. Daarom noemen we een pad door de ruimtetijd meestal een **wereldlijn**. In figuur 1.10 zien we verschillende wereldlijnen. Alle getekende lijnen beginnen op het tijdstip 0 op de plek x = 0, in het punt dat de oorsprong wordt genoemd (niet in de zin dat ruimte en tijd daar 'ontstaan'; het is gewoon een willekeurig gekozen referentiepunt van ons coördinatenstelsel), en bewegen zich vooruit in de tijd. Wereldlijnen kunnen natuurlijk niet terug in de tijd - in de figuur naar beneden - lopen.

Laten we beginnen met de zwarte pijl die samenvalt met de tijdas: deze beschrijft een voorwerp in rust, dat stilstaat in de oorsprong. De gele pijl kennen we al: dit is de wereldlijn van een lichtflits of foton. De andere rechte lijnen in het diagram komen overeen met objecten die met andere constante snelheden bewegen: constant omdat de afgelegde afstand steeds evenredig is met de tijdsduur. De rode pijl kan staan voor iemand die reist met een snelheid

$$v = \frac{3}{4}c$$

want op elk tijdstip heeft deze driekwart afgelegd van de afstand die de lichtflits in dezelfde tijd heeft afgelegd. Dat is goed te zien op het tijdstip t = 4, waar de rode reiziger zich drie eenheden in de ruimterichting heeft verplaatst en het licht vier. Op basis van een vergelijkbare redenering mogen we concluderen dat de groene reiziger zich verplaatst met tweemaal de lichtsnelheid. De kronkelende blauwe wereldlijn, ten slotte, beschrijft een dralende reizigster die zich heen en weer beweegt met wisselende snelheid: ze versnelt en vertraagt. Haar snelheid op een tijdstip t wordt bepaald door de steilheid van de raaklijn aan haar wereldlijn in het corresponderende punt. We zien dat een wereldlijn alle informatie bevat over de bewegingen die een reiziger uitvoert.



Figuur 1.10 Wereldlijnen

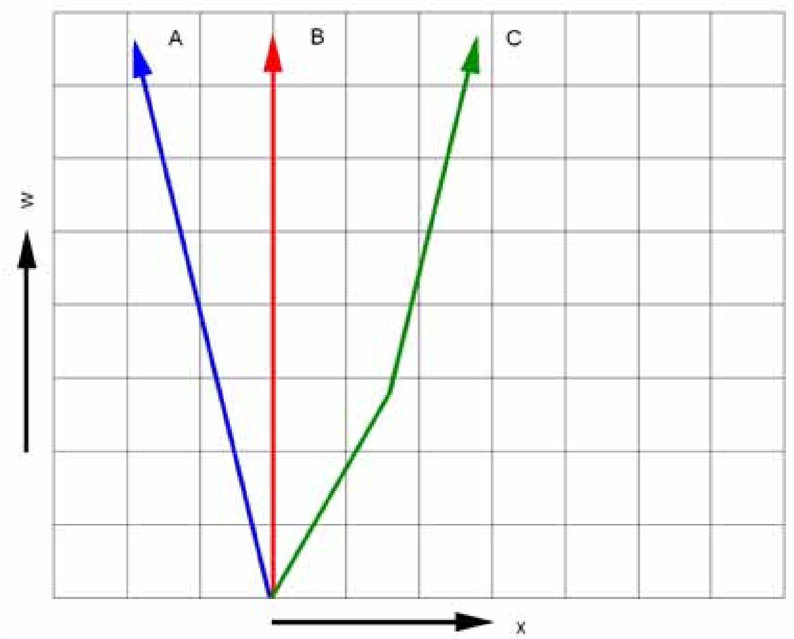
T.5 Wereldlijnen

In figuur 1.11 zijn drie wereldlijnen weergegeven.

a. Welke wereldlijn beschrijft geen pad door de ruimte?

b. Beschrijf wat iedere wereldlijn zou kunnen voorstellen.

c. Teken de wereldlijn die jou voorstelt, terwijl je deze opgave zit te maken.



Figuur 1.11

Ruimtetijddiagrammen tekenen

Ruimtetijddiagrammen laten zich zonder veel moeite tekenen met behulp van een teken-tool op het internet. Ga naar http://80.127.124.114/teken.html. Om een indruk te krijgen van de werking van het programma, druk op de informatietoets i.

1.6 De postulaten (veronderstellingen)

Wij willen vooral weten waar Einstein uiteindelijk op uitkwam. Dat is wat hier beschreven wordt zonder al te zeer in te gaan op de ontwikkeling van zijn ideeën en de verwoede discussies waar de wetenschappelijke kopstukken uit die tijd in verwikkeld raakten voordat ze zijn theorie al dan niet konden accepteren. Hier wordt de essentie van de theorie uiteengezet, waarbij we strak vasthouden aan de weergave met behulp van ruimtetijddiagrammen. Je leert hoe je met die diagrammen om moet gaan, zodat je hopelijk de vragen die gaandeweg bij je opkomen, zelf kunt beantwoorden.

Als beginpunt nemen we een uiterst bondige formulering van de theorie, twee postulaten waarin Einstein de crux ervan samenvatte; dit zijn twee fundamentele veronderstellingen over de werking van de natuur. Daarna laten we stap voor stap zien waarom de consequenties van deze uitgangspunten zo subliem en tegelijkertijd schokkend zijn. In zekere zin leggen we de weg die Einstein zelf ging in omgekeerde richting af.

Postulaten van de relativiteitstheorie

Voor waarnemers die met constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen, geldt dat:

- De natuurkundige wetten hetzelfde zijn.
- De lichtsnelheid in vacuüm hetzelfde is.

Het eerste postulaat gaat over twee referentiekaders, of twee (groepen) waarnemers, die met constante snelheid reizen ten opzichte van elkaar. Deze kaders worden **inertiaalstelsels** genoemd. Het 'speciale' van de speciale relativiteitstheorie slaat erop dat de theorie beperkt is tot dergelijke inertiaalstelsels: er zijn dus geen onderlinge versnellingen in het spel. Het postulaat is dat die waarnemers in hun eigen stelsel, als ze de juiste experimenten doen en slim genoeg zijn, allemaal dezelfde natuurkundige wetten zullen ontdekken, dezelfde vergelijkingen voor de mechanica, de zwaartekracht, het elektromagnetisme enzovoort. Dat klinkt niet al te schokkend, toch? Het lijkt heel aannemelijk en Einstein was zelfs niet de eerste die dit voorstelde. Galileo Galileï ging hem zo'n driehonderd jaar eerder al voor toen hij in zijn 'Dialoog over de twee voornaamste wereldsystemen' schreef:

> *"Sluit jezelf op, in de hoofdkajuit benedendeks van een groot schip. Neem een grote kom water met enkele vissen erin. Als het schip stilligt, zwemmen de vissen zonder voorkeur in alle richtingen. Nadat je dit nauwkeurig hebt bestudeerd, laat dan het schip voortgaan met een willekeurige constante snelheid. Je zult géén verschil merken - noch zou je kunnen zeggen of het schip beweegt of niet."*

Inertiaalstelsels

In de natuurkunde is een inertiaalstelsel een coördinatenstelsel waarin voorwerpen, waar geen kracht op werkt, stilstaan of een eenparige rechtlijnige beweging uitvoeren. Dat betekent dat in zo'n stelsel de bewegingswetten van Newton geldig zijn: voorwerpen veranderen alleen van snelheid als er een kracht op ze werkt en dan is de versnelling evenredig met die kracht. Als definitie voor een inertiaalstelsel kun je dus nemen dat in zo'n stelsel de eerste wet van Newton moet gelden.

In het Latijn betekent iners: werkeloos, waardeloos, traag.

Het tweede postulaat stelt dat de lichtsnelheid in vacuüm hetzelfde is voor alle waarnemers die met een constante snelheid bewegen. In vacuüm betekent in de 'lege ruimte', dus niet in een materiaal waar het licht allerlei obstakels tegenkomt en interacties ondergaat. Als je bij deze uitspraak stilstaat, is die nogal vreemd. Ze klopt niet met ons intuïtieve begrip van snelheden, en ook niet met de theorie van Newton. Als je aan het fietsen bent met 15 km/u, en je gooit een bonbon naar iemand, die verderop op de stoep staat, met nog eens

20 km/u, dan zal die de bonbon opvangen en zeggen dat die aankwam met een snelheid van 15 + 20 = 35 km/u. We zijn het er snel over eens dat dat klopt als een bus. Wacht even - we moeten zeggen: er was eens een tijd dat dat léék te kloppen.
We zijn het er allemaal over eens dat als je met een zeer snelle trein reist die voortraast met de helft van de lichtsnelheid, $v = ½\, c$, en met je laserzaklamp een lichtflits uitzendt naar je partner op een station een eind verderop, die lichtflits ten opzichte van jou beweegt met de lichtsnelheid. Volgens onze oude intuïtieve redenering zou je partner op het station, als ze de snelheid van de lichtflits zou meten, uitkomen op een snelheid $u = c + ½\, c = 1½\, c$. Maar hier komt Einstein om de hoek kijken die ijskoud beweert dat de lichtsnelheid voor haar hetzelfde is als voor jou, dus dat $u = c$. Dat staat haaks op onze intuïtie en lijkt op het eerste gezicht krankzinnig.

Hoe kan dit? Hoe kan zo'n eenvoudige redenering onjuist zijn? Zo reageerden de meeste natuurkundigen aanvankelijk ook. Als Einstein gelijk had, dan moest er ergens iets goed mis zijn — en dat bleek inderdaad het geval te zijn. Snelheid is gedefinieerd als afstand (ruimte) per tijd, en om de lichtsnelheid hetzelfde te laten zijn voor alle waarnemers, zullen we ons begrip van ruimte en tijd grondig moeten herzien. Dat was de boodschap. Het is nooit makkelijk om vooropgezette ideeën aan de kant te schuiven, zeker als ze volstrekt evident lijken. Maar feiten zijn immuun voor verzet. Daarom gaan we ons nu door middel van een reeks diagrammen ontdoen van een paar even hardnekkige als foutieve denkwijzen.

T.6 Beweging is relatief

Welke van de onderstaande zinnen kunnen dezelfde situatie beschrijven?

a. Anton heeft een snelheid v en Bianca staat stil
b. Anton heeft een snelheid v ten opzichte van Bianca
c. Bianca heeft een snelheid v ten opzichte van Anton
d. Bianca heeft een snelheid v en Anton staat stil

Begrippen

Ruimtetijddiagram
Ruimtetijd
Gebeurtenis
Lichtseconde
Wereldlijn
Inertiaalstelsel
Postulaat
Foton

Samenvatting

- In een **ruimtetijddiagram** is de plaats (horizontaal) tegen tijd (verticaal) uitgezet. Een dergelijk diagram is vergelijkbaar met een plaats-tijd-diagram uit de natuurkunde van Newton.

- Een **gebeurtenis** is een bepaalde plek op een bepaald tijdstip, oftewel een voorval met een ruimte- en een tijdcoordinaat. Een gebeurtenis is een punt in een ruimtetijddiagram

- Alle gebeurtenissen spelen zich af in **ruimtetijd**, op een plaats in de ruimte en een moment in de tijd. Elke gebeurtenis wordt als één punt in ruimtetijd weergegeven. Ruimtetijd is een ruimte met 3 ruimtedimensies en 1 tijdsdimensie. Wij beperken ons tot een ruimtetijd met 1 ruimtedimensie en 1 tijdsdimensie.

- Een **wereldlijn** is het pad in ruimtetijd dat een voorwerp aflegt: een continue opeenvolging van gebeurtenissen. Hieraan kun je aflezen waar en op welk tijdstip een voorwerp is; tevens kun je uit de helling de snelheid van dat voorwerp aflezen. Bewegende voorwerpen volgen wereldlijnen.

- De wereldlijnen van objecten die met constante snelheid bewegen worden voorgesteld als rechte lijnen. De wereldlijn van een **foton** of lichtpulsje correspondeert met een lijn die onder 45^{o} loopt.

- **Inertiaalstelsels** worden gevormd door waarnemers die ten opzichte van elkaar met constante snelheid bewegen.

- De relativiteitstheorie is gebaseerd op twee **postulaten** (veronderstellingen) over waarnemers die ten opzichte van elkaar met constante snelheid bewegen (inertiaalwaarnemers). Voor deze waarnemers geldt dat:
  1 de natuurkundige wetten hetzelfde zijn
  2 de lichtsnelheid in vacuüm hetzelfde is.

Wat je moet kunnen…

- Je moet een wereldlijn kunnen tekenen van een lichtstraal in een ruimtetijddiagram.
- Je moet van een object een wereldlijn kunnen tekenen in een ruimtetijddiagram.
- Je moet van een gebeurtenis de coördinaten kunnen aflezen in een ruimtetijddiagram.
- Je moet een betekenis kunnen toekennen aan punten en (wereld)lijnen in een ruimtetijddiagram.

Opgaven

§1.2

1 Meer ruimtedimensies

a. Teken een ruimtetijddiagram met twee ruimtedimensies en één tijdsdimensie.
b. Waarom kun je geen ruimtetijddiagram tekenen met drie ruimtedimensies en één tijdsdimensie?

§1.3

2 Ruimtetijddiagram

a. Welke grootheid tekenen we in een ruimtetijddiagram langs de verticale as?
b. Kan in een ruimtetijddiagram de lijn van boven naar beneden lopen? Zo nee, waarom niet?
c. Teken het ruimtetijddiagram van een foton in vacuüm.
d. Teken het diagram van een foton dat in vacuüm in de negatieve ruimterichting beweegt.

3 Lichtsnelheid in water

In water is de lichtsnelheid maar 0,75c.

a. Teken het diagram van een foton dat door water beweegt.
b. In het ruimtetijdpunt (w=1,x=4) gaat een lamp aan die gedurende 3 seconden aanblijft. De lamp zendt in vacuüm in alle richtingen licht uit. Teken het ruimtetijddiagram van deze gebeurtenissen.
c. Als in het ruimtetijd diagram in 'alle' richtingen licht wordt uitgezonden, over hoeveel richtingen gaat het dan?
d. Tussen welke tijdstippen wordt het punt x=6 belicht?

4 Lichtsnelheid

We rekenen vaak met de afgeronde waarde voor de lichtsnelheid van $3 \cdot 10^8$ m/s. Is dan de afwijking van de correcte waarde meer of minder dan 1 %?

§1.4

5 Extra – Foucault's experiment

Gegeven is dat in figuur 1.7 voor hoek β 1,0º wordt gemeten. Van het draaiende spiegeltje is bekend dat het 440 omwentelingen per seconde maakt, terwijl de afstand MP 500 m bedraagt. Bereken hieruit de snelheid van het licht.

§1.5

6 * Een vraag over een plaats-tijd-diagram, gebruikmakend van de mechanica van Newton.

A staat stil en B beweegt met constante snelheid v ten opzichte van A. A gooit op t = 0 een voorwerp met snelheid ½ v naar voren; ook B doet dit. Teken de wereldlijnen van A, B en van deze twee voorwerpen.

7 Wereldlijnen

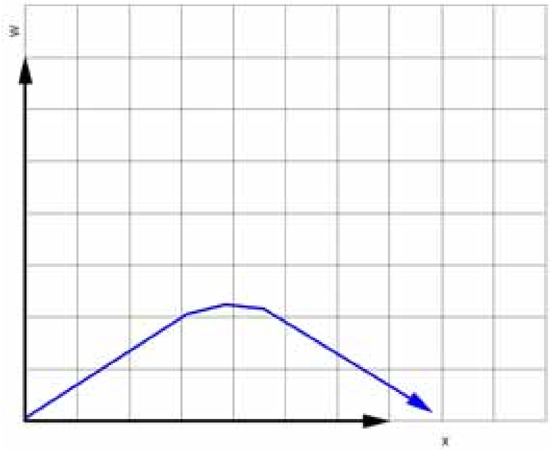
a. Kunnen wereldlijnen elkaar snijden?

b. Zo ja, wat is de betekenis van het snijpunt? Zo nee, waarom niet?

c. Bekijk figuur 1.10. Geef de tijdstippen aan waarop de dame (de kronkelende wereldlijn) stilstaat.

8 Onmogelijke wereldlijn

Waarom is de wereldlijn in figuur 1.12 onmogelijk?



Figuur 1.12 Onmogelijke wereldlijn

9 Ruimte versus ruimtetijd

Wat is het verschil tussen een pad door de ruimte en een wereldlijn door de *ruimtetijd*?

§1.6

10 Wie staat stil?

Stel: je zit op de achterbank van een auto. De auto staat in de file en je zit een beetje dromerig naar buiten te staren. Soms heb je dan wel eens even het gevoel dat de auto plotseling achteruit begint te rijden. Je schrikt wakker en kijkt nog eens goed. Dan blijkt het dat het de rij auto's naast je is geweest die in beweging kwam.

a. Leg uit, in termen van het eerste postulaat, waaraan je je vergissing bemerkt.

b. Beschrijf een situatie uit het dagelijks leven waarbij je niet weet of je stilstaat of juist beweegt.

11 Is versnelling ook relatief?

Meneer A zit in een remmende trein, mevrouw B staat stil op het perron. Beiden laten een tennisbal uit hun hand vallen.

a. Komt de tennisbal van meneer A vlak voor zijn voeten op de grond, of beweegt die bij hem vandaan?

b. Wordt dit door allebei waargenomen?

c. En hoe zit dit voor de tennisbal van mevrouw B?

Aan de antwoorden op bovenstaande vragen kun je zien dat beiden het erover eens zijn dat meneer A aan het versnellen is en mevrouw B niet.

d. Als A en B nu eens niet ten opzichte van elkaar versnellen, kun je dan een experiment bedenken dat bewijst dat bijvoorbeeld A beweegt en B stil staat?

12 Inertiaalstelsel

a. Als je een inertiaalstelsel gekozen hebt (bijvoorbeeld in de hoek van een boot), waar houdt dit stelsel dan op?

b. Kun je een bal een inertiaalstelsel uitgooien, net zoals je een bal uit een boot kunt gooien?

13 Equivalentie van inertiaalstelsels

Het eerste postulaat zegt dat de natuurkundige wetten hetzelfde zijn in ieder inertiaalstelsel. Beantwoord nu de volgende vragen met een argumentatie:

a. Gegeven dit postulaat, is er dan een fysisch onderscheid te maken tussen een inertiaalstelsel in rust en een inertiaalstelsel dat beweegt met constante snelheid?

b. Gegeven dit postulaat, zou een object dezelfde kinetische energie moeten hebben in alle inertiaalstelsels?

c. Gegeven dit postulaat, als je twee *identieke* experimenten zou uitvoeren in twee *verschillende* inertiaalstelsel, zou je dan exact dezelfde resultaten moeten krijgen?

14 Relatieve snelheid

Stel je twee boten voor. Boot 1 vaart met 2,5 m/s naar het oosten. De andere boot vaart met 5 m/s naar het oosten. We maken aan iedere boot een inertiaalstelsel vast met de x-as naar het oosten wijzend.

a. Wat is de snelheid van boot 1, bezien vanuit het stelsel van boot 2?

b. Wat is de snelheid van boot 2, bezien vanuit het stelsel van boot 1?

15 Einstein en Galileï

Einstein gebruikte twee postulaten (veronderstellingen) bij het opstellen van zijn speciale relativiteitstheorie. Noem de veronderstelling die Einstein zelf had bedacht en noem die welke door Galileï is bedacht.

16 Relatieve snelheid van fotonen

Een lamp zendt in alle richtingen licht uit. We kijken alleen naar fotonen die naar links en rechts gaan.
Hoe snel gaan die ten opzichte van elkaar…

a. volgens de Newton-theorie?

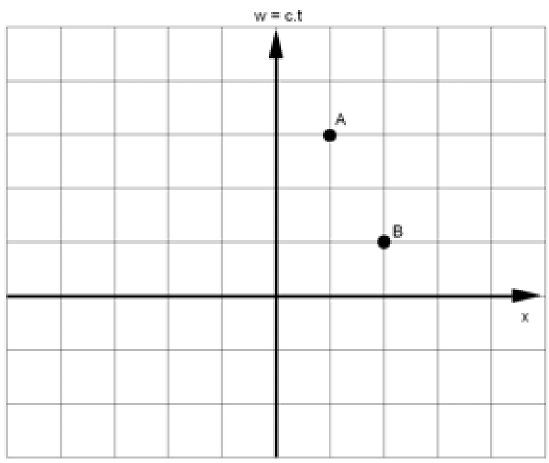
b. volgens Einstein's postulaat?

17 Het aflezen van een w-x-diagram

In figuur 1.13 zijn twee gebeurtenissen A en B aangegeven. De hokjes hebben een hoogte en breedte van 1 lichtseconde. De oorsprong is het punt (0,0).

a. Op welke tijdstippen vinden de gebeurtenissen A en B plaats?

b. Hoever van de oorsprong vinden zij plaats?



Figuur 1.13 Een w-x-diagram aflezen

18 * Een ontmoeting met Tachy-John (1)

In figuur 1.14 worden een rode en twee gele wereldlijnen gegeven die elkaar snijden in de oorsprong 0 (x=0,w=0).

a. Wat stellen deze wereldlijnen voor?

We stellen ons voor dat er een ontmoeting plaatsvindt tussen de zwarte waarnemer en ene Tachy-John (T-J) die met een snelheid van v=2c langskomt. De ontmoeting vindt plaats in de oorsprong. Zijn assenstelsel is in figuur 1.14 al rood weergegeven.

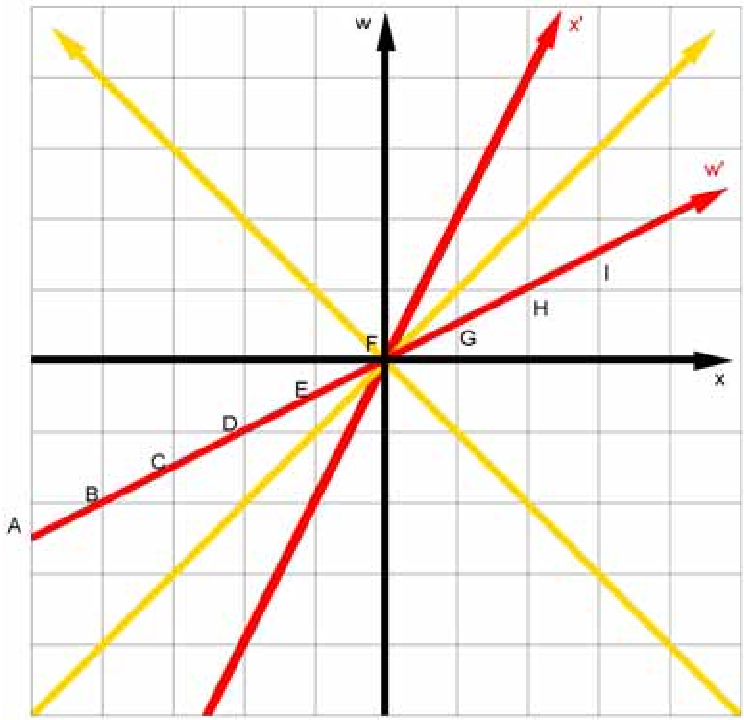
Om zijn komst aan te kondigen stuurt T-J met regelmatige tussenpozen een lichtsignaal naar de zwarte waarnemer. De ruimtetijdpunten van waaruit de signalen vertrekken zijn met de letters A t/m I aangegeven. Hij blijft signalen zenden na de ontmoeting. Wij proberen dit probleem te analyseren aan de hand van fig 1.15; hierin zijn lichtsignalen getekend die ontstaan in de punten A t/m I en die de vertrouwde loop hebben die we al eerder tegenkwamen.

b. Hoe ervaart de zwarte waarnemer de hele ontmoeting (beschrijf de ontmoeting als een reeks van waarnemingen van de zwarte waarnemer)?
c. Wat kun je zeggen over de frequenties (zo mogelijk kwantitatief) van de reeks signalen die de zwarte waarnemer ontvangt.

Ook de zwarte waarnemer heeft de hele tijd een knipperlicht aanstaan.

d. Teken met behulp van de tekentool de wereldlijnen van de signalen van dit knipperlicht. Beschrijf de hele ontmoeting nu vanuit het gezichtspunt van T-J.
e. Hoe verhouden zich de frequenties van de signalen die T-J ontvangt, voor en na de ontmoeting?
f. Leg met behulp van je antwoorden op vraag b en d uit dat hier sprake is van een schending van het eerste postulaat van Einstein.

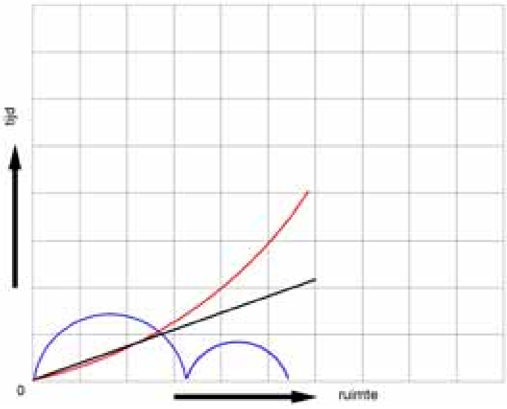
Opm. Deze schending kan voorkomen worden; verderop besteden we daar aandacht aan.

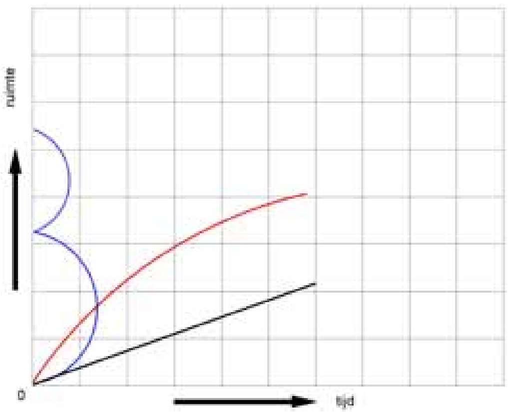


Figuur 1.14 Ontmoeting

Antwoorden Tekstvragen

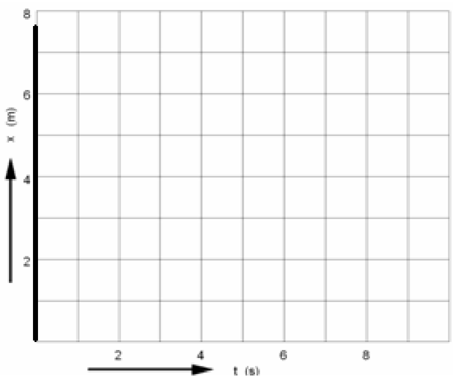
T.1

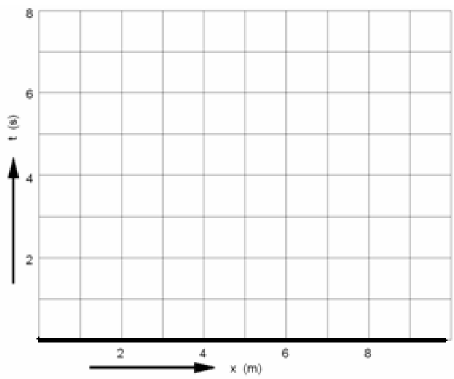


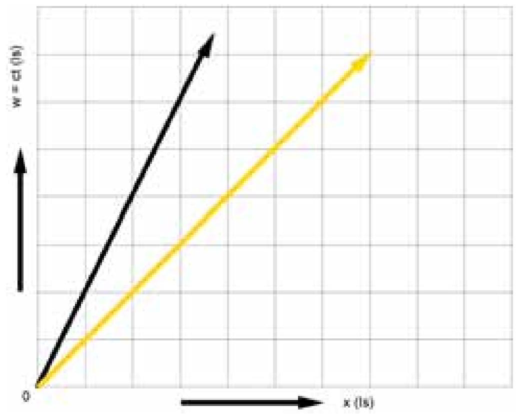


T.2
A is een gebeurtenis.
B geeft een tijdsduur aan die op één plaats verlopen is.

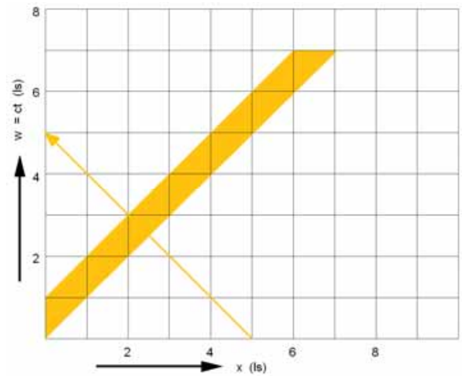
T.3







T.4



T.5

a. Lijn B - die beschrijft stilstand.
b. A beschrijft een beweging vanuit de oorsprong in de negatieve richting. C beweegt in de positieve richting, later langzamer dan eerst: In het tweede stuk wordt er tijdens veel tijd (w) weinig afstand (x) afgelegd.
c. Dit zou lijn B kunnen zijn; die zou natuurlijk ook op een andere plaats getrokken kunnen worden, maar de lijn loopt dan ook verticaal omhoog.

T.6

A en B kunnen dezelfde situatie beschrijven. C en D ook.
A en B beschrijven een andere situatie dan C en D, maar door verandering van *v* in -*v* zouden alle omschrijvingen op één situatie kunnen slaan.

2 De relativiteit van gelijktijdigheid

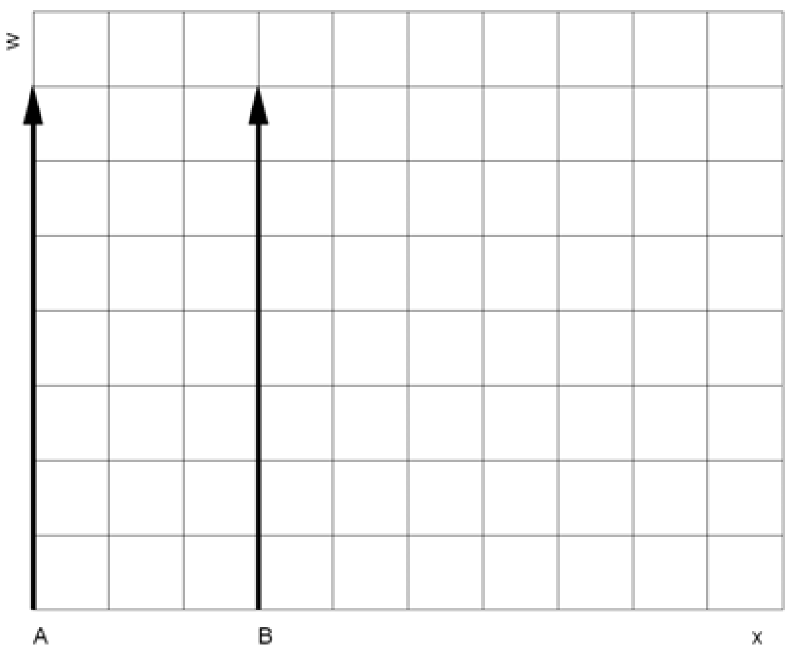
De gehele wetenschap is slechts een verfijning van ons alledaagse denken.

Wat is gelijktijdigheid?

2.1 Referentiekaders

Laten we eens bekijken hoe verschillende waarnemers die stilstaan ten opzichte van elkaar, samen een **referentiekader** of coördinatenstelsel kunnen opzetten. Eigenlijk bestaat zo'n referentiekader gewoon uit een groot aantal 'waarnemers' die ten opzichte van elkaar in rust zijn, zoals de passagiers in een rijdende trein of de mensen die staan te wachten op het perron. Ze hebben elk een klok en een meetlat, en staan klaar om metingen voor ons te doen zodra we daarom vragen en ons braaf van de uitkomsten op de hoogte te brengen.

Nu kiezen we twee waarnemers, voorzien van identieke klokken en meetlatten. In figuur 2.1 zijn ze weergegeven als twee zwarte pijlen - zo te zien blijven ze op een behoorlijke afstand van elkaar op hun plek staan. Allereerst willen zij hun klokken gelijkzetten, hun tijdmetingen met elkaar **synchroniseren**, zodat zij aan dezelfde gebeurtenis dezelfde tijd toekennen. Hoe ze dat moeten aanpakken is te zien in figuur 2.2.



Figuur 2.1 Wereldlijnen van twee waarnemers

2.2 Het gelijkzetten van klokken

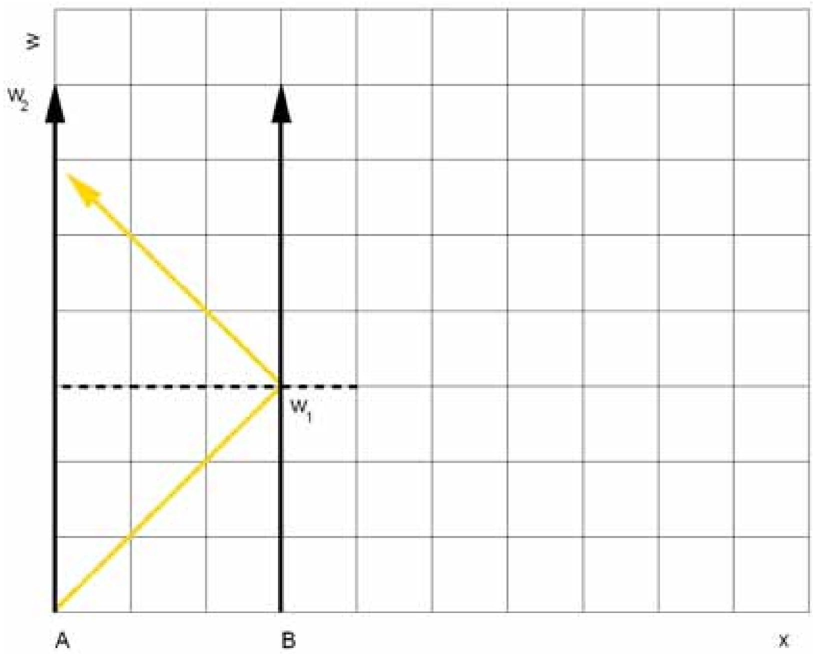
Je kunt het gelijkzetten van klokken het best beschouwen als een gewoon fysisch experiment. Verderop zullen we het regelmatig hebben over gedachte-experimenten: dat zijn experimenten die op basis van de natuurkundige theorie in principe heel goed mogelijk zijn, maar die praktisch gezien vaak onuitvoerbaar zijn. Einstein heeft in dit geval eenvoudige instructies gegeven: waarnemer Apollo stuurt op tijdstip $w_A = 0$ een lichtsignaal naar waarnemer Bacchus, die noteert dat het aankomt op tijdstip $w_B = w_1$ en het signaal meteen met een spiegel terugkaatst naar Apollo, bij wie het terugkeert op tijdstip $w_A = w_2$.

Het moment dat voor Apollo precies gelijktijdig is met w_1 is halverwege tussen het verzenden en het weer ontvangen van het lichtsignaal, ofwel $w_1 = ½w_2$. Dat is geen verrassing: we hadden op basis van het diagram niet anders verwacht. Bovendien weten we dat de tijd die het kost om een lichtstraal heen en weer te sturen, afhangt van de afstand tussen de beide waarnemers, zodat met deze aanpak door een grotere groep waarnemers die ten opzichte van elkaar in rust zijn, een heel stelsel van coördinaten kan worden opgezet.

Het feit dat iets 'gelijktijdig' kan zijn voor een groep waarnemers die stilstaan ten opzichte van elkaar, betekent niet dat zij gebeurtenissen die tegelijk plaatsvinden, ook altijd op hetzelfde tijdstip zullen waarnemen! Het signaal zal er immers niet altijd even lang over doen om bij de verschillende waarnemers aan te komen. Daardoor kunnen verschillende **gesynchroniseerde waarnemers** behoorlijk uiteenlopende waarnemingstijdstippen registreren, maar na correctie voor de reistijd van het signaal zullen ze wel hetzelfde tijdstip aan de gebeurtenis toekennen.
Let op! In figuur 2.2 is sprake van een teruggekaatste lichtstraal; het lijkt bovendien dat de spiegelwet "hoek van inval = hoek van terugkaatsing" in de figuur is af te lezen. Er is hier echter maar één ruimtedimensie en bij terugkaatsing keert de lichtstraal van richting om. De figuur geeft niet de loop door de ruimte van een lichtstraal weer, maar door ruimtetijd. En de wereldlijnen van lichtstralen maken daarin altijd hoeken van 45° met de assen.

T.7 Synchroniseren

Maak een tekening (dus geen ruimtetijddiagram) waarin duidelijk wordt hoe Apollo en Bacchus hun klokken synchroniseren.



Figuur 2.2 Klokken gelijkzetten (synchroniseren) de hokjes in het diagram hebben een breedte en hoogte van 1 lichtseconde.

T.8 Klok op Mars

Sander kijkt met een superverrekijker naar een klok op de planeet Mars, die een afstand van 78 miljoen km van ons verwijderd is. Sanders polshorloge geeft 23.00 uur aan. Ziet Sander op de Marsklok dezelfde tijd als op zijn eigen polshorloge, als de klokken gesynchroniseerd zijn?

2.3 Bewegende stelsels

Nu we één referentiekader hebben opgezet, willen we met precies hetzelfde recept een tweede inertiaalstelsel opzetten voor een groep waarnemers die zich voortbewegen met dezelfde constante snelheid. Waarnemers die ten opzichte van elkaar versnellen vormen geen inertiaalstelsel omdat hun onderlinge snelheid niet constant is — ook een bal aan een touwtje die rondgeslingerd wordt met ‘constante’ baansnelheid, heeft toch geen constante snelheid, omdat de richting ervan voortdurend verandert. De relativiteitspostulaten gaan dan niet op. Daarom eisen we dat de rode wereldlijnen van Arnold en Britney rechte lijnen zijn. Ook zij willen hun klokken gelijkzetten om een rood kader op te zetten volgens Einstein’s instructies.

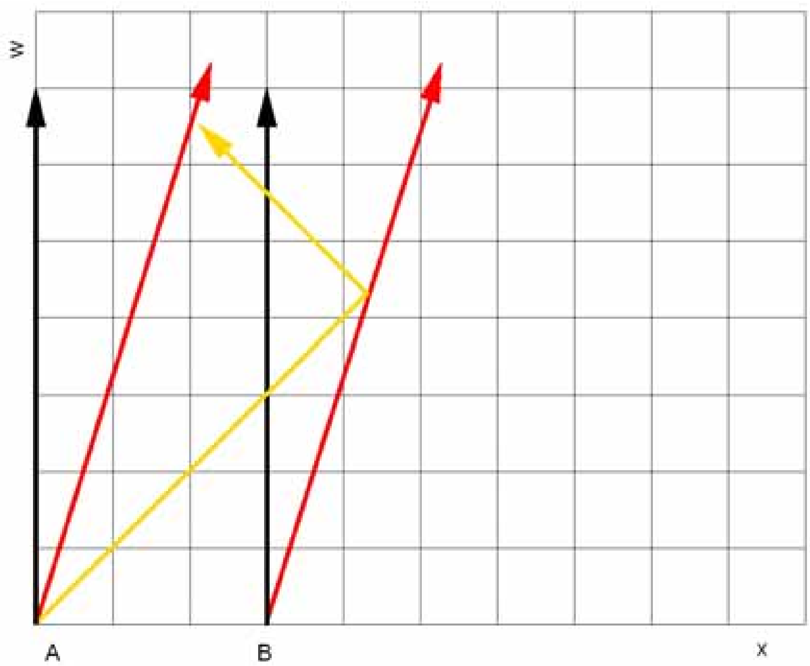
Arnold en Britney voeren dus hetzelfde experiment uit. Als we dat in ons diagram willen afbeelden, moeten we ons houden aan het tweede postulaat van Einstein, dat zegt dat de lichtsnelheid hetzelfde is voor alle waarnemers. Daarom maakt de wereldlijn van het licht dat door de bewegende waarnemers Arnold en Britney wordt uitgezonden, dezelfde hoek ten opzichte van de zwarte assen (45 graden om precies te zijn) als in het stilstaande kader, zoals te zien is in de figuur 2.3.

T.9 Synchronisatiemethode

Zouden Arnold en Britney de boven beschreven synchronisatiemethode ook kunnen uitvoeren met een geluidsignaal als…

a. Arnold en Britney stilstaan ten opzichte van elkaar?

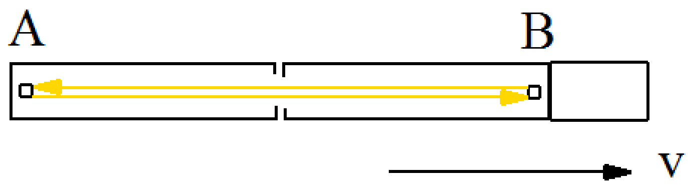
b. Arnold en Britney bewegen ten opzichte van elkaar met constante snelheid?



Figuur 2.3 Bewegende waarnemers zetten hun klokken gelijk

2.4 Gelijktijdigheid is relatief

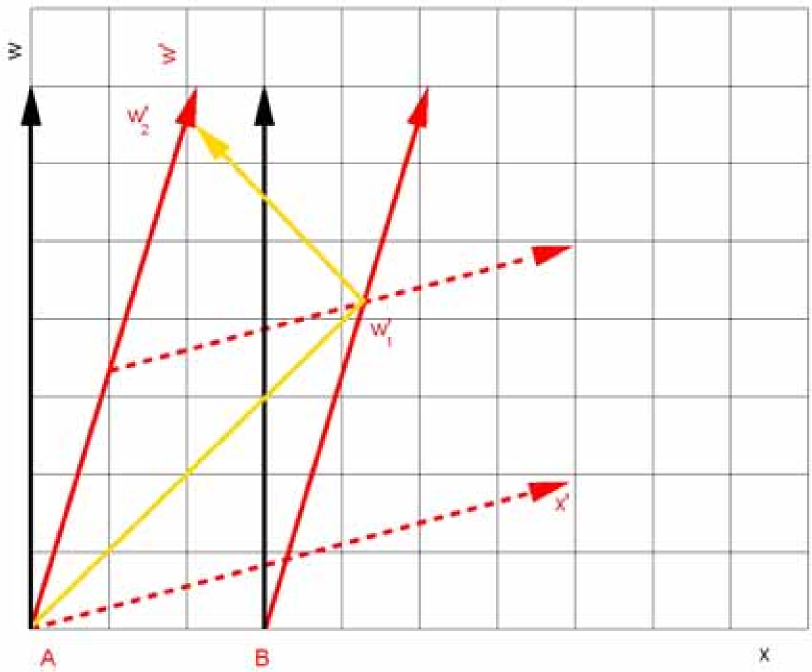
Arnold en Britney zitten in een (hele lange) trein in 2 coupé´s waarvan de tussendeuren openstaan. Zie figuur 2.4.



Figuur 2.4 Lichtsignalen in een trein

Arnold verstuurt zijn lichtsignaal op tijdstip 0, Britney registreert het en stuurt het terug op tijdstip $w_B = w_1'$ en het komt weer bij Arnold aan op tijdstip $w_A = w_2'$. Om erachter te komen welke tijd op de wereldlijn van Arnold gelijktijdig is met w'_1 op die van Britney passen we dezelfde logica toe als eerst, en zo vinden we het moment halverwege, $w_A' = ½w_2'$. Het leuke is dat we precies dezelfde voor de hand liggende procedure volgen als bij Apollo en Bacchus, wat natuurlijk mooi klopt met het relativiteitsprincipe.
Maar intussen is er wel iets schokkends gebeurd, wat duidelijk te zien is als we naar de rode stippellijnen kijken. Deze lijnen staan per definitie voor 'dezelfde tijd' in het rode frame: ze gaan door gebeurtenissen die **gelijktijdig** zijn voor de rode waarnemers. Je zou ook kunnen zeggen dat de rode wezens langs deze lijnen hun afstanden meten, want de stippellijn door de oorsprong is gewoon de nieuwe ruimte-as, de x'-as, waarbij het accentje verwijst naar het rode referentiekader. In zekere zin is het begrip gelijktijdigheid een noodzakelijke voorwaarde voor elke bepaling van lengte. Immers, als we willen meten hoe lang een tafel is, leggen we er een meetlat langs, en als we het goed willen aanpakken, zorgen we ervoor dat we de meetlat op hetzelfde moment aflezen aan beide uiteinden van de tafel, anders zou de tafel (of de meetlat) kunnen verschuiven tussen het aflezen aan het ene en het andere uiteinde, waardoor de hele meting waardeloos zou zijn.

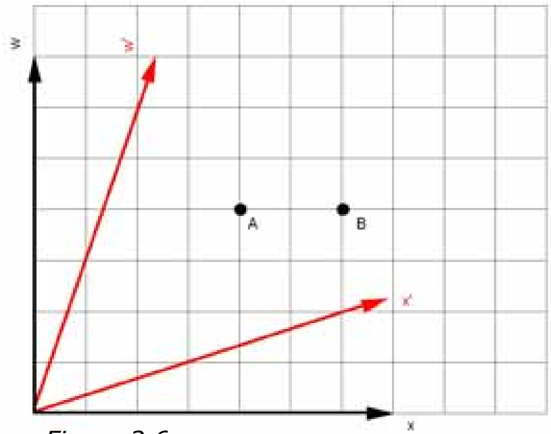
Figuur 2.5 illustreert het opzienbarende feit dat de ruimte-assen van het stelsel in rust en van het bewegende stelsel niet evenwijdig aan elkaar lopen, zodat gebeurtenissen die in het zwarte stelsel gelijktijdig zijn en dus op dezelfde horizontale zwarte lijn liggen, meestal niet gelijktijdig zullen zijn in het rode stelsel! Hieruit moeten we de belangwekkende conclusie trekken dat het concept gelijktijdigheid afhangt van het referentiekader. Met andere woorden: of aan twee gebeurtenissen hetzelfde tijdstip wordt toegekend, hangt af van hoe snel de waarnemers ten opzichte van elkaar bewegen. Gelijktijdigheid is een relatief begrip.



Figuur 2.5 Gelijktijdigheid is relatief

T.10 Gelijktijdigheid

In figuur 2.6 zijn twee stelsels getekend: een zwart en een rood stelsel. De gebeurtenissen A en B zijn gelijktijdig in het zwarte stelsel. Laat zien dat de gebeurtenissen in het rode stelsel niet gelijktijdig zijn (evt. met de tekentool).



Figuur 2.6

2.5 Einstein en treinen

Zou het kunnen...

- *Als pas afgestudeerde kon Einstein geen baan aan een universiteit krijgen.*
- *Hij ging werken op een octrooibureau.*
- *Zwitserland ging in die tijd over op één, centrale tijd.*
- *Het werd dus noodzakelijk dat klokken op verschillende plaatsen even snel liepen.*
- *Einstein moest patenten voor elektrische klokken beoordelen.*
- *Zou het kunnen dat hij zich heeft afgevraagd hoe je een klok in Bern gelijk kon zetten met een klok in Zürich?*
- *En zou het kunnen dat hij zich daarna de vraag heeft gesteld of een treinklok die gelijk liep met de klok op het perron in Bern na de reis Bern-Zürich in Zürich nog steeds gelijk zou lopen met de perronklok in Zürich?*
- *Zou het kunnen dat we de relativiteitstheorie ook een beetje te danken hebben aan klokkenbouwers die patent aanvroegen voor hun elektrische exemplaar?*

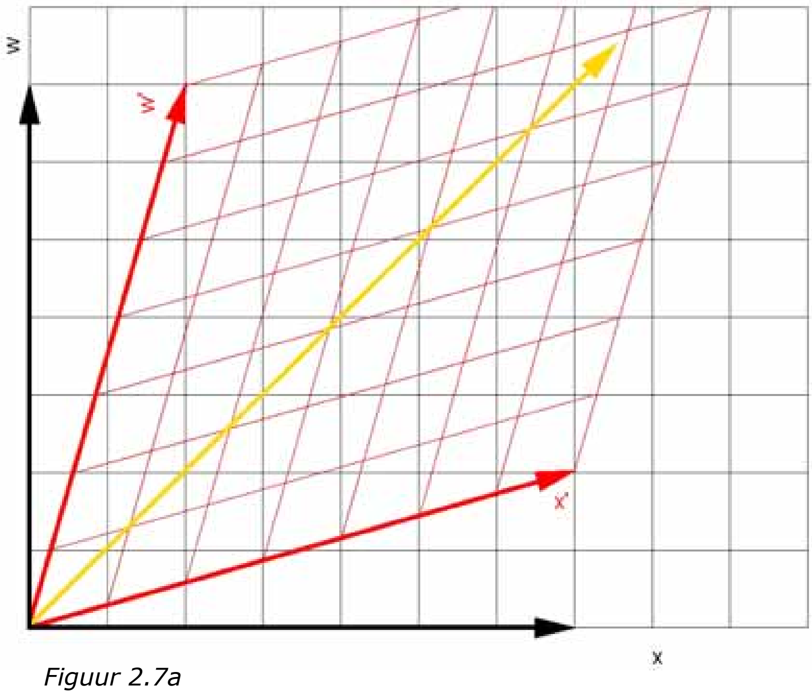
2.6 Eén ruimtetijd, vele inertiaalstelsels

We komen uit op een beeld, waarbij de rasters van inertiaalstelsels die bewegen ten opzichte van het zwarte stelsel platgedrukt zijn zoals het rode stelsel in figuur 2.7a. De zwarte vierkantjes worden samengedrukt tot ruitvormige vierhoeken, maar merk op dat de richting van wereldlijnen van lichtdeeltjes, die evenwijdig lopen aan de diagonalen van de ruit, bij deze vervorming onveranderd blijft.

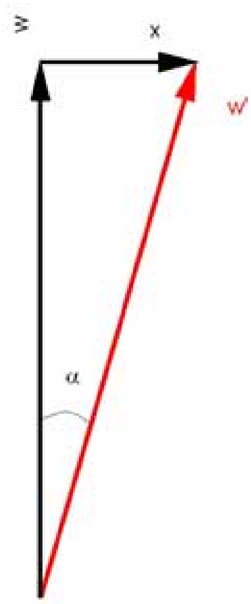
In figuur 2.7a is de getrokken rode lijn de wereldlijn van Arnold. In het zwarte stelsel heeft Arnold snelheid, in zijn eigen stelsel niet. Arnold zegt dus dat de rode lijn voortdurend zijn plaats $x' = 0$ weergeeft. De lijn x=0 in het zwarte stelsel is niets anders dan de tijd-as (w-as) in dat zwarte stelsel. Op dezelfde wijze is de rode lijn de tijdas w' in het stelsel van Arnold.

Hier ligt een fundamenteel onderscheid tussen de theorie van Einstein en de Newtonse natuurkunde. Bij Newton zijn plaats en snelheid relatief (hangen van de waarnemer af). De tijd is absoluut, en is dus gelijk voor alle waarnemers.
Bij Einstein zijn plaats en snelheid ook relatief. Één snelheid echter is dat niet: de lichtsnelheid. Dit absoluut zijn van de lichtsnelheid leidt tot een draaiing van de lijnen die gelijke tijdstippen met elkaar verbinden: de tijd (of gelijktijdigheid) moet relatief worden. Hoeveel die lijnen ten opzichte van de zwarte assen draaien, hangt af van de snelheid ten opzichte van het zwarte stelsel waarmee de waarnemers door de ruimte bewegen.

Je ziet ook dat de nieuwe ruimte- en tijdas allebei dezelfde hoek maken met de oude assen, en met de wereldlijn van een lichtsignaal. Daarom zal een punt op die wereldlijn weer worden beschreven door gelijke componenten langs de x'- en w'- as, hoewel we ons nog even niet druk maken over de getalswaarden die we bij de schaalverdeling langs die assen moeten zetten. Deze afbeelding laat zien dat het tweede postulaat van Einstein maakt dat ruimte en tijd niet meer op een objectieve wijze van elkaar te scheiden zijn, en dat hun onderlinge relatie afhangt van de snelheid waarmee we bewegen. Daarom hanteren we graag één begrip dat hetzelfde is voor alle waarnemers: niet ruimte, niet tijd, maar ruimtetijd.



Figuur 2.7a



Figuur 2.7b

Het schenkt een zekere voldoening om op grond van zuiver kwalitatieve argumenten tot zulke verrassende inzichten te komen. Toch is dit een goed moment om iets kwantitatiefs te zeggen over de hellingshoeken van het rode raster. Als de rode reizigers de snelheid v

hebben, verplaatsen ze zich in een tijdsduur *t* over een afstand $x = v \cdot t$. Met de afspraak dat $w = c \cdot t$ geeft dat

$$x = v \cdot \frac{w}{c}$$

Dat kunnen we ook schrijven als

$$\frac{x}{w} = \frac{v}{c}$$

Bekijk nu de driehoek met de zijden w, w' en x in het ruimtetijddiagram figuur 2.7b. In deze driehoek zien we dat voor de tangens van de hoek α (de hoek tussen de *w*-as en de *w'*-as) geldt:

$$\tan \alpha = \frac{x}{w}$$

Hieruit volgt dat:

$$\tan \alpha = \frac{v}{c}$$

De relatieve snelheidsparameter *v/c* wordt gewoonlijk weergegeven als bèta:

$$\beta = \frac{v}{c}$$

en die notatie zullen we vaak aanhouden. Omdat β de verhouding tussen twee snelheden weergeeft, is het een puur getal onafhankelijk van de keuze van natuurkundige eenheden. Merk op dat ook de tangens van de hoek tussen de x-as en de x'-as gelijk is aan β.

Draaiende assen

Je kunt op http://www.nikhef.nl/~stanb/Minkowski.html mooi zien hoe het platdrukken van het coördinatenstelsel afhangt van de snelheid; de β die daar ter sprake komt is uitgedrukt in procenten van de lichtsnelheid!

T.11 Snelheid is relatief

In figuur 2.7a lijkt het alsof het stilstaande stelsel heel uitzonderlijk is. Teken een nieuwe figuur met een rood en een zwart stelsel, waarin de assen van het rode stelsel loodrecht op elkaar staan.

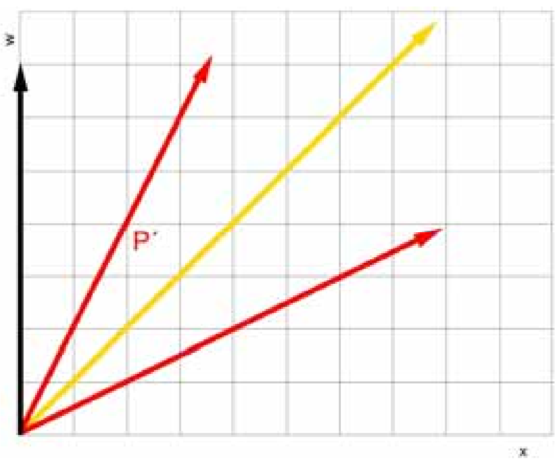
Leg uit, met behulp van de twee postulaten van Einstein, dat de grootte van de hoek tussen de rode w´-as en de zwarte w-as hierbij niet verandert.

T.12

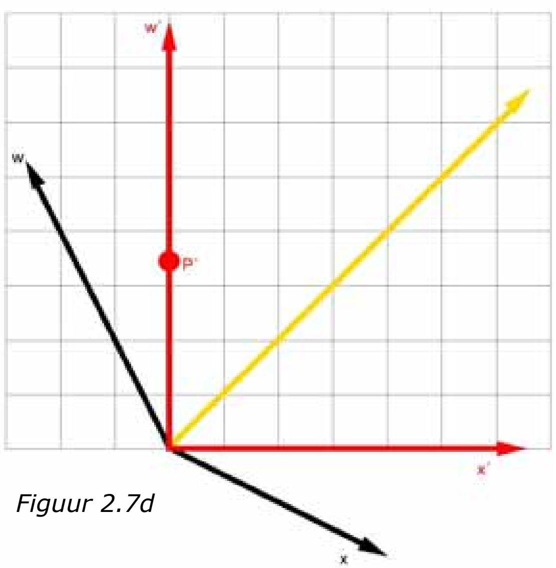
a. Geef in figuur 2.7c de zwarte coördinaten van P´ aan.

Dezelfde situatie is nogmaals getekend in figuur 2.7d; nu wordt de rode waarnemer als stilstaand opgevat.

b. Geef in figuur 2.7d de coördinaten van P´ in het zwarte frame aan.



Figuur 2.7c



Figuur 2.7d

T.13 De juiste ruimte-as

Bekijk figuur 2.8. Apollo beweegt met v=1/4 c ten opzichte van Bacchus. Het rechte assenstelsel met de w-as en x-as is van Bacchus. De w'-as van Apollo is getekend.

a. Welke van de lijnen A t/m E in de figuur 2.8 is de bijbehorende x'-as?

b. Welke lijn zou Newton aanwijzen als x'-as?

T.14 β, β, β

Welke waarde kan de relatieve snelheidsparameter β aannemen? Zo niet, waarom niet?

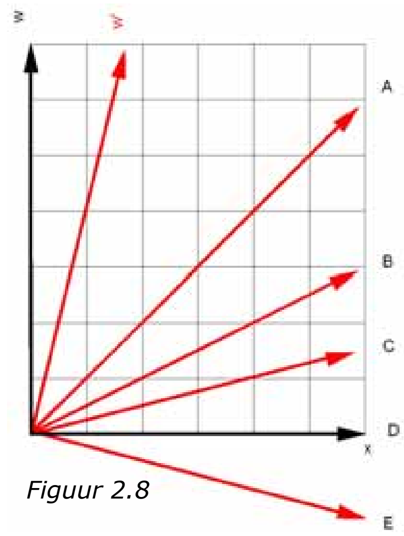
a. $\beta < 0$

b. $\beta = 0$

c. $0 < \beta < 1$

d. $\beta = 1$

e. $\beta > 1$



Figuur 2.8

Bewijs van gelijke hoeken

Je ziet in figuur 2.7a dat de nieuwe ruimte- en tijdas allebei dezelfde hoek maken met de oude assen, en met de wereldlijn van een lichtsignaal. Dat komt omdat de wereldlijn van het lichtsignaal in beide coördinatenstelsels de bissectrice is.

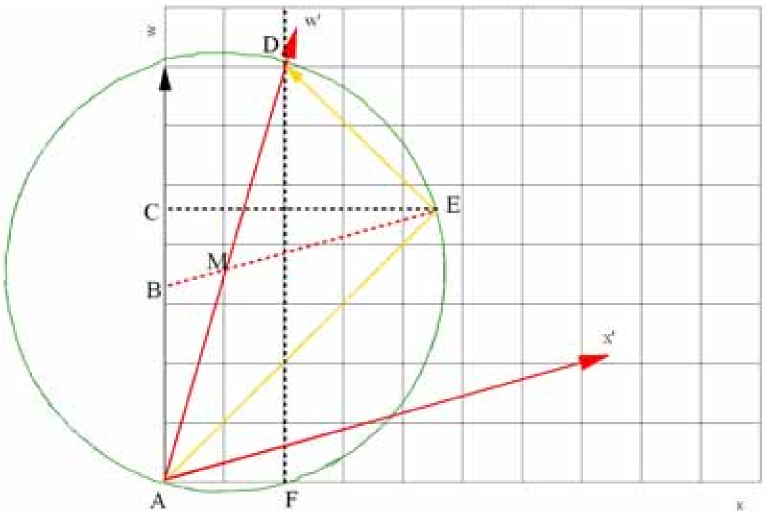
Dat de x'-as een even grote hoek met de x-as moet maken als de w'-as met de w-as, valt met een meetkundige constructie in te zien; zie fig. 2.9.

- BE, evenwijdig aan de x'-as, snijdt AD in het midden M – dat volgt uit de eis van synchronisatie.

- Rond M kun je een cirkel trekken met straal MD; deze gaat door E en F, omdat de hoeken AED en AFD rechte hoeken zijn (stelling van Thales).

- ME is daarom ook de straal van de getrokken cirkel. Driehoek AME is dus gelijkbenig.

- De hoeken CEM en MAB zijn nu gelijk omdat de wereldlijn AE gelijke hoeken van 45° maakt met horizontale en verticale lijnen. Met andere woorden: de w'-as helt even sterk naar rechts als de x'-as naar boven helt.



Figuur 2.9 De w'-as helt even ver naar rechts als de x'-as naar boven

2.7 Wat is er veranderd?

Deze nieuwe kijk op de structuur van ruimte en tijd is zo belangrijk dat we vóór we ingaan op de gevolgen ervan, even de tijd nemen om te bekijken hoe de figuren eruit zouden zien in de theorie - of misschien beter: het denkkader - van Newton. Het stilstaande stelsel ziet er hier nog net zo uit, en vanuit dit stelsel bezien moeten ook de lijnen voor de rode waarnemers en het lichtsignaal op dezelfde plekken worden getrokken. Maar bij Newton is er niets bijzonders aan de hand met het licht. Als de bewegende Arnold met zijn laserpointer een lichtflits uitzendt, vertrekt die ten opzichte van hem met de lichtsnelheid *c*, maar voor een stilstaande waarnemer verplaatst het signaal zich met een snelheid $c' = c + v$, weergegeven in fig. 2.10 door de roodgele stippellijn naar rechts. Voor Newton is de lichtsnelheid niet absoluut en daarom hangt de wereldlijn van een lichtsignaal af van wie het uitzendt. In dit geval blijken de lijnen met gelijke tijd horizontaal te lopen voor alle stelsels: volgens de theorie van Newton is niet de lichtsnelheid universeel, maar de tijd.

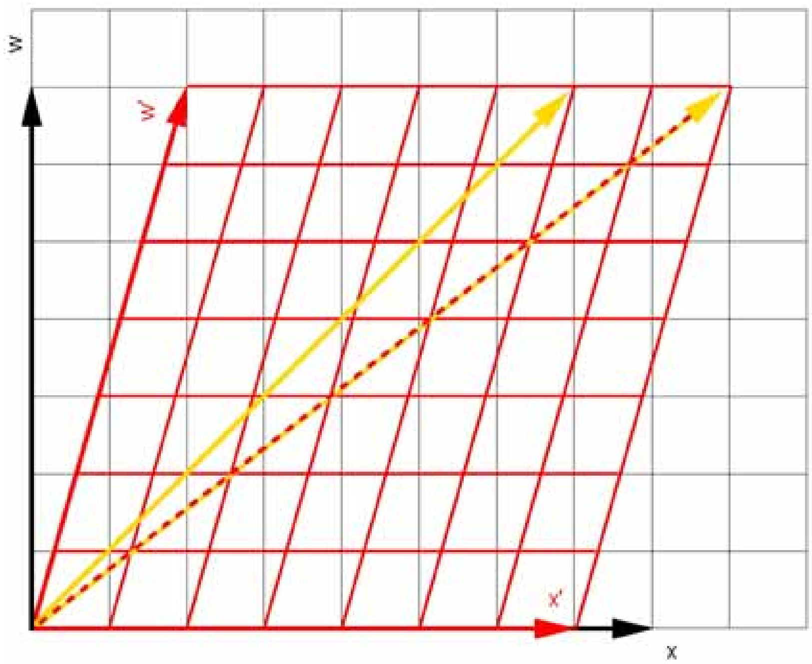
Uit deze figuur is ook af te leiden hoe de coördinaten *w* en *x* van een gebeurtenis in het stilstaande stelsel zich verhouden tot de coördinaten *w'* en *x'* van diezelfde gebeurtenis in het bewegende stelsel. We zien dat

$$w' = w$$

en

$$x' = x - v \cdot t = x - \frac{v}{c} \cdot w$$

Dit is de zogenoemde *Galileï-transformatie*, die het verband geeft tussen de coördinaten in twee stelsels die ten opzichte van elkaar bewegen met de snelheid *v*. Het wordt een transformatie genoemd, omdat er als het ware een 'vertaling' plaatsvindt tussen de grootheden met en zonder accentjes. Verderop zullen we op zoek gaan naar een dergelijk verband tussen verschillende stelsels in de theorie van Einstein.



Figuur 2.10 Volgens Newton is de lichtsnelheid niet absoluut

Begrippen

Referentiekader
Synchroniseren
Gelijktijdigheid
Tijdcoördinaat
Plaatscoördinaat
Lichtseconde
Absolute lichtsnelheid
Relatieve snelheidsparameter

Samenvatting

- Een **referentiekader** bestaat uit een groot aantal 'waarnemers' die ten opzichte van elkaar in rust zijn: een stelsel van ruimte- en tijdcoördinaten.

- Wanneer verschillende waarnemers gegevens met elkaar willen uitwisselen, moeten ze hun klokken **synchroniseren** (gelijk zetten). Dit synchroniseren gebeurt via het uitwisselen van lichtsignalen. Als de klokken van twee waarnemers gesynchroniseerd zijn, wijzen hun klokken steeds hetzelfde aan.

- De lichtsnelheid is voor alle waarnemers even groot. Dit leidt tot een draaiing van de tijd- en plaats-as over een hoek die afhangt van de grootte van de snelheid. De **draaiingshoek** α wordt gegeven door $\tan\alpha = v/c$. De grootst mogelijke draaiing bedraagt hierdoor 45°.

- **Relatieve snelheidsparameter** β – de verhouding v/c. β verschilt alleen noemenswaardig van 0 als v erg groot is.

- Lijnen die voor een waarnemer gelijke tijdstippen aangeven lopen evenwijdig aan zijn plaatsas. Het concept **gelijktijdigheid** van gebeurtenissen hangt hierdoor af van het gekozen referentiekader: of aan twee gebeurtenissen hetzelfde tijdstip wordt toegekend, hangt af van hoe snel de waarnemers bewegen. Gelijktijdigheid is een relatief begrip.

- In de opvattingen van Newton was de tijd, en daarmee gelijktijdigheid, absoluut en de lichtsnelheid afhankelijk van de snelheid van de waarnemer. Einstein gaat uit van een **absolute waarde van de lichtsnelheid**, waaruit volgt dat gelijktijdigheid een relatief begrip is.

- **Lichtseconde** – de afstand die het licht in 1 seconde in het vacuüm aflegt : $3 \cdot 10^8$ m.

Wat je moet kunnen…

- Je moet referentiekaders kunnen tekenen in het ruimtetijddiagram voor waarnemers met verschillende snelheden.
- Je moet kunnen uitleggen hoe klokken kunnen worden gesynchroniseerd met een lichtsignaal.
- Je moet kunnen laten zien dat twee tijdstippen die gelijktijdig zijn in stelsel A niet noodzakelijkerwijze gelijktijdig zijn in een stelsel B dat eenparig beweegt ten opzichte van stelsel A.

Opgaven

§2.1

19 Tijdsinterval

Tussen twee gebeurtenissen zit een tijdsinterval van 5 ls.

a. Met hoeveel (gewone) seconden komt dit overeen?

b. Met hoeveel meter komt dit overeen?

20 De ruimtelijke afstand tussen twee gebeurtenissen

Stel dat in figuur 2.1 de hokjes zo gekozen zijn dat het licht 1 seconde erover doet om één zo'n hokje te doorlopen. Dit geldt zowel horizontaal als verticaal.
Bereken de afstand tussen A en B, in km uitgedrukt.

21 Wereldlijnen tekenen

Gebruik de tekentool om een ruimtetijddiagram te maken dat hoort bij een voorwerp dat zich met de halve lichtsnelheid verplaatst.

22 Tijd langs de verticale as?

Bij natuurkunde leerde je: "hoe steiler een ruimtetijddiagram loopt, hoe groter de snelheid." Is dat in dit geval ook waar?

§2.2

23 Het gelijkzetten van klokken

Bekijk figuur 2.2.
Annie en Bert maakten de afspraak hun klokken op de volgende manier gelijk te zetten:
Annie zendt een lichtsignaal richting Bert, op het tijdstip t_A = 12 h.
Bert ontvangt het signaal en zendt het onmiddellijk terug naar A op het tijdstip t_B =12 h.

a. Wat wijst de klok van Annie aan als zij het door Bert teruggekaatste signaal ontvangt?

Annie en Bert hadden afgesproken dat Annie na ontvangst van het door Bert gezonden signaal haar klok zo zou instellen dat die hetzelfde aanwijst als de klok van Bert.

b. Hoe moet Annie haar klok dan verzetten?

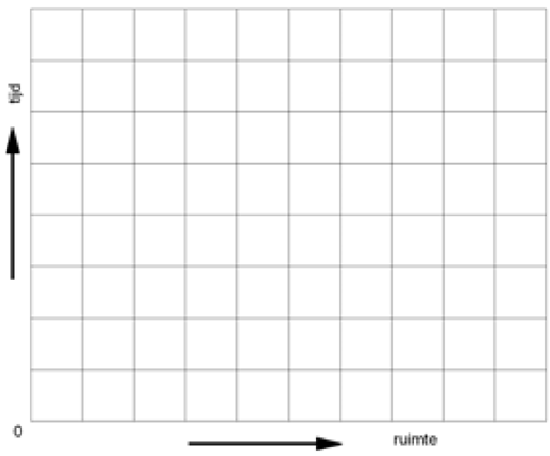
De klokken van Annie en Bert zijn gelijk gezet.
Ergens tussen hun in gaat een lamp aan. Annie noteert dat zij het eerste licht van die lamp ontvangt op t_A = 4 s; Bert ontvangt het eerste licht op t_B = 5 s. Annie en Bert laten elkaar dit weten.

c. Leg uit op welk tijdstip de lamp aan ging en op welke plaats de lamp toen was.

   Aanwijzing: je kunt dit beantwoorden als je de wereldlijnen van de lichtstralen die Annie en Bert ontvangen "terug in de tijd" tekent.

24 Afstandsbepaling met een klok

Er staan twee waarnemers op bepaalde afstanden van mij. Laat in diagram 2.11 zien hoe ik met hun medewerking, door middel van een tijdmeting hun onderlinge afstand kan bepalen.

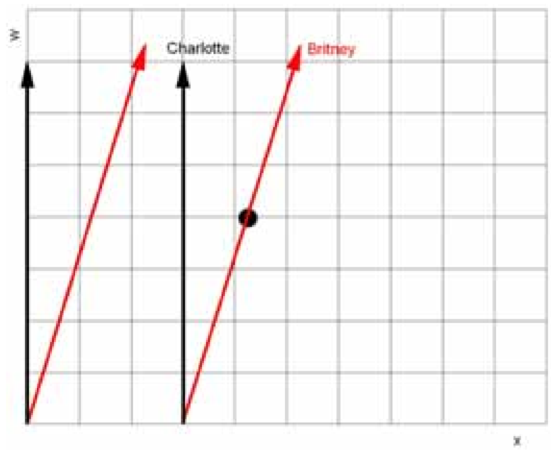


Figuur 2.11 Afstandsmeting met een klok

§2.3

25 Lichtsignalen van bewegende en stilstaande waarnemers

Charlotte zendt een lichtsignaal naar Britney, dat Britney in het ruimte-tijdpunt dat met een blauwe stip is weergegeven, ontvangt. Teken in figuur 2.12 de wereldlijn van dit lichtsignaal. Britney zendt in het ruimte-tijdpunt dat aangegeven is met de z stip twee lichtsignalen uit; een naar voren, de andere naar achteren. Teken in figuur 2.12 de wereldlijnen van deze lichtstralen.



Figuur 2.12 Wereldlijnen van lichtstralen

§2.4

26

a. De bovenste stippellijn in figuur 2.5 staat per definitie voor de lijn die dezelfde tijd markeert in de bewegende stelsels. Leg uit dat alle lijnen die hier evenwijdig aan lopen ook lijnen moeten zijn van hetzelfde tijdstip en dat de stippellijn door de oorsprong de nieuwe ruimte-as (x'-as) moet zijn.

In §2.4 staat over de verschillende assen in figuur 2.5: "gebeurtenissen die in het zwarte stelsel gelijktijdig zijn en dus op dezelfde horizontale zwarte lijn liggen, *meestal* niet gelijktijdig zullen zijn in het rode stelsel!"

b. Wanneer zijn gebeurtenissen dan wel gelijktijdig in het rode en in het zwarte stelsel?

27

a. Over welke twee snelheidsmetingen zijn twee waarnemers die ten opzichte van elkaar bewegen het altijd eens?
b. Over welke snelheidsmetingen zijn ze het oneens?

28

Deze opgave gaat over figuur 2.5.

a. Bepaal de snelheid van Arnold. Leg uit ten opzichte waarvan die snelheid wordt bepaald.
b. De gele lijnen staan loodrecht op elkaar. Is dit altijd het geval bij de wereldlijnen van lichtsignalen die zich in tegengestelde richting voortplanten? Licht toe.

Het eerste gele lijnstuk tussen A en w_1' is veel langer dan het tweede gele lijnstuk tussen w_1' en w_2'.

c. Kun je daarom zeggen dat "de afstand die het licht in het eerste stuk aflegt groter is dan in het tweede stuk"? Is die uitspraak absoluut goed of absoluut fout?
d. Mag je, op dezelfde manier, zeggen dat het licht in het eerste stuk langere tijd onderweg is dan in het tweede stuk?

Britney doet hetzelfde als Arnold: op haar tijdstip 0 zendt zij een lichtsignaal 3 naar Arnold, die na ontvangst onmiddellijk een signaal 4 terugzendt.

e. Teken deze signalen in bovenstaande figuur 2.5 erbij – bedenk eerst in welk punt Britney zich volgens Arnold op t = 0 bevindt!

29 Blikseminslag

Stel dat je op een perron staat waar een trein langs rijdt. Als het midden van de trein pal voor jou is, slaan twee bliksems tegelijk in, in de voorkant en de achterkant van de trein. De trein beweegt naar rechts.

a. Zal jij die bliksems tegelijk waarnemen?
b. Geldt dat ook voor een reiziger die zich precies midden in de trein bevindt? Om dit te achterhalen moet je de tekentool gebruiken: teken de wereldlijnen van de voorkant, het midden en de achterkant van de trein, en van de bliksemflitsen. Verklaar nu dat de treinreiziger de flitsen niet tegelijkertijd waarneemt, hoewel beide lichtsignalen een halve treinlengte met gelijke snelheid onderweg zijn.

30 * Synchronisatie van klokken met drie waarnemers

a. Verzin een procedure waarbij de klokken van drie waarnemers, die allen met dezelfde snelheid bewegen, gesynchroniseerd worden.
b. Maak een tekening van de procedure in een ruimtetijddiagram.

§2.6

31 De snelheidsparameter β

a. Leg uit dat de relatieve snelheidsparameter β geen eenheid heeft.
b. Bereken de waarde van β voor een fietser (18 km/h), een auto (100 km/h), een straaljager (3000 km/h).
c. Welke conclusie kun je op grond van je antwoorden op vraag b trekken omtrent de hellingshoeken van de nieuwe tijd- en ruimteassen van de straaljager?
d. Zie figuur 2.7a. Teken in figuur 2.13 twee stelsels waarin de assen van het stelsel dat in figuur 2.7a rood is weergegeven, loodrecht op elkaar staan. Het stelsel dat in fig. 2.7a nog met behulp van loodrechte assen wordt getekend, krijgt dan assen die niet meer loodrecht op elkaar staan.

Figuur 2.13 Van rood naar zwart

"Om een voor alle inertiële waarnemers gelijke lichtsnelheid te krijgen is het nodig dat een punt op de wereldlijn van een lichtstraal gelijke componenten langs de ruimte- en tijd-as heeft".

e. Moet dit ook in het "platgedrukte" stelsel gelden?

§2.7

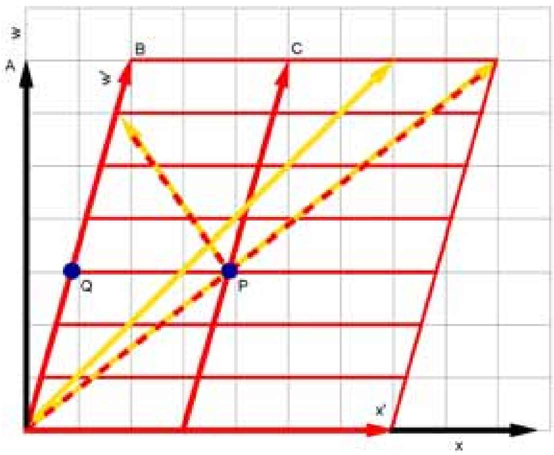
32 Absoluut of relatief?

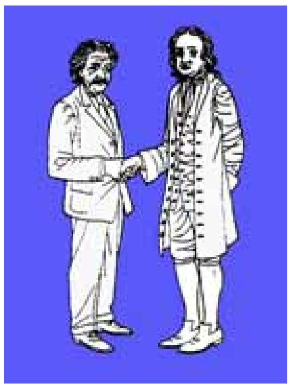
a. Wat is absoluut bij Newton, wat bij Einstein en wat is relatief? Beantwoord dit voor: verplaatsing, tijd, snelheid, lichtsnelheid.
b. Geef in figuur 2.5 de afstand tussen Arnold en Britney in het rode stelsel aan.

33 Gelijk of verschillend?

Twee waarnemers Ankie en Bernard bewegen ten opzichte van elkaar met constante snelheid.
Welke van de volgende grootheden hebben voor Ankie en Bernard dezelfde waarde:

a. de lichtsnelheid
b. de snelheid van een elektron
c. het getal van Avogadro
d. de tijd tussen twee gebeurtenissen
e. de kinetische energie van een proton?





Figuur 2.14 Gelijktijdigheid volgens Newton

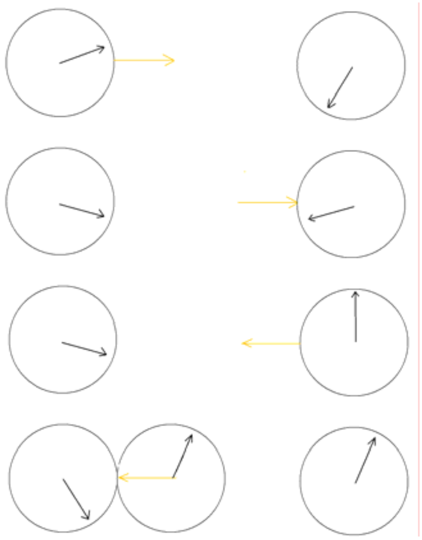
34 Newton versus Einstein

In figuur 2.14 is sprake van drie waarnemers. A, in het zwarte stelsel, en B en C die met gelijke snelheid ten opzichte van A bewegen, op constante afstand van elkaar.
De bedoeling is dat B en C hun klokken gaan gelijk zetten, door uitwisseling van lichtsignalen. Zij werken vanuit het idee dat de tijd universeel is (Newton).
Volgens Newton meet A voor de snelheid van het licht dat B uitzendt u = c + v, en voor het door C teruggekaatste licht u' = -c + v.

a. Ben je het eens met de bewering dat P en Q zowel in het rode als in het zwarte stelsel gelijktijdig zijn?
b. Wat valt je op aan de gelijktijdigheidslijnen in beide stelsels?

Antwoorden tekstvragen

T.7

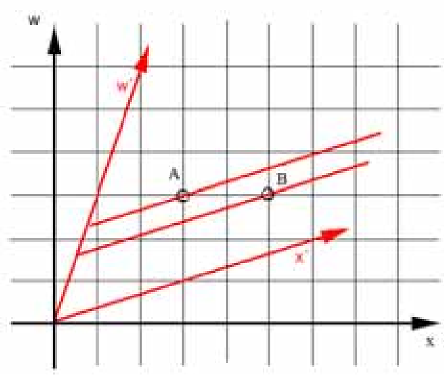


Links is de klok van Apollo, rechts die van Bacchus.
Zij hebben de volgende afspraak gemaakt om hun klokken te kunnen gelijkzetten: als B een signaal van A ontvangt, zet B zijn klok op 0.
A zendt op een willekeurig tijdstip (in de tekening t=13) een lichtsignaal naar B. B´s klok wijst op dat moment 35 aan.
Als B het signaal ontvangt wijzen de klokken 18 en 40 aan; het signaal was 5 tijdseenheden onderweg, maar dat weten A en B nog niet.
B zendt onmiddellijk een signaal naar A terug, *en zet zijn klok op 0.*
A ontvangt het teruggezonden signaal op t = 23. Hij berekent dat het signaal 10 tijdseenheden onderweg is geweest (heen en terug) en dat B´s klok dus 5 aanwijst, op het moment dat A het signaal ontvangt. A zet zijn klok op 5: de klokken lopen vanaf nu gelijk.

T.8
Nee, het licht heeft tijd nodig om Sander te bereiken. Omdat de lichtsnelheid 0,3 miljoen km/s is, heeft het voor die 78 miljoen km 78/0,3 = 260 seconden nodig.
De klok op Mars, zoals je die op t = 23.00.00 ziet op aarde, geeft
22 h. 55´.40´´ aan.

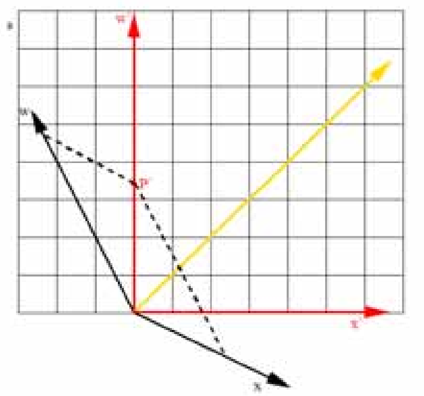
T.9
De beschreven synchronisatiemethode heeft nodig dat de signalen heen en terug dezelfde snelheid hebben. In situatie A is dat mogelijk (als er geen wind roet in het eten gooit), in situatie B kan dit niet.

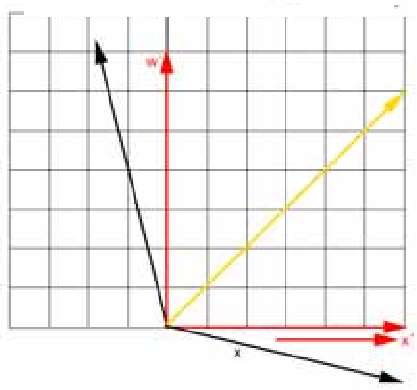
T.10



De rode lijnen van gelijktijdigheid lopen niet horizontaal. In het rode stelsel gebeurt B vóór A.
T.11
T.12
a.

b.





T.13
a. Lijn C.
b. lijn D.

T.14
β kan de waarden van a t/m d aannemen. β > 1 kan niet, omdat v niet groter dan c kan zijn (zie hoofdstuk 3).

3 Oorzaak en gevolg

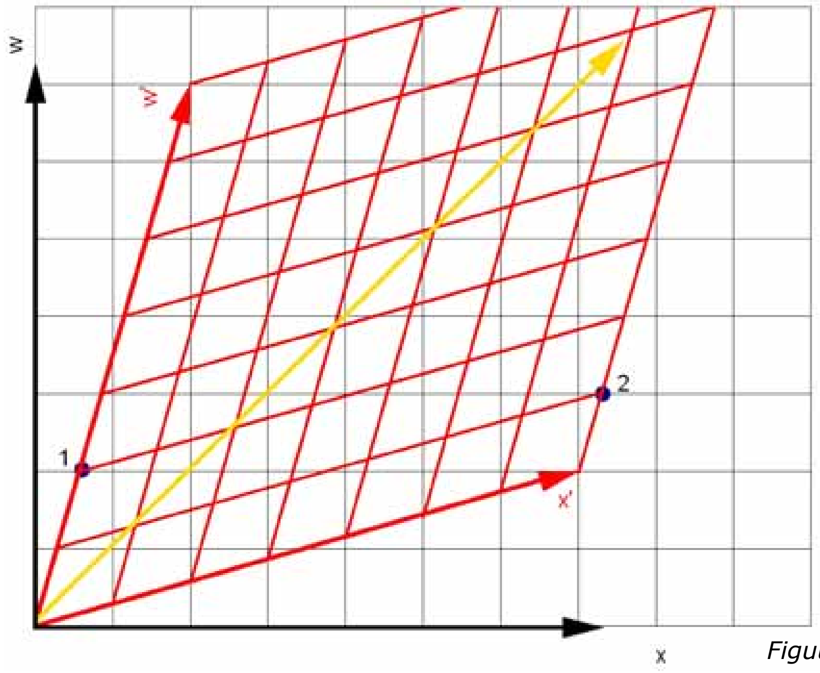
Ik denk nooit aan de toekomst, die komt snel genoeg.

Kun je een lichtstraal inhalen?

3.1 Causaliteit in de problemen

Stel, er zijn twee gebeurtenissen, die we aangeven met 1 en 2 in figuur 3.1. Bij 1 stormt Pistolen Paultje met een revolver de huiskamer binnen, en bij 2 wordt tante Sidonia doodgeschoten. Vanuit het zwarte kader is het logisch om te concluderen dat de moord op Sidonia is gepleegd door Paultje, omdat het diagram duidelijk laat zien dat 1 na twee tijdseenheden gebeurt en 2 na drie. Maar beschouw het drama nu eens vanuit het rode kader. De rode waarnemers beweren dat eerst (na één tijdseenheid) tante Sidonia wordt neergeschoten, en pas daarna (een eenheid later) dat Paultje de kamer binnenstormt. De gebeurtenissen hebben voor hen een andere volgorde.
Help! Het lijkt erop dat we op een fatale zwakte van de theorie zijn gestuit, want hoe kan de volgorde van gebeurtenissen nou relatief zijn? Heeft Einstein in zijn enthousiasme met zijn tweede postulaat het heilige principe van oorzaak en gevolg overboord gegooid? We kunnen niet zonder causaliteit: die vormt de basis van het hele natuurkundige wereldbeeld. Met gevolgen die voorafgaan aan hun oorzaak kunnen we niets beginnen. Niet vanwege een wetenschappelijk soort bekrompenheid, maar omdat onze wereld elke samenhang zou verliezen. Als we eerst zouden zien dat iemand wordt neergeschoten en pas daarna het pistoolschot gelost zou worden, is het in principe mogelijk om de fatale daad te voorkomen - ook al is het slachtoffer al dood. Dat is absurd.

Om te begrijpen hoe dit precies zit in de speciale relativiteitstheorie, die ons lijkt te beroven van de ons zo dierbare causaliteit, gaan we eerst kijken naar de eigenschappen van snelheden in het conceptuele raamwerk van Einstein's theorie.



Figuur 3.1 Tante Sidonia †

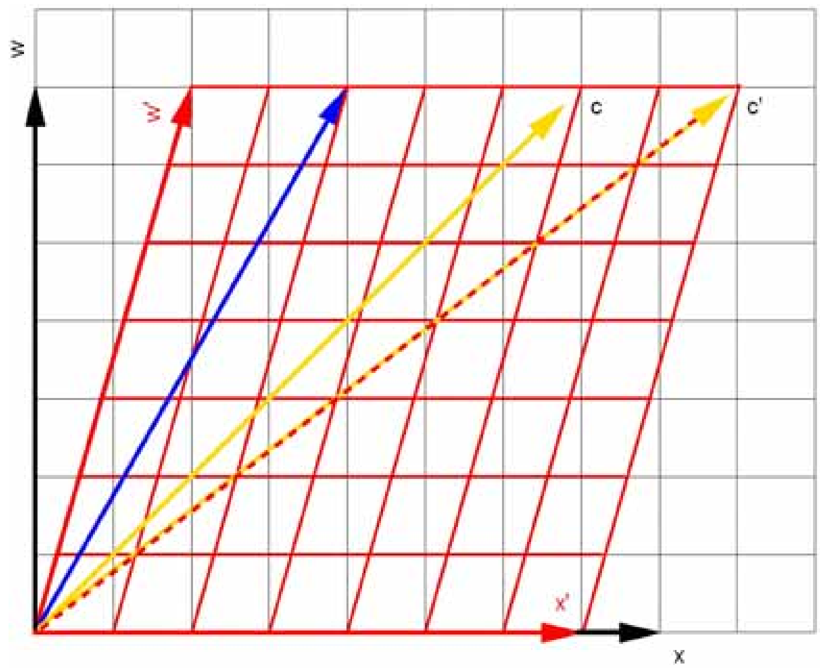
T.15 Causaliteit

Omschrijf in je eigen woorden het begrip 'causaliteit'.

3.2 Snelheden optellen volgens Newton

Hoe werkte het optellen van snelheden gezien vanuit verschillende waarnemers bij Newton? Dat bekijken we aan de hand van het volgende gedachte-experiment. De rode pijl in figuur 3.2 stelt een super-TGV voor, een hogesnelheidstrein die een snelheid heeft van 2/7 *c*, twee zevende van de lichtsnelheid. Door die trein rent een meisje met blauwe ogen met nogmaals 2/7 *c* in de rijrichting (dat is dus twee zevende van de snelheid die correspondeert met de geelrood gestippelde pijl, gezien vanuit het rode kader; zie figuur 3.2). Dat levert de blauwe pijl op, en inderdaad stelt die pijl in het zwarte stelsel een snelheid voor van 2/7 *c* + 2/7 *c* = 4/7 *c* (met betrekking tot de gele pijl, die staat voor de lichtsnelheid in het zwarte stelsel). En dat klopt precies met onze naïeve, newtoniaanse verwachtingen.

Nu gaan we een soortgelijke situatie beschrijven, maar dan vanuit Einstein's perspectief.



Figuur 3.2 Is de lichtsnelheid een constante?

T.16 Wereldlijnen

Geef de betekenis van iedere pijl in figuur 3.2.

3.3 Snelheden optellen volgens Einstein

We kijken nogmaals naar een vergelijkbaar experiment, alleen heeft de trein nu een snelheid van v = ½ *c* en rent het meisje met de blauwe ogen ook met u' = ½ *c* door de trein naar voren. Het is niet moeilijk te zien waar de rode wereldlijn voor de trein in figuur 3.3 moet lopen: omdat die half zo snel gaat als het licht, moeten de onderste twee liggende zwarte pijlen even lang zijn. Nu weten we dat vanwege het tweede postulaat de lichtsnelheid hetzelfde is in de rode trein als voor ons (de waarnemers in het zwart), zodat er maar één gele pijl is die het lichtsignaal voorstelt in beide stelsels. Maar waar moet de blauwe wereldlijn van het meisje komen?

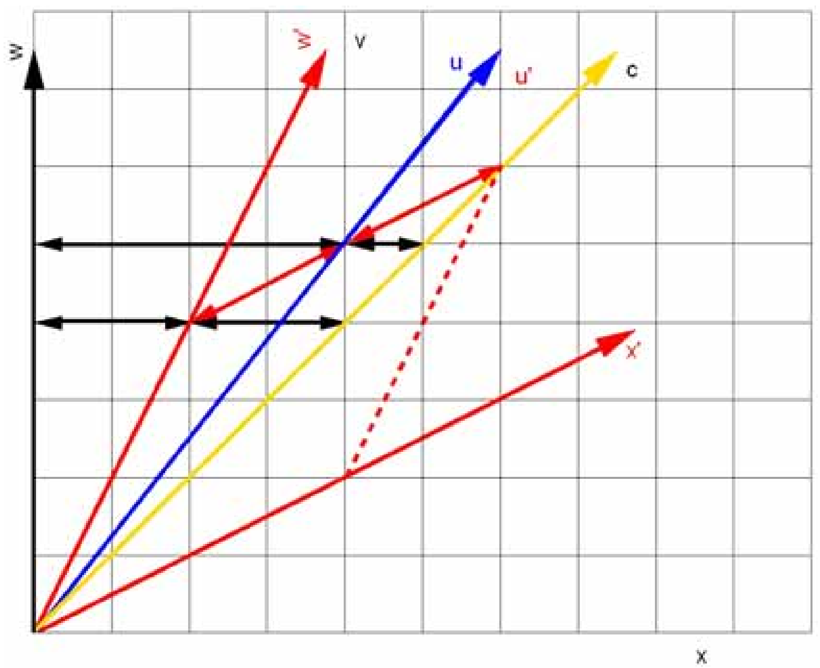
Als iets in het rode stelsel beweegt met de helft van de lichtsnelheid, dan moet dat voorwerp in dezelfde tijd precies half zo ver komen als een lichtsignaal in dat stelsel. Zoals je weet worden de afstanden in de trein gemeten in de rode x'-richting, en niet langs de horizontale zwarte lijnen. Daarom loopt de blauwe pijl precies zo dat de twee rode tweepuntige

pijlen even lang zijn, wat betekent dat het meisje met de blauwe ogen in de x-richting inderdaad telkens de helft van de afstand aflegt die een lichtflits in diezelfde tijd aflegt. De vraag is nu met welke snelheid de blauwe pijl correspondeert in het zwarte kader, dus voor de stilstaande waarnemers. Figuur 3.3 geeft ons meteen een kwalitatief maar overduidelijk antwoord: de snelheid van de blauwe pijl is niet ½ *c* + ½ *c* = *c*, zoals we in al onze naïviteit hadden verwacht, maar is duidelijk kleiner dan de lichtsnelheid. We kunnen uit onze tekening zelfs moeiteloos begrijpen dat hoe hard het meisje in de trein ook holt, ze voor de zwarte waarnemers nooit de snelheid *c* zal bereiken zolang zij langzamer rent dan *c* ten opzichte van de trein! En als ze zich wel met de lichtsnelheid zou voortbewegen, dan zou ze die snelheid ook meteen hebben voor alle waarnemers, geheel in overeenstemming met het tweede postulaat van Einstein.
We kunnen nog een stap verder gaan en ons afvragen wat er zal gebeuren als het meisje een groene bal voor zich uit gooit met een snelheid kleiner dan *c*. Precies dezelfde redenering als hiervoor levert dan wederom de conclusie op dat de snelheid van de bal voor de zwarte waarnemers altijd minder zal zijn dan *c*.
Deze analyse leidt tot de verrassende conclusie dat je zoveel snelheden bij elkaar kunt optellen als je maar wilt, maar dat als elk van die snelheden kleiner is dan *c*, het eindresultaat ook altijd kleiner is dan *c*. Met andere woorden: volgens de relativiteitstheorie is er een maximumsnelheid voor bewegende voorwerpen, en dat is de lichtsnelheid. Deze snelheid is absoluut in die zin dat ze hetzelfde is voor alle waarnemers. Dit is vrij eenvoudig aan te tonen, zoals we gezien hebben, maar het blijft een van de verrassendste en meest tegenintuïtieve gevolgen van Einstein's postulaten. Als je je een deeltje voorstelt dat voortraast met een snelheid die net iets kleiner is dan de lichtsnelheid, zou je toch verwachten dat je het met een extra duwtje een snelheid zou kunnen geven die groter is dan de lichtsnelheid ... Maar nee, dat is onmogelijk; we zullen op deze kwestie terugkomen in hoofdstuk 6.

Terug naar het meisje met de blauwe ogen in de trein. De vraag was wat haar snelheid in het zwarte stelsel is. Daar kunnen we achter komen door te kijken naar de horizontale zwarte pijlen die aan weerszijden van de blauwe wereldlijn liggen. We zien dan dat haar snelheid 4/5 *c* is. De relativistische wet die de optelling van snelheden vastlegt, luidt voor dit geval dus:

$$\frac{1}{2}c <+> \frac{1}{2}c = \frac{4}{5}\ \mathrm{c}$$

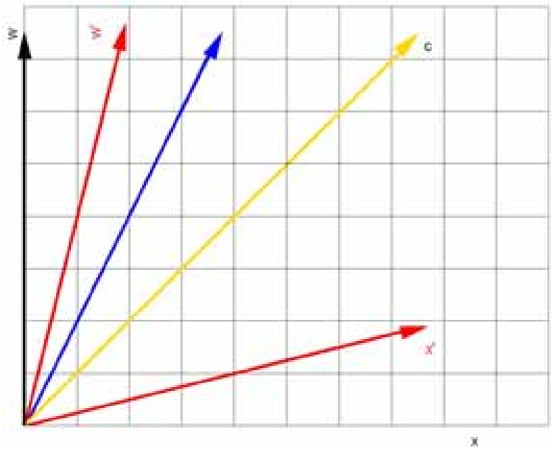
Dit resultaat onderstreept het feit dat deze natuurkundige manier van optellen die we hier aangeven met <+>, niet de gewone rekenkundige optelling is, die we aangeven met +.



Figuur 3.3 Optelling van snelheden volgens Einstein

T.17 Snelheid is relatief

Bepaal met behulp van figuur 3.4 de snelheid van trein en meisje in beide stelsels (je geeft dus 4 getallen) uitgedrukt in c.



Figuur 3.4

3.4 Een magistrale formule

In deze paragraaf gaan we een exact kwantitatief antwoord geven op de vraag: 'Als een rode trein langs een perron rijdt met snelheid *v*, en in de trein holt een meisje met blauwe ogen in de rijrichting met snelheid *u'*, wat is dan de snelheid *u* van het meisje ten opzichte van het perron?' Om het antwoord te vinden maken we gebruik van de eigenschappen van gelijkvormige driehoeken in het platte vlak. Zie fig. 3.5.

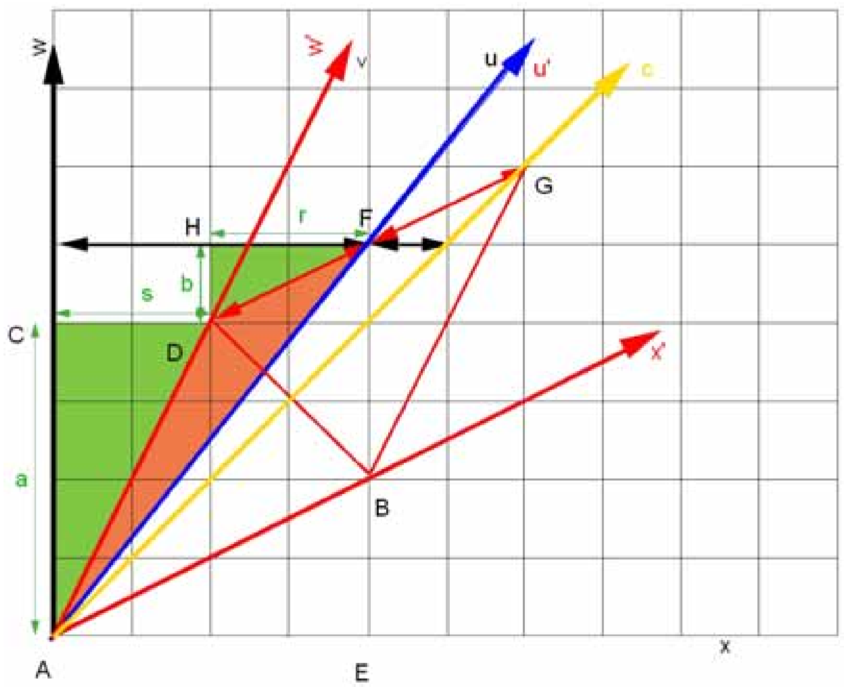
We leiden de gewenste uitdrukking voor *u* in termen van *u'* en *v*, af in zeven stappen, waarbij we gebruik maken van het feit dat de twee groene driehoeken in figuur 3.5 gelijkvormig zijn: ze verschillen in grootte, maar hebben dezelfde vorm. Er is dan een vaste verhouding tussen de corresponderende zijden van beide driehoeken. Ben je klaar voor een klein potje rekenen?

1. In het zwarte stelsel wordt een lichtflits naar rechts uitgezonden. In 6 zwarte tijdseenheden (dit aantal is zo gekozen dat figuur 3.5 er prettig uit komt te zien) is de flits van het ruimtetijdpunt A naar het ruimtetijdpunt G gegaan. Hoe ver is de flits in het rode stelsel gekomen? In ruimtetijdpunten uitgedrukt: ook van A naar G. In tijdsduur uitgedrukt: van A naar D en in ruimte uitgedrukt: van A naar B.

2. De hardloopster loopt met snelheid ½ *c* ten opzichte van de trein. Zij komt dus in de tijdsduur AD half zo ver (gemeten ten opzichte van de trein) als het licht.
   Alle tijdstippen die dezelfde tijd aangeven in de trein als het tijdstip D liggen op de lijn door DG. De halve afstand AB is gelijk aan DF. Daarom gaat de wereldlijn van de hardloopster door A en F: het is de blauwe lijn.

3. De twee rechthoekige groene driehoeken zijn gelijkvormig, omdat je de ene over kunt voeren in de andere door er twee eenvoudige bewerkingen op toe te passen. Eerst spiegel je de driehoek ten opzichte van een lijn die loodrecht op de gele lijn staat en door het raakpunt van de drie driehoeken loopt, en vervolgens herschaal je hem. Of anders: DF is evenwijdig aan AB en maakt daarom dezelfde hoek met de zwarte x-as als AB: $\angle$DFH=$\angle$EAB. De rode assen w' en x' maken gelijke hoeken met de zwarte assen w en x, dus $\angle$DFH = $\angle$CAD. De groene driehoeken hebben ook nog beide een rechte hoek: ze zijn gelijkvormig.

4. De verhouding tussen de twee loodrechte zijden van de grote driehoek, *s/a*, is de afstand $s = vt$ die de rode trein aflegt in een bepaalde tijd, gedeeld door de afstand $a = ct$ die het gele lichtsignaal aflegt in diezelfde tijd. Deze verhouding is dus gelijk aan *v/c* ofwel β en hangt niet af van het gekozen tijdstip.
5. Omdat de verhouding tussen de corresponderende zijden van beide groene driehoeken telkens hetzelfde is, geldt dat *r/a* = *b/s*. Om deze verhouding te bepalen vergelijken we hun langste zijden, die ook deel uitmaken van de rode driehoek. Vanuit het rode stelsel bezien is de verhouding tussen de kortste (DF) en de langste (AD) van deze twee rode zijden per definitie gelijk aan *u'/c*. Dit volgt uit precies hetzelfde argument als we bij stap 2 hebben gebruikt, maar dan voor het rode stelsel. AD staat voor de afstand die het licht heeft afgelegd in het rode kader en is even lang als DG. DF is de afstand die het meisje in dezelfde tijd heeft afgelegd in de trein.
   We krijgen:
   $$\frac{DF}{AD} = \frac{u' \cdot t}{c \cdot t} = \frac{u'}{c}$$
   Dus geldt dat *b/s* = *u'/c* en dus ook *r/a* = *u'/c.* Als we nu beide kanten van deze vergelijkingen vermenigvuldigen met respectievelijk *s* en *a*, vinden we:
   $$b = \frac{u' \cdot s}{c} \quad \text{en} \quad r = \frac{u' \cdot a}{c}$$
6. De snelheid *u* die we willen bepalen voldoet aan een eenvoudige relatie in het zwarte kader: *s+r* is de afstand die het meisje heeft afgelegd in de tijdsduur (*a+b*)/*c*. De deling door *c* is nodig, omdat we de verticale as een ruimte-as is die we gedefinieerd hebben als *c · t*. Dus geldt dat
   $$\frac{u}{c} = \frac{s+r}{a+b}$$
7. We zijn er bijna! In de vergelijking uit stap 6 vullen we de uitdrukkingen in voor *b* en *r* uit stap 5. Verder is:
   $$a = c \cdot t \quad \text{en} \quad s = v \cdot t$$
   Dit gebruiken we in het resultaat van stap 6 om de beroemde formule te vinden die Einstein als eerste heeft afgeleid.



Figuur 3.5 Afleiding van de optelformule

Optelformule voor snelheden

Als een voorwerp A (hollend meisje in de trein) beweegt met een snelheid u' ten opzichte van voorwerp B (de trein) en B beweegt met een snelheid v (in dezelfde richting) ten opzichte van voorwerp C (de rails), dan is de snelheid van A ten opzichte van C gegeven door de magistrale formule van Einstein voor het optellen van snelheden:

$$u = \frac{u'+v}{1+\frac{u'\cdot v}{c^2}} \quad \text{of} \quad u = (u'+v)\cdot\frac{1}{1+\frac{u'\cdot v}{c^2}}$$

Symbolen: snelheden zonder accent worden gemeten door de stilstaande waarnemer, met accent door de bewegende. v is de snelheid van de bewegende waarnemer . Het voorwerp dat beweegt t.o.v. de bewegende waarnemer heeft voor hem snelheid u', voor de stilstaande waarnemer snelheid u. u, u', v en c hebben dezelfde eenheid (bv. ms^{-1}).

Na al dit meetkundige geploeter is het leuk om even stil te staan bij het resultaat om te kijken of het klopt met de eigenschappen die we in de vorige paragraaf al hadden afgeleid.

- Als we de waarden uit het eerdere voorbeeld invullen, $v = ½\,c$ en $u' = ½\,c$, zien we dat figuur 3.5 ons niet voor de gek heeft gehouden. We krijgen inderdaad $u = 4/5\,c$, dezelfde uitkomst die we eerder met het blote oog hadden afgelezen.

- Als u' en v allebei veel kleiner zijn dan de lichtsnelheid, zodat u'/c en v/c heel kleine waarden aannemen, verwachten we natuurlijk het vertrouwde newtoniaanse resultaat. In dat geval zal de term $u'v/c^2$ in de noemer zo piepklein zijn dat deze verwaarloosbaar is ten opzichte van de 1 ernaast. Daarom mogen we die term weglaten, zodat we de bekende formule terugkrijgen die we bij Newton zouden verwachten: $u = u' + v$.

- Als we voor u' de waarde c kiezen, dan volgt uit de formule dat $u = c$, onafhankelijk van de waarde van v. Dit is niets anders dan de uitspraak dat de lichtsnelheid hetzelfde is voor alle waarnemers. Zelfs als je tweemaal c bij elkaar optelt, kom je uit op $u = c$.

Waarom kun je bij Newton snelheden gewoon bij elkaar optellen, terwijl daar bij Einstein zo'n ingewikkelde formule voor nodig is? Dat komt eigenlijk doordat een snelheid per definitie een ruimtelijke afstand (Δx) is, gedeeld door de verstreken tijd (Δt). Bij Newton was de tijd universeel, zodat Δt niet verandert en alleen Δx anders wordt als je overgaat van het ene naar het andere stelsel. In de theorie van Einstein daarentegen veranderen x en t allebei op verschillende wijze, waardoor de formule voor de optelling veel ingewikkelder en niet-lineair wordt.

T.18 Welke snelheid?

Een buitenaards ruimteschip beweegt met een snelheid van 0,4 c richting de aarde. Ze vuren een raket op de aarde af met een snelheid van 0,8 c.

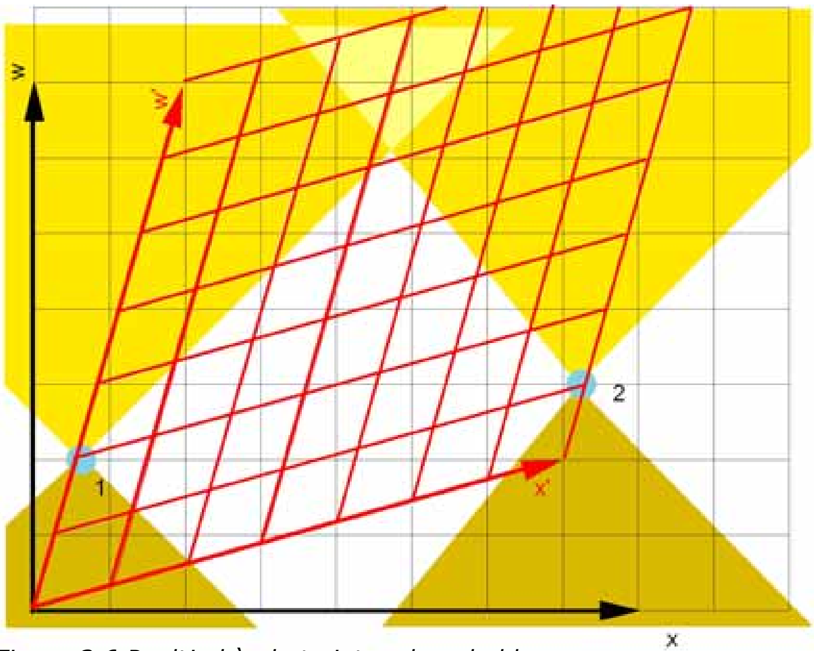
Bereken met Einstein's formule de snelheid van de raket ten opzichte van de aarde.

3.5 Causaliteit gered

Met het sublieme gegeven dat de lichtsnelheid de absolute maximumsnelheid is, kunnen we terugkeren naar onze tegenstrijdige en onopgeloste moordzaak van paragraaf 3.1. Omdat niets sneller kan gaan dan licht, kunnen de gevolgen van een bepaalde gebeurtenis zich ook nooit sneller dan het licht door de ruimtetijd verspreiden. In figuur 3.6 wordt duidelijk wat dit betekent voor onze vereenvoudigde wereld met één ruimte- en één tijddimensie. Gebeurtenis 1 kan alleen gevolgen hebben voor gebeurtenissen erna die vallen binnen de gele wig, die wordt begrensd door de wereldlijnen van lichtsignalen in de positieve en negatieve x-richting (die hetzelfde zijn voor alle waarnemers). De effecten van de gebeurtenis zullen zich immers altijd verspreiden met een snelheid kleiner of gelijk aan c. Omdat we in werkelijkheid te maken hebben met drie ruimtelijke dimensies, moet je je de wig eigenlijk voorstellen als de tweedimensionale versie van een kegel. Daarom wordt het gele gebied gewoonlijk de **voorwaartse lichtkegel** genoemd.
Als we daarentegen willen weten welke gebeurtenissen er allemaal invloed zouden kunnen hebben op een bepaalde gebeurtenis, bijvoorbeeld gebeurtenis 2, dan moeten deze zich om dezelfde reden bevinden binnen de bijbehorende donkergele **achterwaartse lichtkegel**. Merk op dat de voor- dan wel achterwaartse lichtkegel van een gebeurtenis hetzelfde zijn in alle inertiaalstelsels. De kegels zijn absoluut: ze horen bij de gebeurtenis, niet bij een bepaalde waarnemer. Wel is het zo dat een punt P, dat zich bijvoorbeeld buiten de lichtkegels van 1 bevindt, voor een waarnemer die door punt 1 gaat, in het verleden, het heden of de toekomst kan liggen, afhankelijk van zijn snelheid. Maar deze onbepaaldheid van de tijdsvolgorde doet er niet toe, omdat er nooit een signaal van punt 1 naar P kan gaan of andersom. Tussen de gebeurtenissen bij punt 1 en punt P kan geen oorzakelijk verband bestaan.

Als we nu teruggaan naar onze verwarring over oorzaak en gevolg in paragraaf 3.1, zien we dat de punten 1 en 2 zich buiten elkaars lichtkegels bevinden. Daarmee is de causaliteit gered. Het is onmogelijk dat Pistolen Paultje tante Sidonia heeft omgelegd - een hele geruststelling.
Gebeurtenissen kunnen alleen in een causaal verband met elkaar staan, als zij binnen elkaars lichtkegel vallen. In die gevallen is de tijdsvolgorde van gebeurtenissen onafhankelijk van de snelheid van de waarnemer.

Geen voertuig of signaal kan sneller dan het licht gaan. Dit heeft als consequentie dat de openingshoek van de kegel een maximum heeft. En met de bekende vervanging van de tijd-as door een ct-as waarbij alle hokjes zijdes van 1 lichtseconde hebben, is die tophoek 90°.



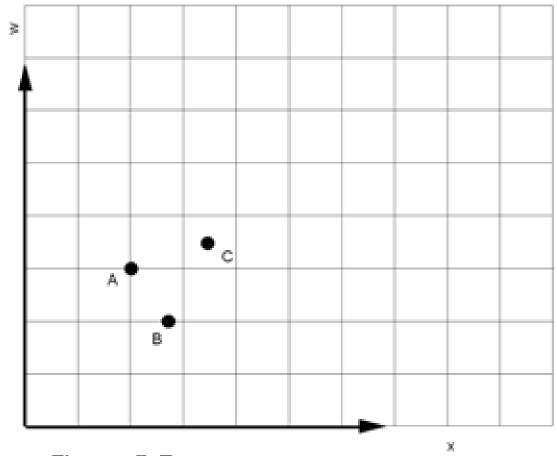
Figuur 3.6 Paultje kàn het niet gedaan hebben

T.19 Invloed van gebeurtenissen

a. Laat zien welke van de gebeurtenissen A, B en C uit figuur 3.7 invloed op elkaar kunnen hebben gehad en welke niet.

b. Teken een gebeurtenis die veroorzaakt wordt door 2 lichtstralen vanuit A en C.

c. Kan je een gebeurtenis tekenen die wel door A kan worden beïnvloed, maar niet door B?



Figuur 3.7

T.20 Causaal verband?

Een meteoriet slaat in op de maan (gebeurtenis A). Een telescoop die op de maan gericht was, gaat exact 0,47 s later stuk (gemeten in een stelsel dat aan de aarde is bevestigd). Dit is gebeurtenis B. Kan een causaal verband bestaan tussen deze twee gebeurtenissen?

Tip: de afstand aarde-maan is 384.000 km.

Begrippen

Causaliteit
Voorwaartse lichtkegel
Achterwaartse lichtkegel
Optelwet voor snelheden

Samenvatting

- Als gelijktijdigheid afhangt van de bewegingstoestand van de waarnemer, bestaat in theorie het gevaar dat ook de tijdsvolgorde van twee gebeurtenissen relatief wordt. Dit zou leiden tot het verlies van **causaliteit**: de oorzaak moet altijd aan het gevolg vooraf gaan.

- Causaliteit wordt gered doordat het gevolg altijd binnen de **voorwaartse lichtkegel** van de oorzaak moet liggen. En de lichtkegel van een gebeurtenis breidt zich met de licht-snelheid in ruimtetijd uit- de maximale snelheid waarmee een signaal (licht, radiogolf of afgeschoten kogel) zich kan uitbreiden.

- Lichtkegels liggen onder en boven een ruimtepunt P. De onderste, de **achterwaartse lichtkegel**, geeft aan welke gebeurtenissen P kunnen beïnvloeden; de bovenste, de voorwaartse lichtkegel, geeft aan welke gebeurtenissen door P beïnvloed kunnen worden.

- Het **optellen van snelheden** verloopt bij Einstein anders dan bij Newton. Bij Newton geldt voor de somsnelheid u van twee snelheden u' en v: $u = u' + v$
  Bij Einstein komt hier een correctieterm bij:
  $$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

- Deze term zorgt ervoor dat de somsnelheid de lichtsnelheid nooit overschrijdt. Bovendien volgt eruit dat aan de eis dat de lichtsnelheid voor alle waarnemers even groot is, wordt voldaan.

Wat je moet kunnen...

- Je moet in een ruimtetijddiagram snelheden kunnen aflezen in verschillende stelsels.
- Je moet snelheden kunnen optellen volgens de formule van Einstein.
- Je moet kunnen aangeven welke gebeurtenissen invloed op elkaar kunnen uitoefenen en uitleggen waarom dat zo is.

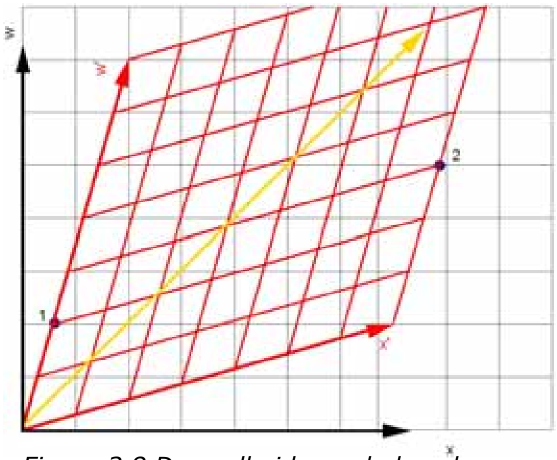
Opgaven

§3.1

35 Causaliteit

Het lijkt er op dat in figuur 3.1 causaliteit gered kan worden door het punt 2 twee tijdseenheden omhoog te schuiven: nu komt ook in het rode stelsel gebeurtenis 2 na gebeurtenis 1. Zo lijkt alles in orde, zowel in het zwarte als in het gekleurde stelsel.

De hokjes zijn weer zo ingedeeld dat zowel horizontaal als verticaal de lengte van een hokje met 1 lichtseconde overeenkomt. Stel dat in figuur 3.8 in het ruimtetijdpunt 1 het schot wordt gelost, en dat in punt 2 tante Sidonia neervalt.
Bepaal in het zwarte stelsel de snelheid van de kogel, als die van punt 1 naar punt 2 gaat.



Figuur 3.8 De snelheid van de kogel

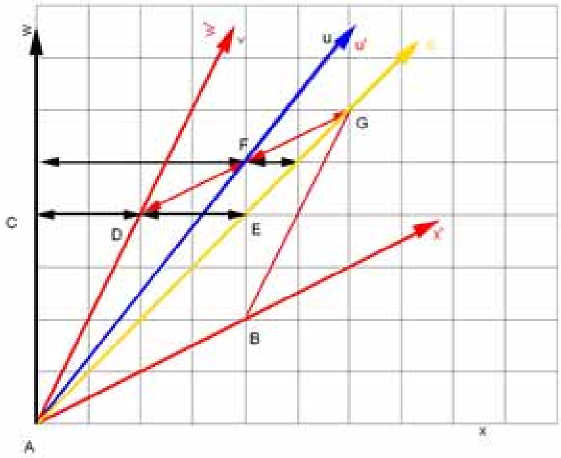
§3.2

36 Het tweede postulaat

In figuur 3.2 wordt iets weergegeven dat in tegenspraak is met het tweede postulaat van Einstein.

a. Hoe luidt dat tweede postulaat?

b. Geef aan wat er in de figuur daarmee in strijd is.



Figuur 3.9

§3.3

37 Wat betekenen de lijnen in de figuur 3.5?

In bovenstaande figuur 3.9, een kopie van de figuur 3.5, heeft een aantal ruimtetijdpunten een naam (A t/m G) gekregen. Hieronder volgt een aantal vragen, in de trant van: "wat is de betekenis van de lengte van het lijnstuk CD in het zwarte stelsel?", met als bedoeld antwoord: "het is de verplaatsing van de trein in het zwarte stelsel, gedurende 4 zwarte tijdseenheden."

a. Wat is de betekenis van de lengte van CE in het zwarte stelsel?
b. Wat is de betekenis van de lengte van DE in het zwarte stelsel?
c. Wat is de betekenis van de lengte van AD in het rode stelsel?
d. Wat is de betekenis van de verhouding CD/AC?
e. Noem een lijnstuk in het rode stelsel dat dezelfde betekenis als CE in het zwarte stelsel heeft.
f. Is er een lijnstuk, en zo ja welk, aan te wijzen dat in het rode stelsel dezelfde betekenis heeft als CD in het zwarte stelsel?
g. Welk lijnstuk in het zwarte stelsel heeft dezelfde betekenis als AG in het rode stelsel?

De blauwe lijn, die de beweging van de hardloopster in het zwarte stelsel aangeeft, verdeelt lijnstuk DG in twee gelijke delen DF en FG.

h. Wat is de betekenis van de lengte DG in het rode stelsel?
i. Waarom geldt: DF = FG?

De hardloopster besluit van looprichting om te draaien (nieuwe snelheid -1/2 c t.o.v. de trein). In het ruimte-tijdpunt F keert zij van bewegingsrichting om.

j. Teken haar wereldlijn. Wat merk je op?

38 Do it yourself

De bedoeling is dat je een figuur als figuur 3.5 met de tekentool zelfstandig tekent, aan de hand van de volgende aanwijzingen.

a. Teken zwarte assen.
b. Een trein heeft snelheid 0,8 c ten opzichte van het zwarte frame. Teken de wereldlijn van de trein. Maak het coördinatenstelsel van de trein af met een x'-as.
c. In de trein rent een jongen met snelheid 0,5 c, gemeten in het stelsel van de trein, naar voren.

   Kies een willekeurig punt op de wereldlijn van de trein. Geef met een lijn alle punten, die in het stelsel van de trein dezelfde plaatscoördinaat hebben als dit punt, aan.
d. Pas op het oog 0,5 maal de afstand die het licht in het treinstelsel heeft afgelegd af op de net getekende lijn. Teken de wereldlijn van de hardloper.
e. Meet zijn snelheid in het zwarte stelsel.

§3.4

39 Snelheden optellen volgens Einstein

Beantwoord de volgende vragen over de formule: $u = \dfrac{u' + v}{1 + \dfrac{u'v}{c^2}}$

a. Leg uit dat voor snelheden veel kleiner dan c bovenstaande formule overgaat in u = u′ + v.

b. Ten opzichte waarvan worden u, v en u′ gemeten?

Zie figuur 3.5. Daarin beweegt een trein met snelheid ½ c ten opzichte van het zwarte stelsel. In de trein rent een meisje met snelheid ½ c, gemeten ten opzichte van de trein, naar voren.

c. Bereken haar snelheid ten opzichte van het zwarte stelsel.

d. Controleer of aflezing van deze snelheid uit figuur 3.3 hetzelfde resultaat oplevert.

In het atoommodel van Bohr cirkelt het elektron in de binnenste schil met snelheid Z · c/137 rond de kern. Hierin is Z het atoomnummer van de kern Is het redelijk om deze beweging met behulp van de Newtonse mechanica te beschrijven voor:

e. een waterstofatoom?

f. een goudatoom?

g. Is de wereldlijn van de hardloopster die je in opgave 37, onderdeel j, hebt getekend, in overeenstemming met bovengegeven formule?

h. u′ en v komen symmetrisch in de formule voor, d.w.z je kunt u′ door v vervangen en v door u′ zonder dat de formule verandert. Breng met behulp van een getallenvoorbeeld (geen berekening nodig!) onder woorden wat dit betekent.

i. * Een straaljager vliegt met een snelheid van 500 m/s. De straaljager vuurt een raket af met een snelheid van 3000 m/s. Bereken hoe snel wij de raket zien vliegen op aarde.

40 Vergelijking tussen formules van Newton en Einstein

Volgens Einstein hebben we de formule: $u = \dfrac{u' + v}{1 + \dfrac{u'v}{c^2}}$. Volgens Newton: *u* = *u′* + *v*

a. Als je *v* = *c* neemt, welke snelheid krijg je dan voor *u*?

b. In welke gevallen komen de uitkomsten van de twee formules exact overeen?

41

a. Een sterrenstelsel beweegt met snelheid 2/3 c bij ons vandaan. Het licht heeft snelheid c ten opzichte van dit sterrenstelsel. Hoe groot is de snelheid van het licht ten opzichte van ons?

Een sterrenstelsel beweegt zich met snelheid 2/3 c bij ons vandaan. Een ander stelsel beweegt even snel bij ons vandaan, in tegenovergestelde richting.

b. Kan het licht van het ene stelsel het andere ooit bereiken?

c. Bereken met behulp van de formule de onderlinge snelheid van de stelsels.

42 Ontsnappen de boeven?

Drie bankrovers zijn met hun buit op de vlucht voor de politie. Hun vluchtauto gaat met een snelheid van ¾ c. De politieauto gaat maar met een snelheid van ½ c. Deze beide snelheden worden gemeten ten opzichte van de grond. Een agent vuurt een kogel af met een snelheid van $^1/_3$ c. Deze laatste snelheid is gemeten ten opzichte van de politieauto.

a. Bereikt de kogel de boeven volgens Newton?

b. Bereikt de kogel de boeven volgens Einstein?

c. Waarschijnlijk heb je onderdeel beantwoord vanuit een waarnemer die zich op de grond bevindt. Beantwoord onderdeel b nu, vanuit het gezichtspunt van de politie, de boeven en de kogel. Vul de gaten in onderstaande tabel.

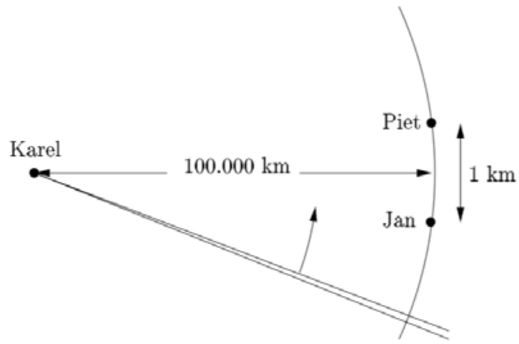
Figuur 3.10

Snelheid van → t.o.v.↓	**Grond**	**Politie**	**Boeven**	**Kogel**	Ontsnappen ze?
Grond	0	$\frac{1}{2}c$	$\frac{3}{4}c$		
Politie				$\frac{1}{3}c$	
Boeven					
Kogel					

§3.5

43 * Sneller dan licht?

Karel heeft een hele sterke zaklamp en hij wil daarmee laten zien dat het mogelijk is om sneller dan het licht informatie te sturen. Hij vraagt Jan en Piet om 1 km uit elkaar te gaan staan. Karel monteert zijn zaklamp op een platenspeler die een maal per seconde ronddraait en zet deze platenspeler op 100.000 km afstand van Jan en Piet (zie figuur 3.11).



Figuur 3.11 Situatie met Jan, Piet en de zaklamp

a. Jan ziet de zaklamp voorbij flitsen. Hoe lang duurt het voordat Piet de lichtstraal ook ziet?

b. Jan pakt een laserpistool en schiet op Piet. Hoe lang duurt het voordat Piet geraakt wordt? Kun je concluderen dat de bundel van de zaklamp sneller dan het licht gaat? Je kunt zeggen dat bovenstaand voorbeeld niet eerlijk is. Immers, de fotonen uit de zaklamp gaan zelf niet sneller dan het licht.

c. Karel zegt nu dat Jan pas mag schieten als hij het licht van de zaklamp voorbij ziet komen. Tegen Piet zegt Karel dat hij moet bukken als hij de zaklamp ziet. Is Piet op tijd om het laserpistool te ontwijken?

d. Karel zegt dat er nu informatie sneller dan het licht is verstuurd. Ben je het met hem eens?

Waarom (niet)?

44 Causaliteit – onschuld bewezen

Het is 1900. In Hamburg (Noord-Duitsland) is om 12 uur 's nachts een misdrijf gepleegd. Een zekere Albert E., geboren te in Ulm (Zuid-Duitsland) wordt verdacht. Hij beweert echter zijn onschuld te kunnen bewijzen! Dat gaat als volgt:

- Hij kan aantonen dat hij om 19 uur (5 uur voor het misdrijf) nog in München was. De afstand München-Hamburg is 600 km.
- Het snelste vervoermiddel (in 1900) haalt 100 km/h.

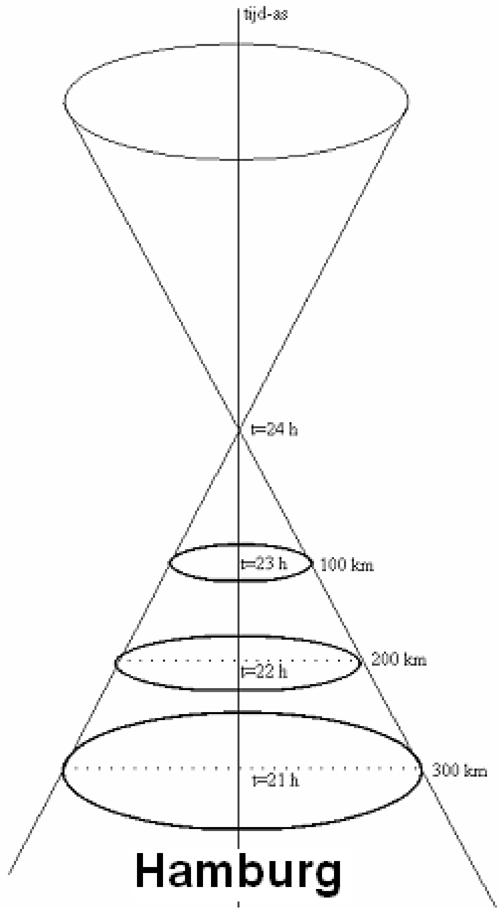
De politie ziet niet in dat dit een bewijs is, dus voegt Albert E. er nog aan toe:

- De minimale reistijd tussen Hamburg en München bedraagt 6 uur.
- Omdat hij om 19 uur nog in München was, kan hij niet om 24 uur in Hamburg geweest zijn.

Toen zij dit begrepen hadden, raadde E. de politie aan op vergelijkbare manier andere mogelijke daders uit te sluiten. Op een kaart (figuur 12) rond Hamburg worden hiertoe cirkels getrokken, met straal 100, 200, 300, enz. km. Bij die cirkels worden relevante tijdstippen gezet.

Vraag: welke betekenis hebben deze tijdstippen voor dit misdrijf?

Figuur 3.12 Onschuldigen uitsluiten



Figuur 3.13 De schuldige bevindt zich binnen de kegel

Vervolgens bedenkt men dat deze informatie mooier is weer te geven in de (2dimensionale) weergave van een andere 3-dimensionale figuur 3.13. Die is hiernaast getekend.

Alle mogelijke verdachten die kunnen aantonen dat zij op enig moment een plaats- en tijdcoördinaat hadden die buiten de getekende kegel vallen, zijn onschuldig!
Dit idee kun je ook op slechts 1 ruimtedimensie toepassen. De cirkels rond Hamburg zouden vervangen moeten worden door lijnstukken met als lengte de diameter van de cirkel die zij vervangen.

De kegel verandert dan in een eenvoudiger figuur, met slechts twee dimensies: één voor de tijd en de andere voor de plaats.

Merk op dat de onschuld van Albert E. niet bewezen had kunnen worden als hij de beschikking had gehad over een voertuig dat 200 km/h kon halen!
Figuur 3.13 zou dan vervangen moeten worden door een kegel met een grotere tophoek. En binnen die grotere kegel zou het punt met coördinaten (München, 19 h) wèl vallen!

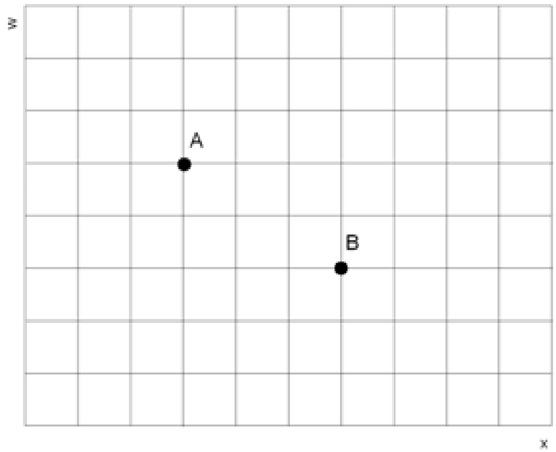
45 Causaal verband?

In figuur 3.14 zijn twee gebeurtenissen A en B getekend, die voor een zwarte waarnemer niet gelijktijdig zijn.

a. Teken een stelsel waarin de gebeurtenissen A en B wel gelijktijdig plaatsvinden.

b. Bepaal de snelheid van dit stelsel.

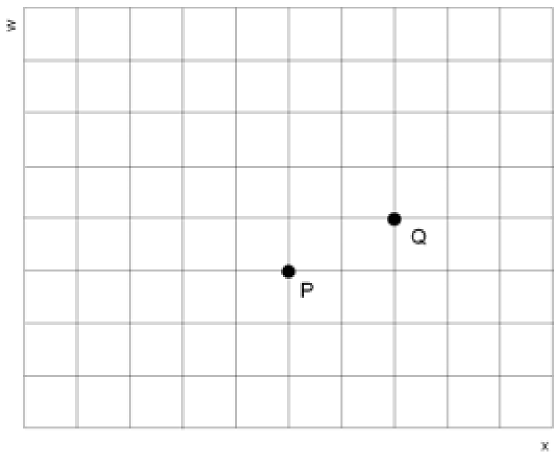
c. Leg nu uit dat tussen de gebeurtenissen B en A geen causaal verband kan bestaan.



Figuur 3.14 Causaal verband?

46 * Lichtkegels

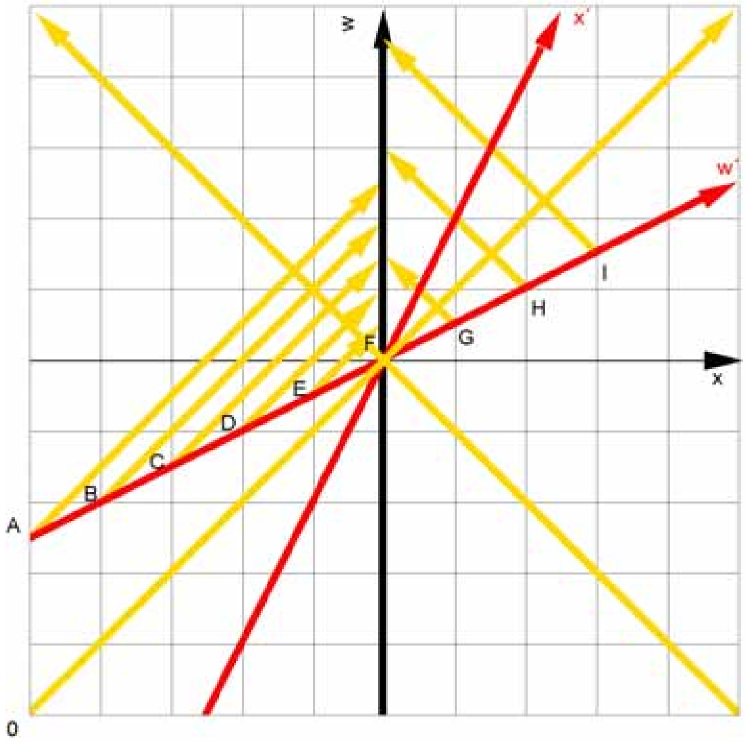
a. Teken in fig. 3.15 de lichtkegels van de gebeurtenis P : (x,w)= (5,3)
b. Teken een stelsel waarbij Q: (7,4) voor P plaatsvindt. Voor welke snelheden is dit het geval?
c. Laat zien dat de Q niet voor P plaats kan vinden als we kiezen Q: (4,5).
d. Met welke snelheid zou een signaal verstuurd moeten worden vanuit P om in Q aan te komen?
e. We hebben twee gebeurtenissen P:(x_1,w_1) en Q: (x_2,w_2). Geef de algemene conditie dat deze twee gebeurtenissen oorzakelijk samenhangen.



Figuur 3.15 Lichtkegels en causaal verband

47 * Een ontmoeting met Tachy-John (vervolg).

We stellen ons voor dat er een ontmoeting plaatsvindt tussen de zwarte waarnemer en ene Tachy-John (T-J) die met een snelheid van v=2c langskomt. De ontmoeting vindt plaats in de oorsprong. In hoofdstuk 1 analyseerden we dit probleem aan de hand van het ruimte-tijddiagram uit figuur 3.16:



Figuur 3.16 Ontmoeting

We zagen dat er problemen ontstonden door een schending van het 1^e postulaat van Einstein: zwart neemt de beweging van T-J anders waar dan T-J die van zwart waarneemt. Een nadere beschouwing doet ons inzien waar deze schending vandaan komt. T-J zendt in de figuur alleen signalen uit in *zijn* positieve ruimterichting! En deze signalen na het passeerpunt lopen ook nog in de negatieve tijdrichting van T-J.

a. Leg dit uit.
b. Teken nu een herziene versie van figuur 3.16 waarin op de twee genoemde punten correcties zijn aangebracht.
c. Hoe ervaart de zwarte waarnemer de hele ontmoeting (beschrijf de ontmoeting als een reeks van waarnemingen van de zwarte waarnemer)?
d. Is op deze wijze wel voldaan aan Einstein´s 1^e postulaat? Ga daartoe na hoe T-J de ontmoeting zou ervaren, waarbij de zwarte waarnemer met regelmatige tussenpozen lichtsignalen uitzendt.

Zoals je zal zijn opgevallen, moet er een prijs betaald worden om aan Einstein´s eisen te voldoen: sommige signalen die T-J in zijn positieve tijdrichting uitzendt, lopen in de negatieve zwarte tijdrichting.

e. Is iets vergelijkbaars aan de hand met de signalen die de zwarte waarnemer uitzendt?
f. T-J´s lichtkegel is gedraaid t.o.v. die van de zwarte waarnemer. Treedt zo een draaiing ook wel eens op bij waarnemers die ten opzichte van elkaar een lagere snelheid dan c bezitten?
g. Breng onder woorden welke problemen met causaliteit zouden ontstaan als er mensen (of machines, of signalen) sneller dan het licht zouden kunnen gaan.

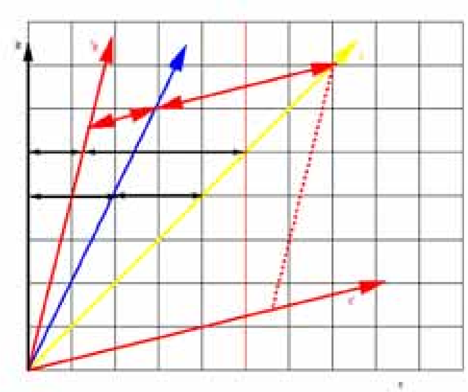
Antwoorden tekstvragen

T.15

Twee gebeurtenissen zijn causaal met elkaar verbonden (dan bestaat er "causaliteit") als de ene gebeurtenis de oorzaak is van de andere gebeurtenis.

T.16

De zwarte verticale pijl: de w-as oftewel de lijn x = 0.
De rode pijl: de wereldlijn van de trein
De blauwe: de wereldlijn van het meisje.
De gele, met c erbij geschreven; de wereldlijn van een foton in het zwarte stelsel.
De geelrood gestippelde: de wereldlijn van een foton in het rode stelsel volgens Newton.



T.17

In het zwarte stelsel: de snelheid van de trein is 1/4 c; die van het meisje 2/4 c.
In het rode stelsel (van de trein): de trein staat stil, het meisje heeft snelheid (ongeveer) 0,3 c: de korte rode pijl heeft een lengte die ca. 30% is van de afstand die het licht in de overeenkomstige tijd in het rode stelsel aflegt.

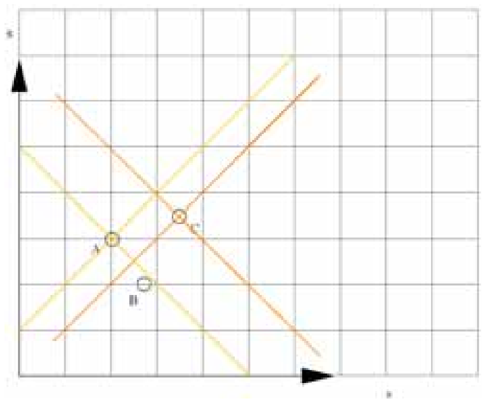
T.18

De snelheid van het ruimteschip in het stelsel van de aarde bedraagt v = 0,4 c (dan is de positieve as zo gekozen dat die samenvalt met de richting van de snelheid van het ruimteschip). De raket beweegt met snelheid u´ = 0,8 c ten opzichte van het ruimteschip.
Dan is de snelheid van de raket ten opzichte van ons:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u' \cdot v}{c^2}} =$$

(0,8c + 0,4 c) / (1 + 0,4c.0,8c/c²) = 1,2c / 1,32 = 10/11 c.

T.19



a. B ligt in binnen de achterwaartse lichtkegel van zowel A als C; B kan daarom A veroorzaakt hebben, en ook C.
A valt buiten C´s lichtkegel en is daarom niet causaal met C verbonden.
b. Dit is de gebeurtenis in de toekomst die het snijpunt is van de gele en rode lijnen uit A en C.
c. Nee, dat kan niet: alle punten binnen de voorwaartse lichtkegel vanuit A liggen ook binnen die vanuit B en zijn dus door B beïnvloedbaar.

T.20

Die eventuele oorzaak zou de afstand maan-aarde (ruim 300.000 km) in 0,47 s hebben overbrugd. Dat zou een snelheid vereisen die groter is dan de lichtsnelheid, hetgeen niet kan.
De inslag van de meteoriet kan daarom niet de oorzaak zijn van het kapot gaan van de telescoop.

4 Tijdsuitrekking

Alles moet zo eenvoudig mogelijk worden voorgesteld, maar niet eenvoudiger dan dat.

Lopen bewegende klokken echt langzamer?

4.1 Kunt u mij vertellen hoe laat het is?

Gelijktijdigheid is relatief; welke gebeurtenissen voor iemand gelijktijdig plaatsvinden hangt af van haar referentiekader, dat wordt bepaald door haar snelheid. Als je naar figuur 4.1 kijkt, kun je je afvragen hoe laat het is in het punt w'. Voor de waarnemers in het zwart is dat gelijktijdig met w = 5 tijdseenheden, maar voor de rode waarnemers is het gelijktijdig met $w*$ = 3,3 eenheden. Misschien maak je je nu zorgen over een mogelijke inconsistentie van de theorie, of misschien verrast het antwoord je niet: gelijktijdigheid is immers relatief. Het genoemde verschil in tijdsduiding ligt eigenlijk wel voor de hand als je je realiseert dat in dit voorbeeld twee waarnemers in verschillende stelsels allebei verwijzen naar de tijdsaanduiding op het zwarte horloge. De interessante vraag is echter welke tijd een rood horloge aangeeft voor *w'*, en hoe die zich verhoudt tot de tijd die de waarnemer in het zwart aan datzelfde moment toekent. Eén ding weten we zeker: als de betreffende rode waarnemer zijn horloge in de oorsprong precies op nul heeft gezet, dan wijst dat klokje één bepaalde tijd aan voor *w'*. Om erachter te komen wat die tijd is, gaan we zorgvuldig gebruikmaken van het relativiteitspostulaat.

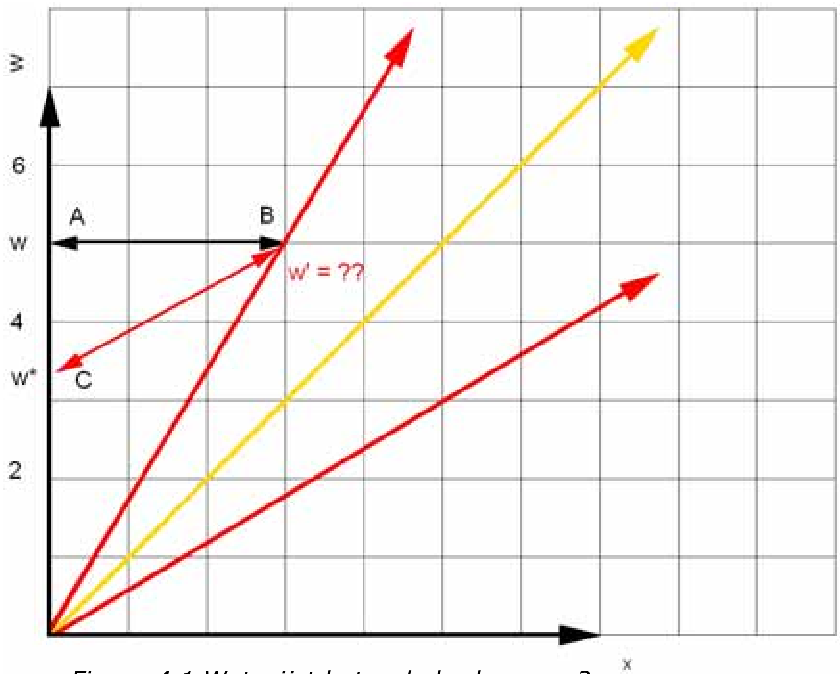
T.21 Wat hoort bij wat?

Zet de juiste letter (w, w' en w* uit figuur 4.1) bij de juiste omschrijving

a. Een tijdstip op het rode horloge.

b. Tijdstip op het zwarte horloge dat volgens zwart gelijktijdig is met w'.

c. Tijdstip op het zwarte horloge dat volgens rood gelijktijdig is met w'.



Figuur 4.1 Wat wijst het rode horloge aan?

4.2 Tijdrek

We gaan het dilemma uit de vorige paragraaf te lijf met het relativiteitsprincipe, door dat toe te passen op de kloksnelheden van twee inertiaalwaarnemers die ten opzichte van elkaar bewegen met een snelheid *v*. Ze hebben identieke klokken bij zich, die in de oorsprong op nul gezet zijn, en houden allebei de tijd bij op hun eigen wereldlijn. We zullen zien dat hun kloksnelheden moeten verschillen met een factor γ (gamma), die afhangt van hun relatieve snelheid *v* of liever gezegd van de dimensieloze parameter $\beta = v/c$. We weten ook dat als *v* heel klein is, de klokken zo goed als gelijk moeten lopen.

Laten we aannemen dat

$$w' = \gamma w^*$$

(zie figuur 4.1), dus $w' = w^*$ vermenigvuldigd met een zeker (positief) getal dat we γ noemen. Vanwege het relativiteitsbeginsel moet ook gelden dat

$$w = \gamma w'$$

omdat er maar één relatieve snelheid in het spel is en de situatie volkomen symmetrisch moet zijn voor de beide waarnemers. Als we nu de uitdrukking voor w' invullen in die voor *w*, vinden we

$$w = \gamma^2 w^*$$

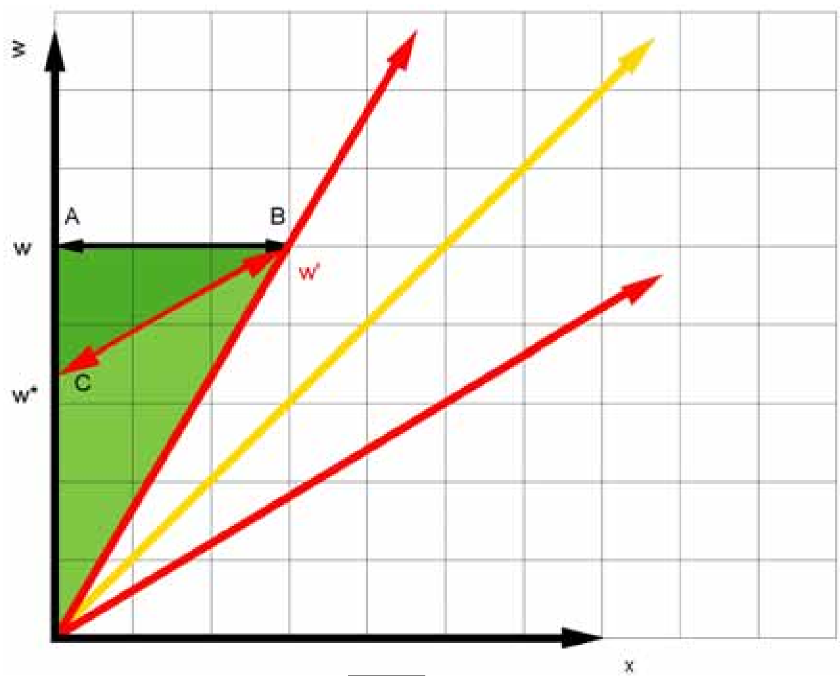
waarin zowel *w* als w^* verwijst naar een tijdstip in het zwarte stelsel, dus op één en dezelfde klok. Hierdoor kunnen we direct iets met zekerheid zeggen: omdat uit figuur 4.1 duidelijk blijkt dat *w* groter is dan w^*, mogen we concluderen dat γ zelf dus ook groter moet zijn dan één:

$$\gamma^2 > 1$$

Op basis van de relatie $w' = w/\gamma$ weten we dan ook meteen dat w' kleiner moet zijn dan *w*. Dat houdt in dat een bewegende klok langzamer loopt — een tamelijk bizarre maar uiterst belangrijke conclusie. Op grond van de figuur 4.1 zou je misschien eerder verwachten dat $w' > w$; dat dat niet zo is, betekent dat we de eenheden langs de rode assen van het bewegende stelsel moeten herschalen.

Als rechtgeaard relativist vraag je je nu natuurlijk af hoeveel langzamer een bewegende klok dan wel loopt. Om dat te bepalen gebruiken we weer een stukje meetkunde van het platte vlak.
In figuur 4.2 zie je twee groene rechthoekige driehoeken: een grote, ABO, en deels daaroverheen een kleine in donkerder groen, ABC.

1. We hebben weer te maken met gelijkvormige driehoeken, zodat er een vaste verhouding bestaat tussen corresponderende zijden. Daarom geldt dat AB/AO = AC/AB.



Figuur 4.2 $w' = w \cdot \sqrt{1-\beta^2}$

2. Merk op dat AB/AO = v/c = β en AO = w, zodat AB = wv/c = β w. Ook kunnen we uit figuur 4.2 meteen aflezen dat AC = w - w^*. Als we deze uitdrukkingen invullen in de verhoudingsformule, vinden we $\beta = (w - w^*)/ \beta w$.

3. Om die vergelijking op te lossen voor w, hoeven we alleen maar beide kanten te vermenigvuldigen met βw, alle termen met w naar één kant te brengen en w buiten haakjes te halen. We verkrijgen dan de formule $w = w^*/(1 - \beta^2)$

4. Uit de relatie $w = \gamma^2 w^*$ volgt dat de evenredigheidsconstante γ die we zoeken, gegeven wordt door de wortel uit $1/(1 - \beta^2)$. We noemen γ de relativistische snelheidsfactor.

Voor de verhouding tussen de kloksnelheden vinden we:

$$w' = w \cdot \sqrt{1-\beta^2}$$

Einsteins formule voor tijdrek

Het verband tussen de tijdsaanduiding tussen twee klokken die ten opzichte van elkaar bewegen met snelheid v wordt gegeven door:

$$t' = t \cdot \sqrt{1-\beta^2} = \frac{t}{\gamma} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Symbolen: t is een tijdstip op een stilstaande klok, t' is een tijdstip op een bewegende klok met snelheid v, hierin is $\beta = v / c$ de relatieve snelheidsparameter.

Laten we even stilstaan bij een paar interessante aspecten van deze fraaie formule. Zoals eerder gezegd zien we dat $w' = c \cdot t'$ inderdaad altijd kleiner zal zijn dan $w = c \cdot t$, omdat de waarde onder het wortelteken altijd tussen 0 en 1 ligt (want v is natuurlijk altijd kleiner dan c). Uiteraard geldt daarbij dat $w' = w$ als $v = 0$. Iets griezeliger is het feit dat w' naar 0 gaat als v dichter bij c komt, wat inhoudt dat de tijd 'stilstaat' op een klok die zich voortbeweegt met de lichtsnelheid. In dat unieke stelsel gaat het begrip tijd niet meer op: de 'samengedrukte' kaders die we zo ijverig hebben getekend voor bewegende waarnemers worden gereduceerd tot een enkele lijn, waarop geen onderscheid meer te maken valt tussen ruimte en tijd.

We hebben gezien dat de ruimtetijddiagrammen een gebruikersvriendelijk hulpmiddel vormen om vat te krijgen op de relativiteitstheorie. Toch kun je de gelijkwaardigheid van verschillende inertiaalstelsels nooit rechtstreeks zichtbaar maken in één enkele afbeelding. Maar diezelfde asymmetrie tussen stelsels doet zich ook voor bij een weergave in formules, waar je ook altijd maar één formule tegelijk hanteert, bijvoorbeeld die voor de tijdsuitrekking.

Opmerking: We hebben bij onze berekeningen gebruikgemaakt van de vertrouwde euclidische meetkunde in het platte vlak. Maar mogen we het euclidische begrip van gelijkvormigheid wel zomaar toepassen in een context waarin we verschillende ruimtetijdstelsels met elkaar vergelijken? Zijn de voorschriften van Euclides' wet geldig in het vlak van de ruimtetijd? Nou nee, eigenlijk niet. Het probleem is niet zozeer dat het rode kader samengedrukt is, als wel dat de eenheden langs de rode assen herschaald zijn. Omdat de overeenkomstige zijden van de verschillende driehoeken echter altijd bij hetzelfde stelsel horen, valt de schaalfactor weg uit de verhoudingen tussen zulke zijden. De verhouding tussen rode lijnstukken mogen we dus vergelijken met die tussen zwarte lijnstukken, ondanks het verschil in schaal met een relativistische snelheidsfactor γ.

T.22 Contact

Een astronaute zit in een raket met snelheid 0,5c t.o.v. de aarde. Ze verliest 120 s het radiocontact. Hoelang denkt de controletoren op aarde dat er geen contact was?

4.3 De tweelingparadox

De tweelingparadox laat zien dat tijdsuitrekking een werkelijk effect is: bewegende klokken lopen écht langzamer. Dit feit leidt op zichzelf al tot een paradox: als beweging volgens de relativiteitspostulaten relatief is, zou dat ook moeten gelden voor het langzamer lopen van klokken. Met andere woorden:

> *Als A's klok langzamer loopt dan die van B, omdat A beweegt ten opzichte van B, kunnen we toch ook zeggen dat de klok van B juist langzamer loopt dan die van A, omdat B in beweging is ten opzichte van A?*

In het volgende gedachte-experiment komt deze paradox duidelijk naar voren.

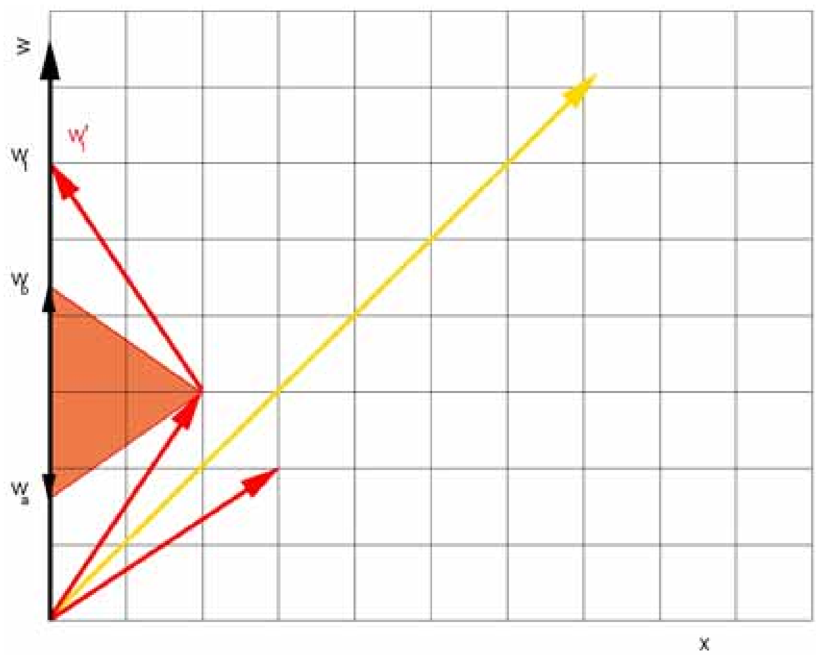
We geven Nora en Vera, twee helften van een identieke tweeling, exact dezelfde klokken die precies gelijk zijn gezet en even snel lopen. Vera gaat daarna op ruimtereis, waarbij ze met grote snelheid een eind door het heelal reist om vervolgens weer naar huis terug te keren. Nora blijft achter. Op een gegeven moment komt Vera thuis. Omdat zij in beweging was, heeft haar klok minder snel gelopen en is er voor haar minder tijd verstreken dan voor haar geliefde zuster op aarde. Bij thuiskomst blijkt dat Nora veel ouder is geworden dan zij; als ze erg lang is weggebleven en snel genoeg heeft gereisd, kan het zelfs zijn dat Nora allang is overleden. Dat is pas drama!

Is dit briljante fictie of bikkelharde realiteit? En als het echt kan, hoe valt de asymmetrie ervan dan te rijmen met het relativiteitspostulaat? Welnu, het antwoord luidt: ja, het kan echt. De asymmetrie wordt duidelijk als je goed kijkt naar de schematische weergave van het reisavontuur in figuur 4.3. De waarnemer op de zwarte w-tijdas is natuurlijk Nora, die thuis op haar plek blijft, wachtend op haar zus. De reis van Vera in het rode ruimteschip bestaat uit twee symmetrische delen: eerst beweegt ze zich met een snelheid *v* van de aarde af, en vervolgens keert ze (bliksemsnel) om en reist ze terug met de snelheid -*v*. Een eendimensionaal blokje om — iets saaiers lijkt nauwelijks voorstelbaar.
Omdat de tijdsuitrekking alleen afhangt van het kwadraat van de snelheid, loopt haar klok net zoveel langzamer op de heenweg als op de terugweg. Volgens de formule uit paragraaf 4.2 is er op het moment dat er voor Nora bijvoorbeeld t_1 = 30 jaar verstreken is, voor Vera nog maar t_1' verstreken, gegeven door

$$t_1' = t_1 \cdot \sqrt{1-\beta^2}$$

De reizende tweelingzus kan t_1' zo kort maken als ze wil; ze hoeft alleen maar de juiste snelheid *v* te kiezen. Als ze bijvoorbeeld reist met v= 2/3 c , wordt

$$t_1' = 0{,}75 \cdot t_1 \text{ en } t_1' = 22 \text{ jaar!}$$



Figuur 4.3 Waar komt de tweelingparadox vandaan?

Figuur 4.3 maakt duidelijk hoe de asymmetrie ontstaat. Vlak voor ze omkeert, beschouwt Vera w_a nog als gelijktijdig met haar eigen tijd w'_1, maar een ogenblik later is w_b voor haar gelijktijdig geworden. Ze maakt dus op de een of andere manier een sprong in de tijd van w_a naar w_b — of iets geloofwaardiger, als we de knik in de rode wereldlijn bij het omkeerpunt een beetje afronden: dan zwiept Vera razendsnel door de periode tussen w_a en w_b. Dat is geen relatieve bewering, omdat ze van snelheid verandert. Zij ondergaat een enorme vertraging en dat is een fysisch effect dat ze objectief kan vaststellen, net zoals je meteen voelt wanneer een auto waarin je zit plotseling remt. Haar zus Nora ondergaat geen vertraging, waardoor er een objectieve asymmetrie ontstaat — en daarin ligt de oplossing van de paradox.

Deze dramatische asymmetrie is onontkoombaar als één van de zussen in rust blijft en we erop staan dat er op enig later tijdstip een reünie plaatsvindt. Sommige experts zijn daarom van mening dat het tijdsverschil wordt veroorzaakt door de versnelling, zodat het niet puur een effect van de speciale relativiteit is. Toch hangt het uiteindelijke effect alleen af van de relatieve snelheid tussen beide waarnemers en de duur van de reis. We kunnen een uitstekende benadering van het effect geven met een optelling van kleine segmentjes waarin de ruimtezus zich met verschillende snelheden voortbeweegt ten opzichte van de thuisgebleven tweelingzus. Bovendien heeft het afronden van de scherpe bocht niets te maken met de duur van de reis: we kunnen het effect daarvan zo klein maken als we willen.

Het belangrijkste is dat de tweelingparadox een waarachtig effect is, dat ook proefondervindelijk is bevestigd. In 1971 zijn experimenten uitgevoerd waarin een zeer accurate atoomklok in een vliegtuig met een gemiddelde snelheid van 950 kilometer per uur een reis om de aarde maakte. Daarna was er een miniem maar significant verschil te zien met de verstreken tijd op identieke klokken die in het laboratorium waren achtergebleven, precies in overeenstemming met de formule van Einstein. De berekening voor dit speciale geval dient als illustratie van het meer algemene verschijnsel dat als twee mensen zich langs willekeurige wereldlijnen voortbewegen, degene met de 'langste' wereldlijn het jongst zal blijven.

T.23 Relatieve leeftijd

Leg uit aan de hand van figuur 4.3 of het mogelijk is als zoon of dochter ouder te zijn dan jouw ouders.

4.4 Tijdrek bij radioactief verval

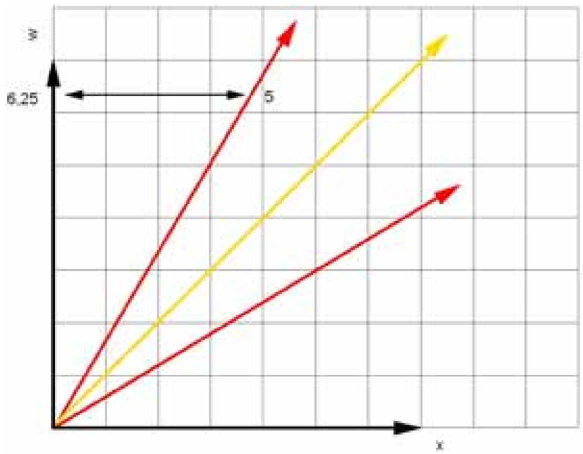
Een belangrijke toepassing van de relativiteitstheorie betreft het radioactief verval van een stof in een bewegend stelsel. Van radioactieve stoffen is bekend dat het tempo waarin zij vervallen niet van buitenaf te beïnvloeden is. Dat vervaltempo wordt gekarakteriseerd door de **halfwaardetijd** *T*: na een tijd *T* is het aantal radioactieve kernen gehalveerd.

Laten we het halveringsproces van twee kanten bekijken: eenmaal gaat de radioactieve stof met een snelle trein mee, de tweede keer blijft die in het lab, maar rijdt er een snelle trein langs. Het coördinatenstelsel waarin de stof in rust is, noemen we het **ruststelsel**. Laat de halveringstijd van de stof in een ruststelsel 5 seconden zijn. De trein rijdt met snelheid 0,6c. De relativistische snelheidsfactor bedraagt dan

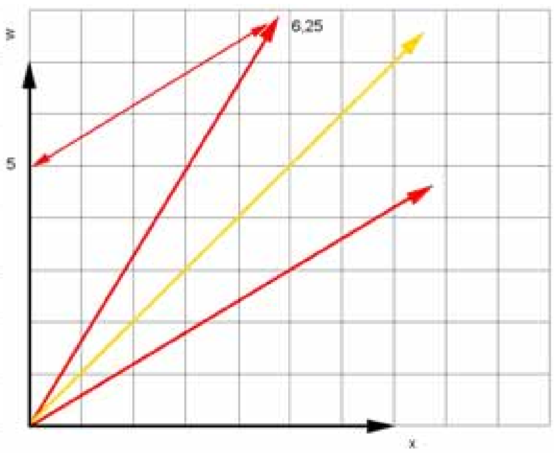
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0,6)^2 c^2}{c^2}}} = 1,25$$

De waargenomen halveringstijden zijn dan:
- in de trein (het ruststelsel van de stof) gewoon 5 s,
- maar buiten de trein 5 · 1,25 = 6,25 s.

In de trein speelt het verval zich af. In het ruimtetijdpunt *t′* = 5 is de helft van de stof vervallen. Dat ruimtetijdpunt heeft in het zwarte stelsel de coördinaat 6,25.



Figuur 4.4 De radioactieve stof is in de trein



Figuur 4.5 De stof is in het lab

De waarnemer buiten de trein verwachtte dat op zijn tijdstip *t* = 5 s de stof gehalveerd zou zijn. Dat het pas later (op *t* = 6,25) het geval is, brengt hem tot de conclusie: doordat de trein ten opzichte van mij zo'n grote snelheid heeft, spelen de gebeurtenissen zich daarin langzamer af : 'de tijd loopt langzamer dan bij mij'.

Nu laten we het preparaat in het zwarte stelsel rusten en beschouwen we het verval vanuit de trein. In het ruststelsel bedraagt de halveringstijd weer 5 seconden. Hoeveel tijd neemt die halvering in beslag, gezien vanuit de trein? Het ruimtetijdpunt waarbij in figuur 4.4 in het zwarte stelsel een 5 vermeld staat, heeft in het rode stelsel een tijdcomponent die je weer vindt door evenwijdig aan de x'-as een lijn te trekken vanuit het bedoelde punt. Die rode stippellijn snijdt de tijd-as van de reiziger op *t′* = 6,25.
De reiziger concludeert: ik had de halvering op *t′* = 5 verwacht; het preparaat beweegt ten opzichte van mij en blijkbaar leidt dit tot een trager verloop van de gebeurtenissen.

De situaties, bezien vanuit het zwarte en rode stelsel, zijn volkomen gelijk: als een stelsel ten opzichte van jou beweegt, loopt vanuit jou gezien de tijd in dat andere stelsel langzamer.

Beweging is echt relatief

Kijk eens naar drie mensen, Albert, Bob en Charlotte. Zij zijn allen even oud; Albert en Charlotte wonen vlak bij elkaar, Bob woont op een andere planeet, 3 lichtjaren verwijderd. Charlotte gaat bij Bob op bezoek; zij reist met snelheid 0,6 v van Albert naar Bob. Als Charlotte bij Bob arriveert is zij jonger dan beide anderen.

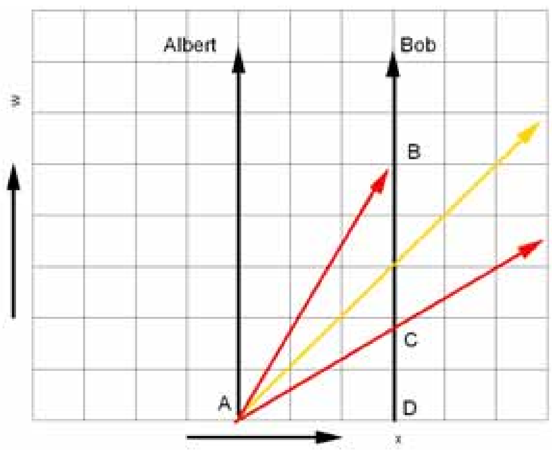
Berekening leert dat $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}6^2}}$ = 5/4.

Bob en Albert berekenen dat Charlotte 3/0,6 = 5 jaar over de reis doet. In hun 5 jaar echter is Charlotte slechts 5/γ = 4 jaar ouder geworden.

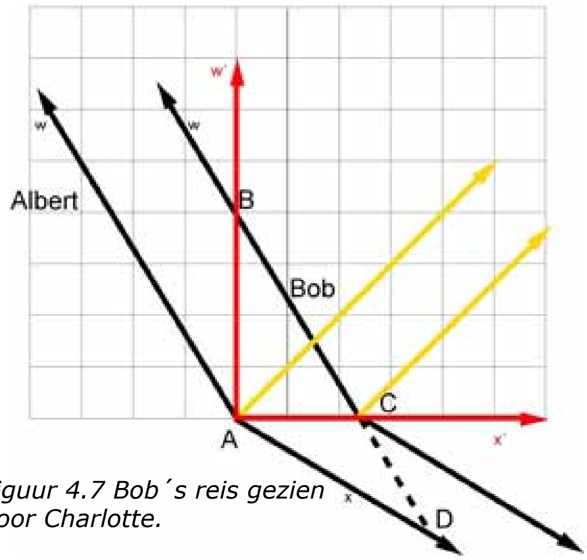
Maar - zou je nu ook niet langs de volgende lijn kunnen redeneren: beweging is relatief, dus Charlotte mag van zichzelf zeggen dat zij stil staat en dat Bob op haar afkomt (en Albert van haar weg gaat). Gegeven het feit dat Bob met snelheid 0,6v op Charlotte afvliegt, kan zij berekenen dat hij 5 jaar over de reis zal doen. Als zij bij elkaar komen verwacht Charlotte daarom dat zij 5 jaar ouder is geworden, en kan zij berekenen dat Bob jonger is gebleven.

Wie veroudert nu het meest: Bob en Albert of Charlotte?

Hun meningsverschil komt voort uit het feit dat je niet alleen door de ruimte reist, maar door ruimtetijd. En de reis van Bob naar Charlotte toe is niet zonder meer het tegengestelde van de reis die Charlotte maakte. Dit wordt hieronder toegelicht aan de hand van ruimtetijddiagrammen. Figuur 4.7 vervangen door d4_9b



Figuur 4.6 Charlotte´s reis vanuit Bob´s perspectief



Figuur 4.7 Bob´s reis gezien door Charlotte.

Charlotte reist van ruimtetijdpunt A naar B. Vanuit Charlotte gezien reist Bob en start de onderneming op w´=0; dat is het geval in punt A, en ook in C.
Als zij Bob´s reis gaat beschrijven moet zij zeggen dat op w´= 0 Bob zich in ruimtetijdpunt C bevindt en dat in punt B de ontmoeting plaatsvindt.

Terwijl Charlotte van mening is dat Bob gedurende de tijd BC haar nadert, zegt Bob dat Charlotte gedurende de tijd DB hem nadert. Omdat zij ten opzichte van elkaar bewegen zijn ze het oneens over hun tijdstip t=0, wat met zich meebrengt dat zij het ook oneens over de reisduur zullen zijn.

T.24 Relatieve leeftijd

Hoe lang duren de tijdsduren AB, CB en DB? Geldt dit zowel in figuur 4.6 als in figuur 4.7?

Muonen

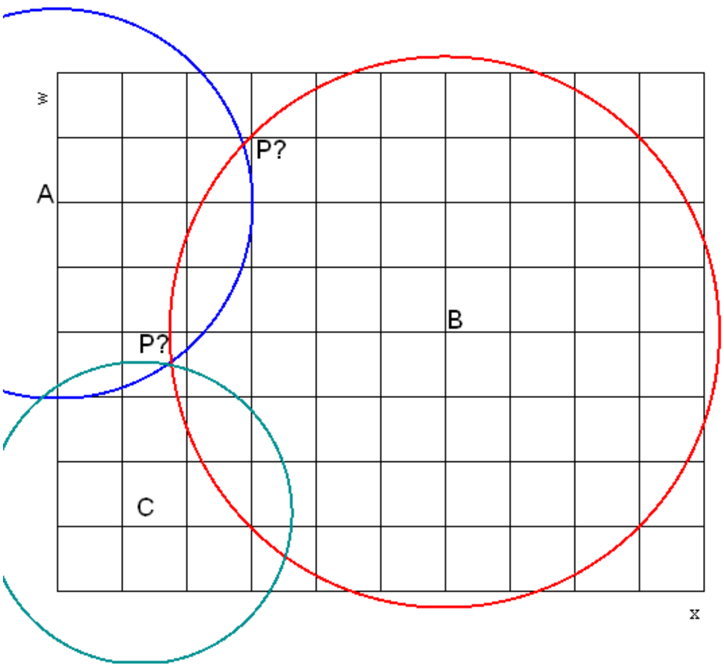
Een zeer directe verificatie van het effect van tijdsuitrekking bieden instabiele elementaire deeltjes, zoals muonen, die spontaan uiteenvallen en dus een beperkte (gemiddelde) levensduur hebben. De gemeten levensduur blijkt inderdaad af te hangen van de snelheid van de vervallende deeltjes ten opzichte van het laboratorium. Deze experimenten leveren een zeer precieze bevestiging op van Einsteins voorspelling. Verder maken ze duidelijk dat het effect wel degelijk bij de speciale relativiteitstheorie hoort, omdat er in dit geval geen versnelling aan te pas komt en de levensduur toch verschilt in de verschillende stelsels. Dat is mogelijk omdat er in het laboratorium in feite een tijds- en een afstandsmeting wordt uitgevoerd, die wordt vergeleken met een tijdsmeting in het stelsel van het vervallende deeltje, waarbij het deeltje zelf als een klok fungeert. Tijdsuitrekking als gevolg van de speciale relativiteitstheorie, en in het bijzonder de relativiteit van gelijktijdigheid, is dus net zo reëel als de wet die zegt dat een deeltje versnelt als er een kracht op uitgeoefend wordt.

4.5 Plaatsbepaling

Plaatsbepaling via afstandsmetingen

Het is mogelijk de plaats van een gebeurtenis, zoals een aardbeving bijvoorbeeld, vast te stellen via afstandsmetingen.

Neem een plat vlak in je gedachten. Hierop zijn van 2 punten A en B de coördinaten bekend. Van een derde punt P wordt nu de afstand tot A en B bepaald. Bij een aardbeving gaat dat als volgt: bekend is op welk tijdstip (plaatselijke tijd) de beving plaatsvond. Bij ons (in De Bilt, punt B bijvoorbeeld) wordt enige tijd na dit tijdstip op een seismograaf een beving geconstateerd. Omdat de snelheid waarmee de beving zich voortplant bekend is, kan men de afstand van De Bilt tot de plek van de aardbeving berekenen. Zeg dat AP 3 lengte-eenheden is en BP 4. Dan kun je rond A een cirkel trekken met straal 3; P ligt op die cirkel, alleen is nog onbekend waar. Rond B kun je een cirkel trekken met straal 4. P ligt ook op die cirkel. Zie figuur 4.8.
Omdat P op beide getrokken cirkels ligt, is P een van de snijpunten van de twee cirkels. Welk van beide snijpunten het juiste is, valt nog vast te stellen door de afstand tot een 3e punt C, waarvan de coördinaten bekend moeten zijn, te meten.



Figuur 4.8 Plaatsbepaling door bepaling van afstanden tot bekende punten.

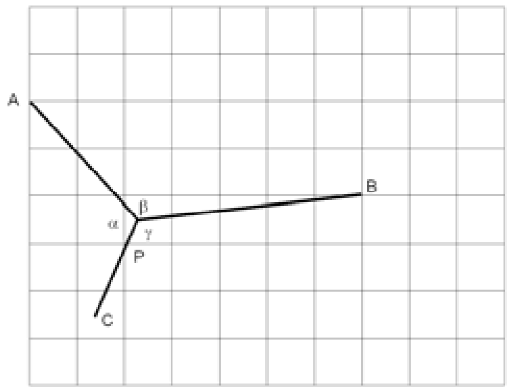
Bij landmeting is het meten van afstanden vaak niet goed mogelijk. Afstandsmeting wordt daar vervangen door hoekmeting. Weer is de ligging van 3 punten A, B en C nauwkeurig bekend. In een punt P, waarvan men de coördinaten wil kennen, meet men de hoeken α, β en γ. Dit stelt de landmeter in staat de coördinaten van P vast te stellen. En vervolgens kan P weer dienen als punt met bekende coördinaten om die van andere vast te stellen.
Op deze manier heeft men aan het eind van de 18^e en begin 19e eeuw, zeer nauwkeurig de lengte vastgesteld van de meridiaan die door Parijs loopt tussen Duinkerken, een plaats in het Noorden van Frankrijk, en Barcelona. Met de gevonden lengte kon men de afstand tussen Noordpool en evenaar langs diezelfde meridiaan vaststellen. Franse wetenschappers spraken af die afstand 10.000.000 meter te noemen en legden de meter vervolgens vast in een platina-iridium staaf die bij 0^oC bij Parijs werd bewaard. Nederland heeft daarvan een zilveren kopie, die gebruikt werd om meetlatten die zeer nauwkeurig moesten zijn te ijken.

Plaatsbepaling met behulp van GPS

Een vergelijkbaar systeem wordt gehanteerd bij plaatsbepaling met behulp van GPS (Global Positioning System). De bekende punten A, B en C zijn in dat geval satellieten die rond de aarde draaien. Zij zenden signalen uit met onder andere de volgende mededelingen:

- de tijd waarop het signaal wordt uitgezonden
- door welke satelliet het wordt uitgezonden

Deze signalen reizen met de lichtsnelheid naar de GPS-ontvanger. Uit het tijdstip van ontvangst valt nu te berekenen hoelang het signaal onderweg is geweest. Hieruit is, met de bekende lichtsnelheid, de afstand tussen satelliet en ontvanger te berekenen.



Figuur 4.8b

Door dit drie maal te doen met de tijd- en plaatsgegevens van de satellieten A, B en C is de plaats van de GPS-ontvanger op het aardoppervlak te berekenen. En om helemaal “save” te zijn wordt nog de afstand tot een vierde satelliet bepaald, zodat de invloed van meetonnauwkeurigheden klein gemaakt kan worden.

Problemen bij plaatsbepaling met behulp van GPS

Bij de toepassing van deze techniek spelen, behalve tal van technische problemen, ook een stel fysische problemen een rol. We noemen hier die problemen die met de relativiteitstheorie van doen hebben.

- De satellieten bewegen ten opzichte van de ontvanger op het aardoppervlak. Hierdoor lopen de satellietklokken langzamer dan die in de ontvanger! Het is daarom nodig de klokken van de satellieten regelmatig te synchroniseren met die op aarde.
- Satelliet en ontvanger vormen géén inertiaalstelsel. Je mag dan niet meer met de speciale relativiteitstheorie rekenen, maar moet de algemene relativiteitstheorie gebruiken.
- De satelliet bevindt zich hoog boven de aarde. Daar is het gravitatieveld zwakker dan bij ons. Klokken lopen dan juist sneller dan bij ons, wat opnieuw met de algemene relativiteitstheorie in rekening gebracht kan worden.

Begrippen

Tijdsduur
Tijdrek
Tweelingparadox

Samenvatting

- Gelijktijdigheid is een relatief begrip. Ten opzichte van elkaar bewegende waarnemers zijn het daarom niet eens over de **tijdsduur** tussen twee gebeurtenissen.

- De tijdsduur *w'* die 'de bewegende ander' meet is altijd korter, volgens de formule voor de **tijdrek**

$$t' = t \cdot \sqrt{1-\beta^2} = \frac{t}{\gamma}.$$

- De **relativistische snelheidsfactor** is

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

  Deze factor wordt voor snelheden in de buurt van de lichtsnelheid zeer groot.

- Voor deeltjes die met de lichtsnelheid bewegen, zoals een **foton**, geldt $\beta = 1$: in hun stelsel staat de tijd zelfs stil.

- Het verschil in tijdsduren leidt tot de **tweelingparadox**: van een tweeling Vera en Nora gaat Vera op reis en keert daarna weer terug. Vera zou bij terugkeer het jongste moeten zijn. Vanuit Vera's perspectief is echter Nora op reis geweest – maar Nora is na terugkeer beslist niet de jongste van de twee.

- Verklaring van de paradox is te vinden in een verschil tussen de reis van Vera en de zogenaamde reis van Nora: Vera heeft ten opzichte van haar omgeving een **snelheidsverandering** ondergaan, Nora niet. Er blijkt geen inconsistentie van de relativiteitstheorie te zijn.

Wat je moet kunnen…

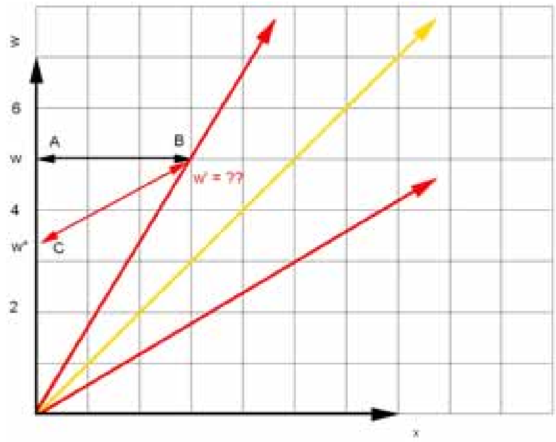
- Je moet kunnen bepalen met welke tijdstippen een tijdstip gelijktijdig is in verschillende stelsels.
- Je moet het begrip tijdrek en de formule ervoor kunnen toepassen.
- Je moet de tweelingparadox kunnen uitleggen

Opgaven

48 Wereldlijnen

a. Teken in figuur 4.9 het punt op de w' - as dat gelijktijdig is met w* volgens de zwarte waarnemers.

b. Teken in figuur 4.9 het punt op de w' - as dat gelijktijdig is met w volgens de rode waarnemers.



Figuur 4.9 Wat wijst het rode horloge aan?

§4.2

49 In een ruimteschip

a. Als je in een snelle raket weg van de aarde vliegt, zou je dan merken dat je polsslag een andere frequentie heeft?

b. Dat een Aardse waarnemer de tijd in een raket langzamer ziet lopen: is dat schijn of werkelijkheid?

c. Als een ruimteschip bij de start een lichtsignaal geeft, en daarna gedurende een uur, gemeten op de klok in het ruimteschip, elke zes minuten weer één, hoeveel lichtsignalen zal het dan uitzenden?

De klok van een persoon die ten opzichte van jou beweegt, loopt langzamer, volgens $w' = w \cdot \sqrt{1-\beta^2}$.

d. Als de klok een knipperlicht heeft, knippert die dan volgens jou met een andere frequentie dan volgens de reiziger in de raket?

e. Maakt het hierbij uit of zij naar je toe beweegt of van je af?

50 Een vliegreis

In het dagelijks leven is van de tijdkrimp niets te merken. Bereken hoeveel je horloge tijdens een raketreis van 10 uur achter gaat lopen ten opzichte van een klok op aarde, als je reist met een snelheid van 5000 km/h.

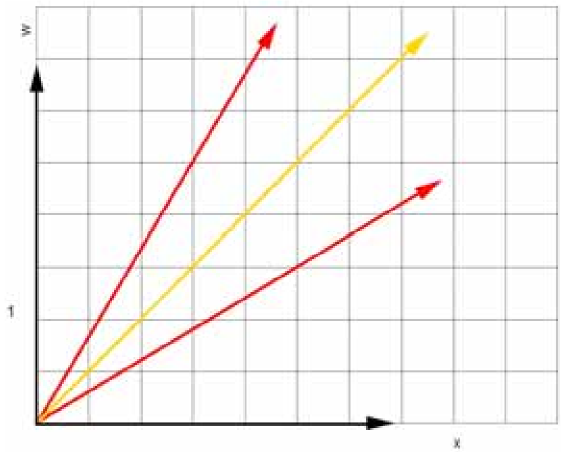
Opmerking: tijdens het reizen volg je de kromming van de aarde. Strikt genomen vormen jouw klok en die op de aarde geen inertiaalstelsel. Verwaarloos dit effect bij je berekening.

Er is nog een (nieuw) aspect dat je moet verwaarlozen: boven de aarde is het gravitatieveld zwakker dan op aarde. Dit leidt tot een iets sneller lopende klok.
Circa 30 jaar geleden is dit effect bij vliegtuigen in Amerika gemeten. Een vliegtuig maakte een reis waarbij een atoomklok aan boord was. Na de reis bleek die niet meer gelijk te lopen met de atoomklokken op aarde. Het verschil in tijdaanwijzing was precies in overeenstemming met wat de relativiteitstheorie voorspelde!

51 De tikken van een bewegende klok in een diagram

In figuur 4.10 is een zwart en een rood stelsel getekend. Van het zwarte stelsel is het punt w = 1 vermeld.

a. Bepaal aan de hand van figuur 4.10 de relativistische snelheidsfactor γ.
b. Bereken de waarde van w', als w = 1.
c. Geef met stippen de punten aan met x'-coördinaat x'=0 en w'=1,2,3.



Figuur 4.10 De rode tijd-as indelen

52 Het verval van muonen in de atmosfeer

Muonen zijn op elektronen lijkende, maar instabiele, deeltjes die op ca 20 km hoogte in de atmosfeer ontstaan bij de wisselwerking tussen kosmische straling en (deeltjes in) de atmosfeer.

Zij hebben een halveringstijd van ca. $1,5 \cdot 10^{-6} s$. Dat wil zeggen dat na die tijd van bijvoorbeeld 100 muonen er nog 50 over zijn.
Stel dat de muonen met snelheid 0,995 c naar de aarde bewegen. Eerst nu wat berekeningen, gebruikmakend van de Newtoniaanse ideeën.

a. Bereken dan hoe lang zij over die 20 km doen.
b. Bereken met je antwoord op vraag a hoeveel halveringstijden zij over die reis doen.
c. Bereken hoeveel maal zo zwak de muonenstroom op aarde is als op 20 km hoogte.

In werkelijkheid blijkt uit metingen dat de muonenstroom die de aarde bereikt slechts 21x zo zwak is als op 20 km hoogte! Dit is toe te schrijven aan de tijduitrekking. Daarom opnieuw berekeningen, maar nu volgens Einstein.

d. Bereken, uitgaande van de muonensnelheid van 0,995 c (ten opzichte van de aarde gemeten), hoe groot de relativistische snelheidsfactor γ is.
e. Bereken met die relativistische snelheidsfactor γ hoe groot de halveringstijd is van deze snel bewegende muonen die een stilstaande Aardse waarnemer meet.
f. Leg uit dat dit antwoord in overeenstemming is met de afzwakking van de muonenstroom met slechts een factor 22.

53 Een experiment om de tijdrek mee te bepalen

Een gedachte-experiment. In een snelbewegende trein bevinden zich twee spiegels boven elkaar, met hun spiegelende vlakken evenwijdig aan de vloer. Een lichtdeeltje (foton) kaatst van spiegel naar spiegel. De regelmaat waarmee de spiegels getroffen worden, kun je opvatten als het tikken van een klok.
Bob en Alice kijken naar die "klok". Bob beweegt met de trein mee, Alice staat buiten. De trein beweegt ten opzichte van Alice met snelheid v.
Hieronder de gebeurtenissen, zoals door Bob en Alice waargenomen:
Als het foton van de onderste spiegel naar boven gaat, heeft het in Bob's stelsel een afstand L_0 afgelegd; de tijd die dit volgens Bob in beslag neemt noemen we Δt_{Bob}.

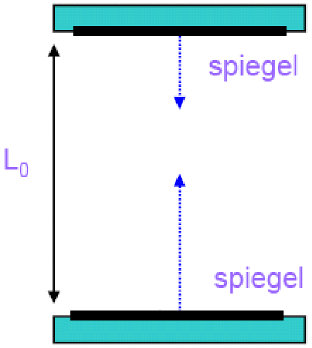
a. Leg uit dat AB' in het stelsel van Alice gelijk is aan $v \cdot \Delta t_{Alice}$.

b. Bereken (in formulevorm) de afstand AB in het stelsel van Alice.

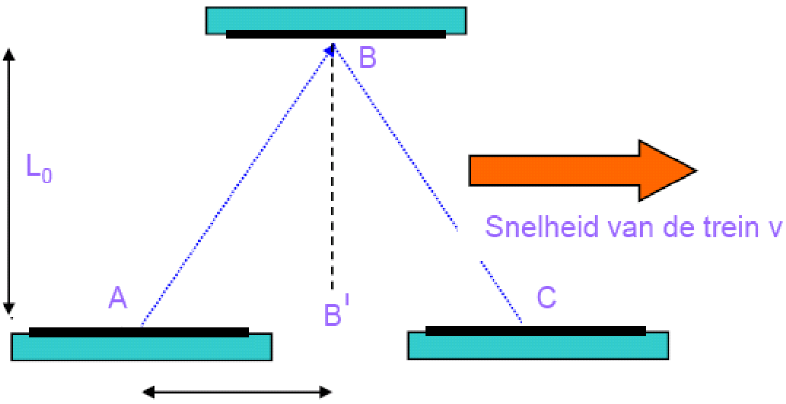
c. Druk de tijdsduren Δt_{Bob} en Δt_{Alice} uit in L_0, c en v.

d. Toon aan dat ook in dit gedachte-experiment geldt: $\Delta t_{Alice} = \gamma \cdot \Delta t_{Bob}$

Zie http://www.einstein-online.info/de/vertiefung/LichtuhrZeitdilatation/index.html voor een animatie hiervan.



Figuur 4.11a Wat Bob ziet.



Figuur 4.11b Wat Alice ziet.

§4.3

54 * Een deeltjesversneller

De eerder genoemde muonen bevinden zich nu in een grote, cirkelvormige deeltjesversneller. Zij bewegen in een bundel met grote snelheid in een cirkelbaan door een vacuüm gepompte buis.

a. Vormen de waarnemer in het laboratorium en de muonen een inertiaalstelsel?

b. Verwacht je dat de waargenomen halveringstijd verschilt van de halveringstijd in een ruststelsel? Licht toe.

c. Zo ja: neem je een grotere of een kleinere halveringstijd waar?

55 Een drieling

Op aarde woont een tweeling, Alice en Charlotte. Bob is even oud maar woont op een planeet bij een ver weg gelegen ster. Neem aan dat de aarde en de andere planeet ten opzichte van elkaar in rust zijn. Alice besluit op haar 21e verjaardag bij Bob langs te gaan. Omdat ze niet veel tijd heeft neemt ze een snelle raket. Reizend met snelheid 0,8 c overbrugt zij de afstand van 4 lichtjaar in relatief korte tijd.

a. Hoe oud is Bob als Alice bij hem arriveert?

b. Hoe oud is Alice op dat moment?

Na een jaar bij Bob doorgebracht te hebben reist Alice terug.

c. Hoe oud zijn Alice en Charlotte als zij weer verenigd worden?

Bij vraag B maak je gebruik van $w' = w \cdot \sqrt{1-\beta^2}$. In de 5 jaar reistijd die je verwacht, gebruik makende van de Newtonse wetten, wordt Alice slechts 3 jaar ouder. Het licht doet over de overbrugde afstand 4 jaar.

d. Is het niet in tegenspraak met het gegeven dat niets sneller dan het licht kan dat een afstand van 4 lichtjaar door Alice in 3 jaar kan worden afgelegd?

56 Tijdreizen?

a. Van een tweeling maakt één kind een ruimtereis. Is het mogelijk dat zij terugkeert voordat haar tweelingbroertje werd geboren?

b. Kunnen ouders die een ruimtereis maken jonger dan hun achtergebleven kinderen zijn als zij naar de aarde zijn teruggekeerd?

§4.4

57 *Plaatsbepaling met behulp van GPS

Hoe belangrijk de zeer nauwkeurige tijdmetingen zijn, rekenen we uit voor een GPS-systeem dat gebruik maakt van geostationaire satellieten.
Boven de evenaar draaien op ca. 36000 km hoogte zogenaamde geostationaire satellieten. Die draaien net als wij in één dag een omloop rond de Aardas. De snelheid van die satellieten bedraagt ten opzichte van ons $2,8 \cdot 10^3\ ms^{-1}$, zo nemen we hier aan.

Hoe belangrijk het is om met de relativiteitstheorie te werken blijkt uit de volgende vragen.

a. Hoe lang is het GPS-signaal, dat met de lichtsnelheid reist, onderweg van satelliet naar ontvanger?

De klok in de satelliet loopt wat ons betreft te langzaam!

b. Bereken hoe lang 3 Aardse uren duren, als we die aflezen op de satellietklok.

Je maakt een reis van 3 uur. Aan het begin daarvan staan jouw ontvangerklok en die van de satelliet nog gelijk. Als je na 3 uur jouw afstand tot de satelliet bepaalt, zonder rekening te houden met het tijdverschil uit vraag b, krijg je een verkeerde waarde.

c. Hoeveel meter zit die er naast?

De berekende fout in de afstand kan er net voor zorgen dat het navigatiesysteem een straat te vroeg laat afslaan. En als de satellietklokken niet regelmatig gesynchroniseerd zouden worden met die op aarde zou het hele GPS-systeem na een paar dagen onbruikbaar zijn.
Een praktische toepassing van de relativiteitstheorie waarvan de bedenker niet had kunnen dromen!

Antwoorden tekstvragen

T.21

a. w´
b. w
c. w*

T.22

w´= w/γ . Omdat w´=c.t´ en w=c.t geldt dan ook t´= t/γ. t´= 120 s.

$$\gamma = 1 / \sqrt{1 - 0,5^2} = 4/3.$$

t = 4/3 . 120 = 160 s.
Het contact is op de controletoren 160 s verbroken.

T.23

De reiziger in figuur 4.3 doorloopt de zwarte tijdsduur w_a - w_b razendsnel.
Terwijl de achterblijvers op aarde verouderen, doet de reiziger dat nauwelijks. Wanneer de ouders de getekende reis maken, kan het zijn dat zij bij terugkeer jonger zijn dan hun kinderen.

T.24

AB duurt 5/(5/4)=4 jaar.
CB duurt 4/(5/4)=3,2 jaar
DB duurt 5 jaar.
Deze antwoorden zijn in beide figuren geldig.

5 De Lorentz-transformaties en het ruimte-tijdinterval

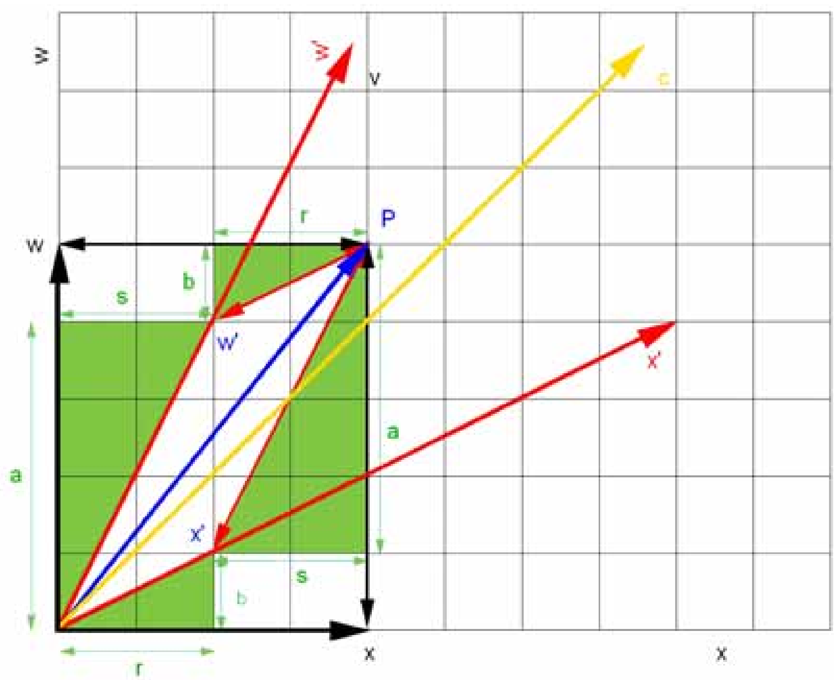
Maak je geen zorgen over je problemen met wiskunde. Ik kan je verzekeren dat de mijne nog groter zijn.

Wat is het wiskundige verband tussen bewegende coördinatenstelsels?

5.1 Lorentz-transformaties

Tot nu toe hebben we het steeds gehad over verschillende referentiekaders met elk hun eigen coördinatenstelsel, zoals het zwarte en het rode stelsel. Deze beschouwingen werpen een belangrijke algemene vraag op over de relatie tussen coördinatenstelsels die horen bij twee inertiaalwaarnemers.

Als een gebeurtenis P de coördinaten (*w, x*) heeft in het zwarte (rust)stelsel en de coördinaten (*w′, x′*) in een rood stelsel dat zich voortbeweegt met een relatieve snelheid $\beta = v/c$, wat is dan het algemene verband tussen de coördinaten (*w, x*) en (*w′, x′*)? Kortom, we willen weten wat de uitdrukking van de coördinaten *w′* en *x′* is in termen van *w* en *x* (of andersom). Als we dan het 'wanneer en waar' van een gebeurtenis weten in het ene stelsel, kunnen we direct berekenen wanneer en waar die plaatsvond in het andere. Dus als de rode waarnemer meldt dat hij op een bepaald tijdstip en op een bepaalde plaats iets laat ontploffen, dan kan de zwarte waarnemer weten waar en wanneer deze explosie voor hem plaats vindt! Je snapt natuurlijk dat deze relatie afhangt van β. We zullen het verband afleiden met behulp van dezelfde soort figuren en meetkundige verbanden die we tot nu toe hebben gebruikt.
De gezochte relaties zijn de befaamde **Lorentz-transformaties**, die ons in staat stellen gegevens van het ene stelsel naar het andere te vertalen of *transformeren*. We kennen er al een voorbeeld van: de formule voor de tijdsuitrekking, want die geeft een eenvoudige uitdrukking voor *w′* in termen van *w*. Hieronder een meetkundige afleiding van de relatie tussen twee coördinatenstelsels.
De verbanden die we zoeken zijn eenvoudig af te leiden uit de figuur 5.1, dankzij het feit dat de groene driehoeken gelijkvormig zijn of zelfs alleen gedraaid.



Figuur 5.1 Afleiding van de Lorentz-transformaties

1 De gebeurtenis P aangegeven in blauw, heeft op de assen van het rode coördinatenstelsel de coördinaten *w′* en *x′*. In het zwarte ruststelsel zijn de coördinaten ervan *w* en *x*.

2 Uit de figuur is af te lezen dat $w = a + b$ en $x = r + s$.

3 In paragraaf 3.4 hebben we al uitgebreid gebruik gemaakt van het feit dat

$$\frac{s}{a} = \frac{v \cdot t}{c \cdot t} = \frac{b}{r} = \beta .$$

In de uitleg over de tijdsuitrekking hebben we besproken dat $a = \gamma \cdot w'$, waarbij

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

Invullen in de verhouding $s/a = \beta$ levert op dat $s = \beta \cdot \gamma \cdot w'$. Uit de gelijkvormigheid van de grote en kleine driehoeken concluderen we dat ook moet gelden dat $r = \gamma \cdot x'$ en $b = \beta \cdot r = \beta \cdot \gamma \cdot x'$

4 Nu hoeven we alleen maar de uitdrukkingen uit stap 3 in te vullen in de formules uit stap 2. We vinden dat

$$w = a + b = \gamma \cdot w' + \beta \cdot \gamma \cdot x'$$

en

$$x = r + s = \gamma \cdot x' + \beta \cdot \gamma \cdot w' .$$

Deze eenvoudige transformatieregels om van de ruimtetijdcoördinaten (*w′, x′*) over te gaan naar de coördinaten (*w, x*) hebben alle symmetrie-eigenschappen die we op grond van de figuur zouden verwachten. Bovendien gedragen ze zich op de juiste manier in het limietgeval $v \to 0$ (waarbij $\beta \to 0$ en $\gamma \to 1$).

Zo vinden we de formules voor de Lorentz-transformaties.

Lorentz-transformaties

Het verband tussen de coördinaten (*w*, *x*) en (*w′*, *x′*) van twee coördinatenstelsels die ten opzichte van elkaar bewegen met snelheid *v* wordt gegeven door:

$$w = \gamma \cdot w' + \beta \cdot \gamma \cdot x'$$
$$x = \gamma \cdot x' + \beta \cdot \gamma \cdot w'$$

Symbolen: β is de afkorting voor de verhouding v/c, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ de relativistische snelheidsfactor en $w = c \cdot t$.

Dit zijn belangrijke relaties die zeer algemeen toepasbaar zijn, en er valt het een en ander over op te merken.

5.2 Lorentz-invariantie

In veel leerboeken worden de Lorentz-transformaties als uitgangspunt genomen voor de behandeling van de relativiteitstheorie. Historisch gezien is dat logisch, omdat de formules al rond 1900 werden opgetekend door de Nederlandse natuurkundige Hendrik Antoon Lorentz. Hij leidde ze af uit de theorie van Maxwell, het stelsel van vergelijkingen dat een beschrijving geeft van alle elektromagnetische verschijnselen. Lorentz ontdekte dat de Maxwell-vergelijkingen onveranderd bleven als hij de coördinaten met accent volgens de bovenstaande transformatie verving door die zonder accent. In het wis- of natuurkundige jargon zeg je dan dat de vergelijkingen **invariant** zijn onder de Lorentz-transformaties.

Het is fascinerend te bedenken dat de centrale vergelijkingen van Einsteins theorie eigenlijk al op papier stonden voordat Einstein er aan toe was. Het probleem was niet zozeer het vinden van het antwoord, maar het stellen van de juiste vraag.

Oorspronkelijk had men een totaal andere verklaring voor deze invariantie dan nu. Men geloofde dat de Maxwell-vergelijkingen alleen hun magnifieke eenvoudige vorm aannamen in het unieke stelsel dat in rust was ten opzichte van de ‘ether’, een ongrijpbaar medium dat geacht werd de gehele ruimte te vullen. Dit medium was noodzakelijk, zo dacht men, om de voortplanting van elektromagnetische golven (zoals licht en radiogolven) mogelijk te maken. De radicale nieuwe interpretatie waar Einstein mee kwam, hield in dat de ether niet bestond en dat er dus geen ‘voorkeursreferentiekader’ bestond. Elektromagnetische golven konden zich kennelijk in vacuüm voortplanten, een visie die overeenkwam met de uitkomsten van een beroemd experiment dat al vóór de relativiteitstheorie was uitgevoerd door Michelson en Morley (zie par. 1.4), waarin zij aantoonden dat licht zich met dezelfde snelheid voortplant in alle richtingen. Dat resultaat ging in tegen het algemeen aanvaarde idee dat de aarde in beweging was ten opzichte van de ether. Zo bestond er een robuuste experimentele onderbouwing voor het tweede postulaat van Einstein, al is het niet duidelijk in hoeverre hij hiervan op de hoogte was.

De cruciale ontdekking was dat — terwijl de mechanica van Newton ‘invariant’ was onder de eerder genoemde Galileï-transformaties — de elektromagnetische theorie van Maxwell invariant was onder de daarvan afwijkende Lorentz-transformaties. Als het relativiteitspostulaat moet gelden en alle natuurkundige vergelijkingen er hetzelfde moeten uitzien voor alle inertiaalwaarnemers, dan zal een van beide theorieën moeten worden aangepast. Dit was het inzicht dat Einstein ertoe bracht de mechanica van Newton — tot dan toe als onaantastbaar beschouwd — grondig te herzien, terwijl hij de theorie van Maxwell ongemoeid liet. De conclusie is dus dat de eis van invariantie onder Lorentz-transformaties de wiskundige uitdrukking is van beide postulaten van de speciale relativiteitstheorie.

T.25 Van w naar w’ en van x naar x’

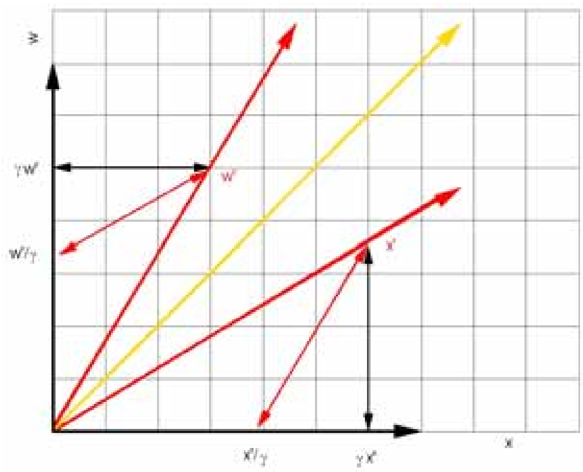
De Lorentz-transformaties krijgen een eenvoudiger vorm als één van beide coördinaten (de tijd- of de ruimtecoördinaat) de waarde 0 heeft.

a. Neem een punt op de rode w’-as; zie figuur 5.2. Wat zijn de corresponderende zwarte coördinaten volgens de Lorentz-transformaties?

b. Beredeneer dat je hiermee de uitdrukking voor de tijdrek hebt gevonden.

c. Welk punt op de zwarte w-as transformeert volgens de Lorentz-transformaties naar (w’, 0)?

d. Welke zwarte coördinaten heeft een willekeurig punt op de rode x’-as volgens de Lorentz-transformaties?



Figuur 5.2 Lorentztransformaties voor punten òp de assen

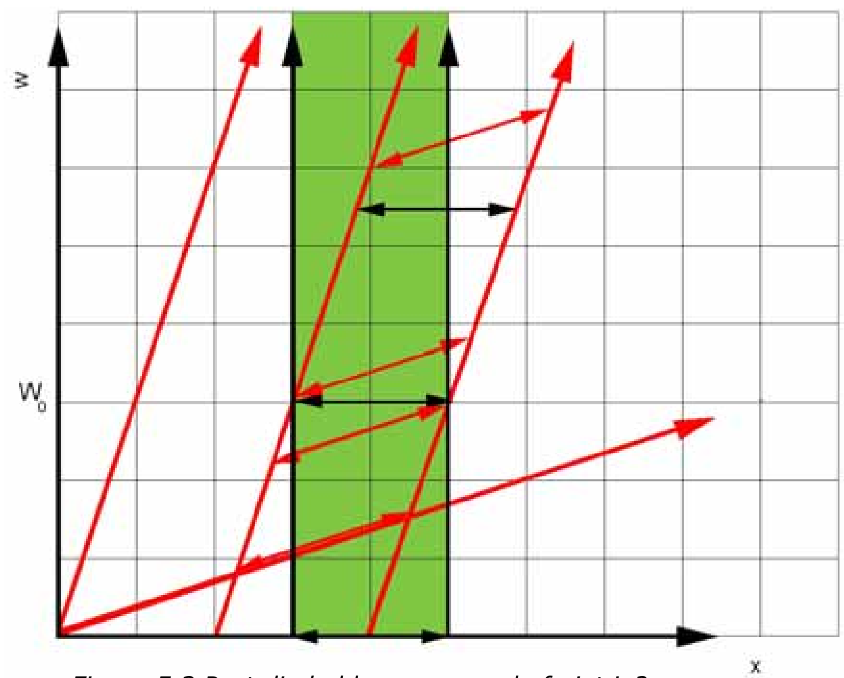
5.3 Past de ladder in de schuur?

Misschien is het je opgevallen dat ruimte en tijd in de uitdrukkingen voor de Lorentz-transformaties op volstrekt gelijke voet behandeld worden. Aangezien we het effect van de tijdsuitrekking al zijn tegengekomen, ligt het voor de hand je af te vragen of er ook een fysisch effect optreedt voor de ruimtelijke coördinaat. Dat is zowaar het geval: het wordt de **FitzGerald-Lorentz-contractie** genoemd.

Om dit effect te illustreren, beschouwen we een paradox die zich voordoet als we willen weten of een ladder in een schuur past. Deze paradox betreft een situatie met een stilstaande schuur en een ladder die er met grote snelheid doorheen raast. De stilstaande waarnemer ziet een gekrompen versie van de ladder, die volgens hem precies in de schuur past. Voor de voortsnellende waarnemer die de ladder met zich meevoert, is juist de schuur gekrompen en de ladder niet, dus volgens haar past de ladder met geen mogelijkheid in de schuur. Hoe bepalen we wie er gelijk heeft? Past die ladder er nou wel of niet in?

In figuur 5.2 kun je zien wat er gaande is. In het zwarte ruststelsel correspondeert het groene gebied met de stilstaande schuur: de zwarte pijlen die omhoog wijzen, zijn de wereldlijnen van de voor- en achterdeur van onze (eendimensionale) schuur. De ladder, de tweepuntige pijl, beweegt met een constante snelheid in de positieve x-richting en is in rust met betrekking tot het rode stelsel. De twee meest rechtse schuin omhoog lopende rode lijnen zijn de wereldlijnen die corresponderen met de beide uiteinden van de ladder.

Uit de figuur wordt eigenlijk meteen duidelijk hoe de paradox ontstaat. In het zwarte stelsel worden afstanden per definitie gemeten langs de horizontale zwarte lijnen. We zien dat de ladder in dat geval precies in de schuur past: op het tijdstip $w = w_0$ vallen de beide uiteinden van de ladder net binnen de schuur. Maar voor de rode waarnemers voltrekt zich een heel ander schouwspel: op het moment dat het voorste uiteinde van de ladder bij de achterdeur van de schuur aankomt, bevindt het andere uiteinde ervan zich nog buiten de schuur. De bewegende waarnemer concludeert dus terecht dat de ladder niet in de schuur past. Waar het om draait is het feit dat bij een lengtemeting per definitie het begrip ‘gelijktijdigheid’ betrokken is. Omdat gelijktijdigheid afhankelijk is van het stelsel van de waarnemer, geldt dat ook voor elke uitspraak over de verhouding tussen de lengte van voorwerpen die zich met verschillende snelheden voortbewegen.

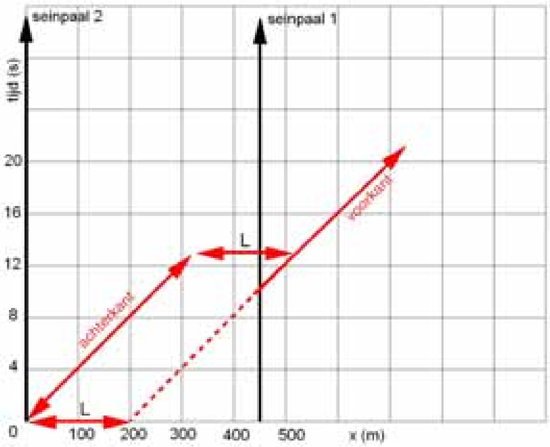


Figuur 5.3 Past die ladder er nou wel of niet in?

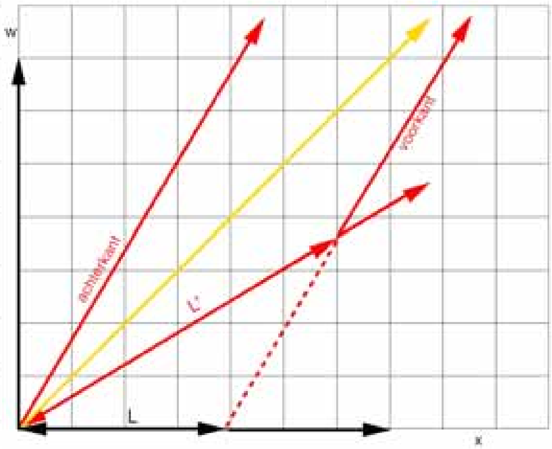
Het antwoord op de vraag 'Past de ladder in de schuur of niet?' luidt dus: 'Dat hangt ervan af.' Niet alleen van de ladder, maar ook van de waarnemer. De zwarte en rode waarnemers spraken allebei de waarheid, tenminste, hun waarheid. Bij de ladderparadox hebben beide waarnemers gelijk. De paradox berust er op dat wij gewend zijn uitspraken te doen die in alle omstandigheden gelden. Bij lage snelheden (uit het dagelijks leven) komen we hierdoor niet in problemen. Juist daarom houden we dan ook geen rekening met veranderingen die het gevolg zijn van grote onderlinge snelheden.

Dit doet zich in het bijzonder voor bij een lengtemeting. Stel dat een trein een onbekende constante lengte *L* heeft en met constante snelheid 25 m/s rijdt. Van de trein is bekend dat op *t* = 0 s zijn achterkant een seinpaal passeert en dat zijn voorkant op *t*=10 s een andere seinpaal passeert, op 450 m afstand van de eerder genoemde. Hoe lang is de trein? In een Newtoniaans plaats-tijddiagram (figuur 5.4) valt dit snel in te zien: *L* = 200 m. Wat je doet is de plaatscoördinaten van voorkant en achterkant op één tijdstip (*t* = 0 s of *t* = 12,5 s, welk tijdstip doet er niet toe) vaststellen. De treinlengte is het verschil van die twee plaatscoördinaten. Ook doet het er niet toe in de Newtoniaanse visie of de trein beweegt of stilstaat.

Bij Einstein wordt lengte op dezelfde manier gemeten (zie figuur 5.5), zij het dat de rode tijd-as gekanteld is, waardoor de rode waarnemer een andere lengte meet dan de zwarte: $L = L'/\gamma$. De zwarte waarnemer meet een kortere treinlengte dan de rode. De rode heeft dus meer van zijn lengte-eenheden nodig dan de zwarte om de treinlengte te beschrijven. Zwart concludeert dat ten gevolge van de beweging de rode meetlatten verkort zijn.



Figuur 5.4 Treinlengte bij Newton



Figuur 5.5 Relativistische treinlengte

Er zijn nu twee transformatieformules, één voor de tijd en één voor de afstand.

Tijdrek en lengtekrimp

Het verband tussen de tijdsaanduiding tussen twee klokken die ten opzichte van elkaar bewegen met snelheid *v* wordt gegeven door:

$$t' = \frac{t}{\gamma} = t \cdot \sqrt{1-\beta^2}$$

De lengtekrimp van een voorwerp dat beweegt met snelheid *v* wordt geven door

$$L = \frac{L'}{\gamma} = L' \cdot \sqrt{1-\beta^2}$$

Lengtes transformeren dus niet op dezelfde manier als de plaatscoördinaten.

Symbolen: L is de lengte voor de meebewegende waarnemer (zwart) en L' is de lengte voor de waarnemer die beweegt ten opzichte van dat voorwerp (rood); met $\beta = v/c$ de relatieve snelheidsparameter.

Het succes van de relativiteitstheorie is voor sommigen de rechtvaardiging tot het innemen van het gemakzuchtige filosofische standpunt, dat 'alles afhankelijk is van het standpunt van de waarnemer' – waarmee de door Einstein bewandelde weg eigenlijk ook al uitgezet zou zijn in het hoofd van de filosoof, met uitzondering waarschijnlijk van wat wiskundige regeltjes. Echter, niet alles is relatief – ook niet bij Einstein. Als je goed kijkt heeft Einstein slechts één gedurfde verschuiving aangebracht – wel met vergaande consequenties. Bij Newton was de tijd absoluut en de lichtsnelheid relatief, bij Einstein is dat net andersom. Met als gevolg dat, terwijl in de Newtonse mechanica tijd en lengte beide absolute grootheden zijn, bij Einstein die van de bewegingstoestand van de waarnemer af hangen.
Welk van beide inzichten, dat van Newton of dat van Einstein, de voorkeur verdient, wordt vervolgens niet door filosoferen bepaald: het zijn de uitkomsten van experimenten die dwingen het ene stelsel te verwerpen en gebruik te maken van het andere.

T.26 Lengte

Je bent op weg naar Jupiter in een raket. Je neemt een liniaal mee van 30 cm. Een waarnemer op aarde zegt dat de liniaal maar 20 cm is.

a. Hoe lang zeg jij dat de liniaal is?

b. Welke snelheid heeft de raket?

T.27 Krimpoorzaak

De belangrijkste reden dat een voorwerp verkort wordt waargenomen in een stelsel waarin het voorwerp beweegt, in vergelijking met het ruststelsel is dat…

a. als een voorwerp met relativistische snelheid beweegt er een kracht werkt die het voorwerp samendrukt;

b. gebeurtenissen niet in ieder stelsel gelijktijdig zijn;

c. de liniaal die in het bewegende stelsel wordt gebruikt lengtekrimp ondervindt;

d. de klokken in het bewegende stelsel trager lopen.

5.4 Verificaties van relativiteit

Zoals we zagen leidt de relativiteitstheorie tot paradoxen, die niet bestaan in de Newtonse theorie. Omdat die laatste door ons gebruikt wordt in het dagelijks leven, valt onze intuïtie juist samen met de uitkomsten die de natuurkunde volgens Newton oplevert. Daarom staan we vreemd tegenover de tegenintuïtieve uitkomsten van de relativiteitstheorie, zoals de tweelingparadox en de lengtekrimp (ladder in de schuur). Hoeveel experimentele ondersteuning, kun je je afvragen, is er eigenlijk voor de theorie van Einstein?
Daar is allereerst de tijdmeting (met een atoomklok) in een vliegtuig. De klok in het vliegtuig blijkt langzamer te lopen dan die op de grond. Dan zijn er de muonen die langer leven, of verder kunnen reizen, dan je kunt berekenen door toepassing van de natuurkunde volgens Newton. Maar het blijkt dat ook in door mensen gemaakte laboratoria met de methodes van Einstein gewerkt moet worden.

Figuur 5.6 Een muonenshower.

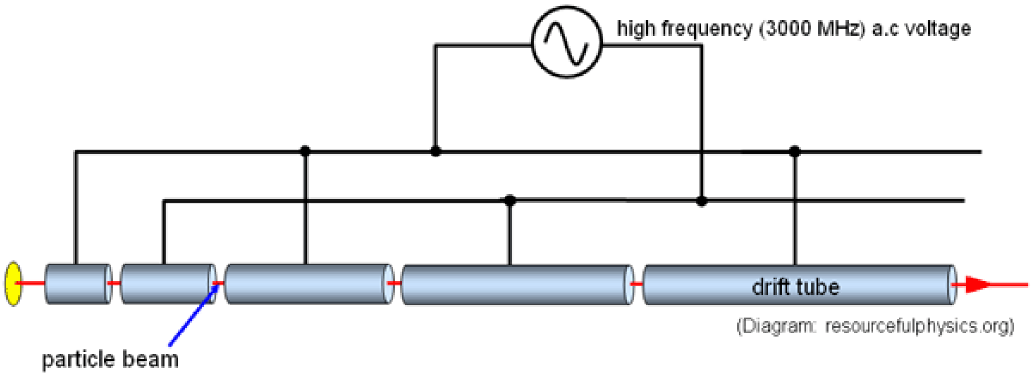
Meten aan muonen - het HISPARC-project

Continu bereiken deeltjes uit de kosmos de aarde. Uit de energie en richting van de deeltjes is af te leiden wat de bron is van de deeltjes. Voor een deel zijn deze minimeteorieten goed begrepen, maar heel incidenteel bereikt een zeer hoogenergetisch deeltje de aarde. Het is vooralsnog onbekend hoe en waar deze hoogenergetische deeltjes hun oorsprong vinden. Wanneer de deeltjes onze dampkring binnendringen bosten ze met atoomkernen (of delen van atoomkernen). Afhankelijk van de hoogte van de energie van het primaire deeltje, ontstaat een brede lawine van secundaire deeltjes (shower), waaronder veel muonen. Des te hoger de energie, des te groter het oppervlak op aarde dat door de lawine getroffen wordt. Voor detectie van deze hoog energetische kosmische stralen is het noodzakelijk om een oppervlak van 100 km^2 of meer te bemeten met behulp van een netwerk van deeltjesdetectoren.

Zo'n shower komt met een beetje geluk terecht op de detectoren, bestaande uit scintillatoren, die boven op de daken van de middelbare scholen opgesteld staan. De meetapparatuur wordt aangeleverd door de universiteit, maar door de leerlingen zelf in elkaar gezet. De kans om een shower waar te nemen wordt steeds groter, naarmate meer scholen deze apparatuur op hun daken hebben staan. Met behulp van GPS (zie eventueel hoofdstuk 4) worden plaats en tijdstip van een inslag in de meetapparatuur vastgesteld. Wanneer twee of drie niet te ver van elkaar verwijderde detectoren vrijwel tegelijkertijd een inslag registreren, is het waarschijnlijk dat deze afkomstig zijn uit dezelfde shower. Door combinatie van de gegevens wordt het dan mogelijk de bewegingsrichting en de energie van het hoogenergetische primaire deeltje terug te rekenen. En op die manier probeert men te achterhalen wat de bron van die deeltjes is geweest.

De lineaire versneller

In de hoge energiefysica versnelt men deeltjes als protonen en elektronen tot vlak bij de lichtsnelheid. Door ze dan te laten botsen hoopt men uit de bij die botsing ontstane brokstukken kennis te krijgen omtrent de opbouw van de materie – nog een laag dieper dan op het niveau van protonen. Een van de gebruikte methodes om deeltjes te versnellen is met behulp van een zogeheten lineaire versneller. Deze bestaat uit achter elkaar geplaatste holle metalen cilinders, waardoorheen een bundel deeltjes, laten we zeggen protonen, vliegt. Tussen de buisjes worden de protonen steeds versneld; als ze in de buisjes zijn voelen ze geen spanning (kooi van Faraday) en blijft hun snelheid constant.



Figuur 5.7 Schematische afbeelding van een lineaire versneller

Bij het verlaten van het buisje A en het toevliegen naar B moet A positief zijn en B negatief, om versnelling te veroorzaken. Terwijl het proton in B is moet B positief worden en de volgende C negatief. Er is dus een snel wisselende spanning nodig. Figuur 5.7 geeft een beeld van dit idee.

Zoals je ziet worden de buisjes steeds langer: door hun grotere snelheid dreigen de protonen anders te vroeg uit een buisje weer tevoorschijn te komen. Gekozen wordt altijd voor het constant houden van de verblijftijd in een buisje – dat is technisch veel gemakkelijker dan de frequentie van de wisselspanning te verhogen. Volgens Newton zou je nu verwachten dat de buisjes aan het eind, als de protonen vrijwel de lichtsnelheid hebben, nog nauwelijks verschillen in lengte. Die verblijftijd is volgens Newton immers $\Delta t = L/v$. En of *v* nu 0,99*c* of 0,995*c* is, maakt niet veel meer uit.

Maar volgens Einstein maakt dat misschien wel uit! De door de protonen waargenomen lengte van die buisjes hangt namelijk van de onderlinge snelheid af. Zij nemen een lengte van L/γ waar. En bij $v = 0{,}99c$ heeft γ een waarde van 7, bij $v = 0{,}995c$ al een waarde van 10. Dus volgens Newton moet het laatst genoemde buisje

$$\frac{99{,}5}{99} = 1{,}005$$

maal zo lang zijn, volgens Einstein's lengtekrimp ($\Delta t = \dfrac{L}{\gamma \cdot v}$) echter $\dfrac{10}{7}$ maal zo lang.

5.5 Het ruimtetijdinterval

De coördinatenstelsels waarmee we werken in onze figuren verschillen zoals je hebt gezien in twee belangrijke opzichten van elkaar. Ten eerste is er het zwarte ruststelsel waarin de assen loodrecht op elkaar staan, terwijl de assen van elk ander stelsel niet loodrecht staan maar wel gelijke hoeken maken met die van het ruststelsel. Ten tweede moeten de eenheden langs de schuine assen worden herschaald, en wel met de relativistische snelheidsfactor γ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Laten we nu de verzameling waarnemers beschouwen die op het tijdstip nul met verschillende snelheden door de oorsprong komen. We vragen ze allemaal om op hun wereldlijn het punt (de gebeurtenis) te markeren waarop er op hun klok een tijdsduur van *s* eenheden is verstreken. Hoe ziet de verzameling gebeurtenissen die we zo vinden eruit in een ruimtetijddiagram?

De formule voor de uitrekking van de tijd leert ons dat

$$(w')^2 = (1 - \beta^2) \cdot w^2$$

en als we nu $w' = s$ kiezen, krijgen we

$$\left(1 - \beta^2\right) \cdot w^2 = w^2 - \left(\beta w\right)^2 = s^2 .$$

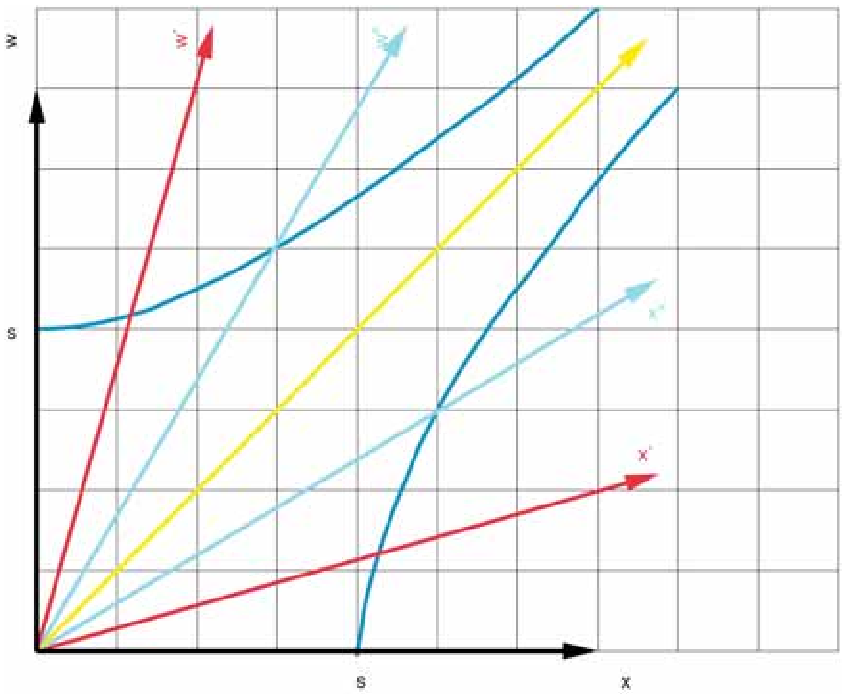
Gezien vanuit het ruststelsel wordt de afstand *x* die elke bewegende waarnemer vanuit de oorsprong heeft afgelegd, weergegeven door

$$x = v \cdot t = \frac{v \cdot w}{c} = \beta \cdot w .$$

Zo komen we uit op een verrassend eenvoudige formule voor de verzameling punten waarin de tijd voor elke waarnemer s is, die een kromme beschrijft in het (*x,w*)-vlak:

$$w^2 - x^2 = s^2$$

Hoe ziet deze kromme eruit? Misschien komt de vergelijking je bekend voor met een plus- in plaats van een minteken. In dat geval zou ze een cirkel beschrijven met straal *s* en het middelpunt in de oorsprong. Nu er een minteken staat, wordt het geen cirkel, maar een andere befaamde wiskundige kromme: een **hyperbool**. Net zoals de straal een cirkel karakteriseert, wordt onze hyperbool getypeerd door zijn snijpunt met de w-as, het getal *s*. We kunnen simpelweg verschillende waarden voor *x* invullen in de formule, uitrekenen wat de bijbehorende *w*-waarden zijn en de punten uitzetten in het ruimtetijddiagram. Door de punten met elkaar te verbinden, vinden we krommen zoals de donkerblauwe lijn in figuur 5.8.



Figuur 5.8 Ruimte- en tijd-achtige hyperbolen.

De 'horizontale' hyperbool wordt gekarakteriseerd door s = 4 en snijdt de zwarte, rode en lichtblauwe *w*-assen op de punten waar respectievelijk w = 4, w' = 4 en w'' = 4. We kunnen eenzelfde truc uithalen met meetlatten. Als we al onze waarnemers op hun wereldlijn laten aangeven waar voor hen $x' = s$ op het tijdstip nul, komen we uit op dezelfde formule, maar dan met *x* en *w* verwisseld. Dat kun je ook bereiken door s^2 te vervangen door $-s^2$ in de formule. De bijbehorende kromme is de andere blauwe hyperbool in de figuur, die de x-as snijdt in het punt *s*. Deze twee hyperbolen worden wel de ruimteachtige en de tijdachtige hyperbool genoemd. Dan is er ook nog het speciale geval voor s = 0, waarbij de hyperbolen ontaarden tot de lijnen $w = +x$ en $w = -x$, de wereldlijnen van een foton dat in de positieve of negatieve x-richting beweegt. Deze lijnen vormen ook de asymptoten voor de ruimte- en tijdachtige hyperbolen: naarmate *w* en *x* veel groter worden dan *s*, naderen beide krommen de rechte lijnen steeds meer.

Wat is de meetkundige betekenis van deze prachtige krommen? Wat stellen ze voor? Daar kunnen we achter komen door de formules voor de Lorentz-transformaties te gebruiken. Als je in de formule voor de hyperbool de uitdrukkingen invult voor *x* en *w* in termen van *w'*, *x'* en $\beta = v/c$ uit de transformatieformules in paragraaf 5.1 , kom je na enig algebraïsch gemanipuleer uit op:

$$w'^2 - x'^2 = s^2$$

Dat is dus precies dezelfde vergelijking, maar dan voor coördinaten mét accentjes. De kromme die hoort bij een bepaalde waarde van *s* blijkt **invariant** te zijn onder de Lorentz-transformaties! De afzonderlijke punten bewegen onder transformaties weliswaar heen en weer op de kromme, maar de totale verzameling punten, de hyperbool als geheel, verandert niet.

Wis- en natuurkundigen hebben het vaak over vectoren. Dat zijn een soort pijlen: ze hebben een grootte en een richting. In de euclidische meetkunde, dus in de ruimte zoals wij die kennen, is het kwadraat van de lengte *r* van een vector (*x,y*) gelijk aan de som van de kwadraten van de componenten ervan:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

De lengte van een vector verandert niet als je hem roteert. Nu kunnen we voor een vector in de ruimtetijd (*w,x*) een vergelijkbaar lengtebegrip definiëren, het ruimtetijdinterval *s*, waarvan het kwadraat juist gelijk is aan het verschil van de componenten in het kwadraat.

Ruimtetijdinterval

In de relativiteitstheorie is het **ruimtetijdinterval** *s* gedefinieerd, door het kwadraat gelijk te stellen aan het verschil van de tijdcoördinaat *w* en de ruimtecoördinaat *x* in het kwadraat:

$$s^2 = w^2 - x^2$$

Waar het om gaat in de relativiteitstheorie is dat het ruimtetijdinterval tussen twee gebeurtenissen niet verandert onder de Lorentz-transformaties; de grootte van het ruimtetijdinterval is voor alle inertiële waarnemers gelijk (invariant).

Vanwege het minteken in de definitie kan het kwadraat van het interval zowel positief zijn als negatief of nul; we spreken respectievelijk van een **tijdachtig interval**, een **ruimteachtig interval** of een **nulinterval**. Ook als we een pijl tekenen tussen twee gebeurtenissen in de ruimtetijd kunnen we die een tijdachtige, een ruimteachtige of een nulvector noemen. De vectoren in de figuur die zijn aangeduid met x, x' en x" zijn dus ruimteachtig, terwijl die met w, w' en w" tijdachtig zijn.

De ruimteachtige hyperbool (die net als de tijdas de x-as snijdt) blijkt nog om een heel andere reden interessant te zijn. Je ziet dat deze hyperbool heel goed de wereldlijn zou kunnen zijn van een of andere waarnemer. Deze persoon reist niet met constante snelheid, maar met een voortdurende versnelling in de positieve x-richting.

T.28

Twee waarnemers Bob en Charlotte bewegen ten opzichte van elkaar. Zij beschouwen beiden Charlotte's situatie. Bob zegt dat Charlotte beweegt, dus voor Bob heeft haar verplaatsing een positieve waarde. Charlotte zelf zegt dat zij stil staat en is dus van mening dat haar verplaatsing voortdurend 0 is.

a. Beredeneer dat w^2 in het stelsel van Bob de grootste waarde moet hebben.
b. Beredeneer dat Bob dus van mening is dat de tijd in zijn eigen stelsel het snelst loopt, in dat van Charlotte het langzaamst.

T.29

Een rotje ontploft. Een tweede rotje ontploft 52 nls (nanolichtseconden) later op een afstand van 25 nls. In een ander stelsel wordt gemeten dat de rotjes op een onderlinge afstand van 42 nls ontploften. Hoeveel tijd zat er tussen de twee ontploffingen in dit andere stelsel?

Begrippen

Lorentztransformaties-
Ruimtekrimp
Ruimtetijdinterval
Invariantie
Hyperbool

Samenvatting

- Waarnemers die ten opzichte ven elkaar bewegen zijn het oneens over tijdsduren – ook hun lengtemetingen verschillen. Het anders lopen van de tijd- en lengtemeting van een bewegende waarnemer wordt beschreven door de **Lorentz-transformaties**:

$$x = \gamma \cdot x' + \beta \cdot \gamma \cdot w'$$
$$w = \gamma \cdot w' + \beta \cdot \gamma \cdot x'$$

- De lengte van een voorwerp (of de afstand tussen twee gebeurtenissen) wordt verkort waargenomen in een referentiekader dat beweegt ten opzichte van dat voorwerp:

$$L = \frac{L'}{\gamma} = L'\sqrt{1-\beta^2} \text{ (met } \sqrt{1-\beta^2} < 1 \text{) .}$$

  Dit verschijnsel noemen we **lengtekrimp**.

- **Muonverval** geeft een experimenteel bewijs voor tijdrek en ruimtekrimp. Muonen zijn zeer kort levende deeltjes, die hoog in de atmosfeer gevormd worden. Volgens de Newtonse opvatting zouden zij de aarde niet kunnen bereiken zonder uiteengevallen te zijn. De relativiteitstheorie biedt de muonen die kans wel...
  1. ofwel door uit te gaan van de aarde als ruststelsel – dan verloopt het verval van de muonen veel langzamer,
  2. ofwel door uit te gaan van een ruststelsel dat meereist met de muonen – dan is de afstand die de muonen af moeten leggen sterk verkort.

- Voor bewegende waarnemers is de tijd relatief. Ook afstanden zijn relatief. Eén grootheid in ruimtetijd heeft voor alle waarnemers dezelfde waarde en is dus absoluut. Die grootheid is het **ruimtetijdinterval**

$$s^2 = w^2 - x^2$$

  Men zegt: het ruimtetijdinterval is invariant.

- De grafische figuur die bij deze formule hoort is een **hyperbool**. Voor de hyperbolen die in dit hoofdstuk getekend zijn geldt steeds $s^2 = w^2 - x^2$ = constant.

Wat je moet kunnen...

- Je moet ruimtetijdcoördinaten uit het ene referentiekader kunnen omrekenen naar een ander referentiekader met behulp van de Lorentz-transformaties.
- Je moet in een ruimtetijddiagram kunnen aantonen dat verschillende inertiaalwaarnemers van mening kunnen verschillen over de lengte van een voorwerp.
- Je moet kunnen uitleggen dat inertiaalwaarnemers het altijd eens zullen zijn over de grootte van het ruimtetijdinterval.

Opgaven

§5.1

58 *Heen en terug transformeren

Laat zien dat de formules waarin x' en w' worden uitgedrukt in termen van x en w kunnen worden verkregen uit de hier gegeven formules als je v vervangt door -v. Precies wat je zou verwachten in de relativiteitstheorie.

§5.2

59 Een voetbalveld

Een voetbalveld heeft afmetingen 50x100 m. Je vliegt vlak over het veld en dat ziet er uit als een vierkant!
Met welke snelheid vlieg je, en in welke richting?

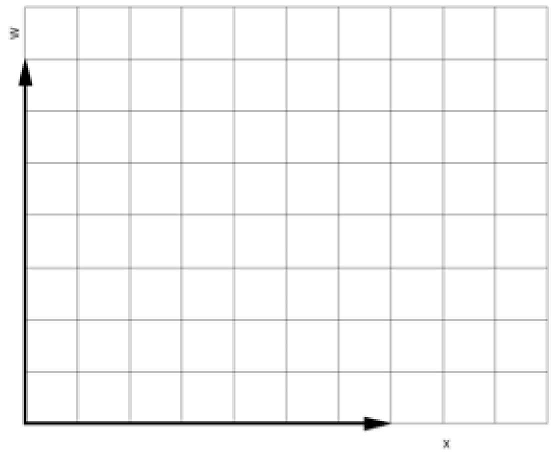
60 Nogmaals: plaats en tijd zijn relatief

Neem een zwart en een rood stelsel. Bob is in rust in het rode stelsel, Alice in het zwarte stelsel. Bob beweegt met snelheid 0,6c ten opzichte van het zwarte.

a. Teken dit in figuur 5.9
b. Neem het tijdstip t = 5; geef aan op welke plaats in het zwarte stelsel Bob zich bevindt.
c. Bereken de tijd die Bob's klok aangeeft op t = 5.

Voor Bob beweegt Alice met snelheid -0,6c.

d. Bereken de plaats van Alice in Bob's stelsel op je bij vraag c. gevonden tijdstip.
e. Vergelijk Bob's plaats op t = 5 met je antwoord op vraag d. en trek een conclusie.



Figuur 5.9 Tijdrek en lengtekrimp

61 Een snelle bolide

Bob zit in een snelle bolide. Hij rijdt met snelheid 0,6 c langs Alice. Op dat moment drukken beiden hun stopwatch in.

Bob rijdt op een tunnel af; alle volgende afstanden zijn vermeld in lichtseconden. De tunnelingang bevindt zich 2 lichtseconden bij Alice vandaan. De lengte van de tunnel is 3 lichtseconden. Deze afstanden zijn gemeten in het stelsel van Alice.

a. Schets een ruimtetijddiagram waarin Bob beweegt en ook de wereldlijnen van de tunnelingang en -uitgang zijn weergegeven.
b. Bereken op welke tijdstippen, in het stelsel van Alice gemeten, Bob de tunnel inrijdt en even later weer uitrijdt.

Bob ziet een tunnel met grote snelheid op zich af komen.

c. Bereken de lengte van de tunnel in het stelsel van Bob.
d. Hoe lang blijft Bob in die tunnel, volgens hemzelf?

62 *Geen krimp loodrecht op bewegingsrichting?

Beredeneer dat als er meer dan één ruimtelijke dimensie is, de dimensies loodrecht op de beweging niet krimpen. Dat kun je doen met behulp van het volgende gedachte-experiment, dat afkomstig is van Taylor en Wheeler. Een trein rijdt langs een muur, waarop een blauwe lijn is geschilderd op precies twee meter boven de grond. In de trein zit een man met een kwast met rode verf, die uit het raampje hangt omdat hij een lijn op de muur wil trekken, ook precies op twee meter hoogte boven de grond. Zal de rode lijn boven of onder de blauwe uitkomen? Begin met de aanname dat de verticale dimensie ook verkort wordt in het bewegende stelsel, en toon dan met het relativiteitspostulaat aan dat dit leidt tot een tegenstrijdigheid.

63 Nogmaals verval van kosmische muonen

In opgave 52(?) zagen we dat snelbewegende muonen voor ons langzamer vervallen ten gevolge van de tijdrek. Vanuit de muonen gezien speelt zich iets anders af, dat echter volkomen gelijkwaardig daarmee is.
Het muon ziet juist de aarde met grote snelheid op zich af komen. De 20 km, gemeten in het aardse stelsel, is in het muonstelsel veel kleiner.

a. Bereken hoe klein.
b. Hoe lang doet, in het muonstelsel gemeten, de aarde erover om de bij a gevonden afstand te overbruggen?
c. Hoeveel % (ongeveer) van de muonen is dan nog over als de aarde hen treft?

§5.4

64 *Relativiteit bij het ontwerp van een deeltjesversneller

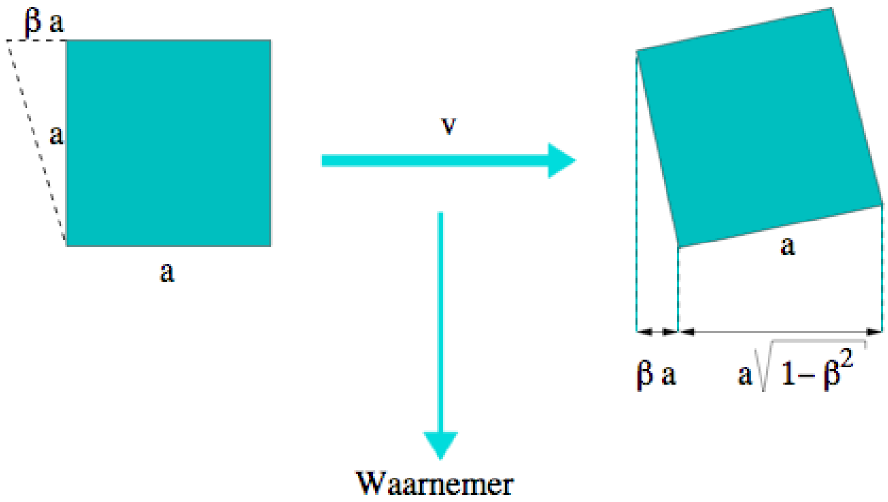
Moet de lengteverhouding van de hierboven genoemde buisjes (zie paragraaf 5.4) inderdaad $1:\frac{10}{7}$ zijn – of is er een reden om het toch op $1:1,005$ te houden?

Bij gebruik van een versneller als boven beschreven ontstaan bij botsingen zeer snelle, kortlevende deeltjes. Kortlevend als ze stilstaan in het stelsel van het laboratorium! Omdat ze echter met zeer hoge snelheden bewegen, is voor de waarnemer in het laboratorium hun levensduur veel groter. Ze zijn daardoor in staat tijdens hun leven veel grotere afstanden te overbruggen dan op grond van de Newtonse theorie berekend kan worden. Die veel grotere afstanden worden bij experimenten met dergelijke versnellers inderdaad waargenomen.

Opmerking: waaróm het zinvol is de deeltjes op te jagen tot een snelheid van 0,995c (of liever nog dichter bij de lichtsnelheid) in plaats van 0,99c, heeft te maken met de enorme toename van de impuls die zo bereikt kan worden. Impuls bepaalt hoeveel kracht bij een botsing uitgeoefend kan worden. Op de impuls komen we in hoofdstuk 6 terug.

65 *Het Terrell-effect: schijnbare rotatie ten gevolge van lengtecontractie

Een vierkant gaat met snelheid *v* voorbij aan een stilstaande waarnemer die zich in de verte op de negatieve y-as bevindt als aangegeven in onderstaande figuur 5.7. Dit speelt zich dus af in een plat vlak.



Figuur 5.10 Het Terrell effect: een waarnemer ziet een bewegend vierkant als geroteerd over een hoek $\varphi = \arcsin \beta$

Alle punten van de zijkant van het vierkant zenden lichtsignalen naar de waarnemer.
Op een gegeven tijdstip ziet de waarnemer dus de punten op een positie dat ze even ver weg van de waarnemer waren. Het hoekpunt links boven ligt verder weg dan het hoekpunt aan de voorzijde. Als we aannemen dat de waarnemer heel ver weg is, geldt dat de waarnemer de linkerbovenhoek dus waarneemt op een plaats die correspondeert met een eerder tijdstip.

a. Hoe groot is het tijdverschil tussen de signalen die de waarnemer van linker boven en ondergelegen hoekpunten ontvangt?
b. Hoever is de verplaatsing van het vierkant in dat tijdsverloop?
c. De zijde a van het vierkant dat in de bewegingsrichting ligt ondervindt voor de stilstaande waarnemer een Lorentz-contractie. Hoe lang is de lengte van die zijde voor de waarnemer?
d. De aanblik die het bewegende vierkant biedt correspondeert dus met een geroteerd vierkant zoals aangegeven aan de linkerzijde van de figuur. Wat is de hoek waarover het vierkant geroteerd is?
e. Hoe ziet een bewegende ronde schijf eruit voor de waarnemer?

Terrell-effect simulatie

Van het Terrell-effect is een simulatie beschikbaar op internet.

http://www.youtube.com/watch?v=JQnHTKZBTI4

Voor meer visuele effecten en de bovenstaande simulatie in betere kwaliteit kun je kijken op

http://www.anu.edu.au/Physics/Searle/

§5.5

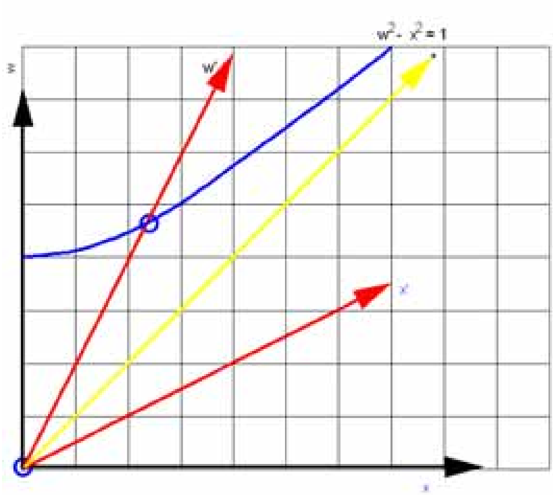
66 *Invariantie onderzoeken

Laat zien dat bij de overgang van het zwarte naar het rode stelsel s^2 invariant is. Dat wil zeggen: vul voor w de uit de Lorentztransformatie verkregen uitdrukking voor w' in, doe hetzelfde voor x en toon dan aan dat $w^2 - x^2 = (w')^2 - (x')^2$.

67 Ruimtetijdinterval voor fotonen

Welke waarde heeft s^2 voor het licht in vacuüm?

68 Nogmaals: Paultje heeft het niet gedaan ...



Figuur 5.11 Voor wie reist, loopt de tijd langzamer

Zie het begin van hoofdstuk 3; kijk naar figuur 3.1. Paultje schiet en even later valt Sidonia. Bereken de waarde van s^2 voor de ruimtetijdafstand tussen deze twee gebeurtenissen. Trek een conclusie.

Met de formule $s^2 = w^2 - x^2$ kunnen we nu een nieuw licht werpen op tijdrek en lengtekrimp. Voor alle waarnemers heeft $s^2 = w^2 - x^2$ dezelfde waarde. Neem een zwart en een rood stelsel. In figuur 5.11 is dat getekend. Tevens is de hyperbool $w^2 - x^2 = 1$ ingetekend.

Kijk naar de ruimtetijdpunten die met blauwe rondjes zijn aangegeven.
De waarnemer in het zwarte stelsel meet een grotere verplaatsing dan die in het rode stelsel (die laatste meet namelijk geen verplaatsing). Een grotere x eist volgens $w^2 - x^2 = 1$ een grotere *w*-waarde. De zwarte waarnemer kent aan het bovenste blauwe punt dus een grotere tijdswaarde toe dan de rode dit doet. De zwarte zegt dat de tijd van de rode langzamer loopt. Bovendien is zo, opnieuw, in te zien dat bij kleine onderlinge snelheden (*w′*-as valt vrijwel samen met de *w*-as) dit effect verwaarloosbaar is.

69 *Gelijke behandeling van ruimte en tijd

Kun je zelf een vergelijkbare redenatie opstellen voor lengtekrimp? Aanwijzing: bedenk met welke hyperbool je in dat geval van doen hebt.

70 De snelste tijd

In het ruststelsel beschouwen we twee gebeurtenissen (w_1,x_1) en (w_2,x_2).

a. Bereken het interval tussen beide gebeurtenissen.

b. In welk stelsel is het tijdsverschil tussen beide gebeurtenissen het kleinst?

71 Nogmaals: herschaling van assen

In figuur 5.11 beweegt het rode stelsel met grote snelheid ten opzichte van het zwarte. Wat kun je opmerken, naarmate de onderlinge snelheid toeneemt, over de tijd-asindeling van het rode stelsel, bezien vanuit het zwarte stelsel?

72 Opnieuw: een voetbalveld

De vraag over het voetbalveld (opgave 58), kun je ook met behulp van de tekentool oplossen. De tool kan hyperbolen voor je tekenen, als je bij "Vorm" het kromme lijntje selecteert.

Neem voor de lengte van het voetbalveld 4 lengte-eenheden. Hoe snel moet je bewegen om die als 2 lengte-eenheden waar te nemen? Teken daartoe de hyperbool die twee lengte-eenheden van de x-as afsnijdt. Alle x'-waarden die horen bij een punt op de hyperbool zijn gelijk aan 2.
Vind het snijpunt van die hyperbool met de lijn x=4.
Lees nu de gevraagde snelheid af en vergelijk deze met wat je in opgave 58 berekende.

73 * Het ruimtetijdinterval en de Lorentztransformatie.

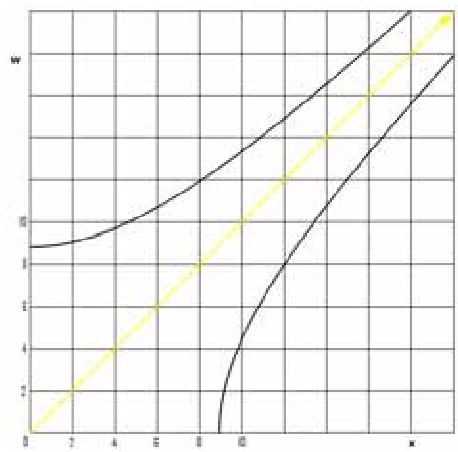
Gegeven zijn de ruimtetijdintervallen $w^2-x^2=81$ en $w^2-x^2=-81$.
In figuur 5.12 zijn de (delen van) hyperbolen getekend die hierbij horen. Een reiziger heeft snelheid 0,8 c en gaat op t=0 door de oorsprong in de positieve x-richting.

a. Bepaal uit figuur 5.12 wat de zwarte klok aanwijst op het tijdstip dat de rode 9 aangeeft.

b. Laat door berekening van de gammafactor voor tijdrek zien dat deze in overeenstemming is met je antwoord op vraag a.

De rode reiziger heeft een meetlat bij zich die in het rode stelsel een lengte van 9 lichtseconden heeft.

c. Geef in de figuur de lengte aan die de zwarte waarnemer voor deze bewegende meetlat waarneemt.



Figuur 5.12 $w^2-x^2=81$ en $w^2-x^2=-81$.

Een andere reiziger blijkt zich in dezelfde lange trein te bevinden als de reiziger uit vraag a tot en met c. Hij bevindt zich, in het rode stelsel gemeten, in het punt $x' = 4$. Hij klapt op het rode tijdstip $t' = 10$ s in zijn handen.

d. Bereken de plaats- en tijdcoördinaten van deze gebeurtenis in het zwarte stelsel.

Antwoorden tekstvragen

T.25

a. Op de w´-as is x´ = 0.
De LT geeft dan
$w = \gamma \cdot w' + \beta \cdot \gamma \cdot x'$ = γ . w´.
Omdat *x/w* =β, geldt dan dat *x* = $\beta . \gamma . w'$.

b. Deze uitdrukking geeft aan welk zwart tijdstip w bij het rode tijdstip w´ hoort, of als je wilt: welk rood tijdstip w´ bij het zwarte tijdstip w hoort.
c. Elk punt op de zwarte w-as heeft x-coördinaat 0. Om bij vraag a. als uitkomst van de LT (w´,0) te krijgen, moeten we daarom het zwarte punt (w/γ,0) nemen.
d. Het punt (0,x´) transformeert naar (β.γ.x´, γ.x´).

T.26

a. De liniaal is ten opzichte van jou in rust en daarom meet je gewoon 30 cm.
b. L´= γ.L. Met L´= 30 cm en L = 20 cm, vind je γ = 1,5. Hieruit volgt dat je snelheid v = 0,75 c.

T.27

Antwoord b.

T.28

Het ruimtetijdinterval is invariant, dus geldt $w_{Bob}^2 - x_{Bob}^2 = w'^2_{Charl} - x'^2_{Charl}$.
$x_{Bob}^2 > x'^2_{Charl}$, omdat Charlotte wel ten opzichte van Bob beweegt, maar niet ten opzichte van zichzelf ($x'_{Charl} = 0$).
Dan geldt dat $w_{Bob}^2 > w'^2_{Charl}$.
b Bob kent een groter getal aan een tijdstip op Charlottes klok toe dan Charlotte zelf: Bob is van mening dat zijn klok het snelst loopt.

T.29

$w_1^2 - x_1^2 = w_2^2 - x_2^2$
$52^2 - 25^2 = w_2^2 - 42^2$
$w_2^2 = 2704 - 625 + 1764 = 3843$;
w_2 = 62 nls.

6 Energie en impuls

Als we onze beperkingen eenmaal accepteren, kunnen we ze overwinnen.

Wat zijn de energie en impuls van een snel bewegend deeltje?

6.1 Impuls

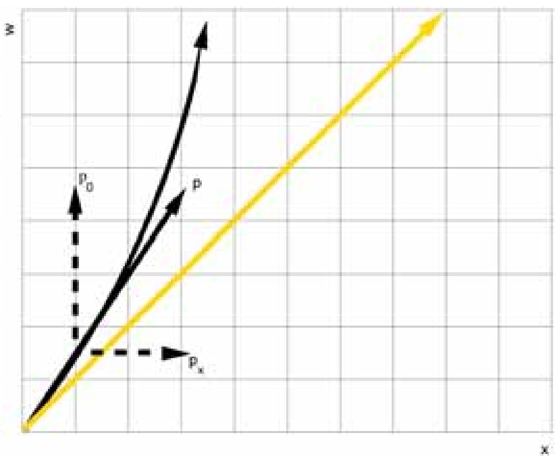
We beginnen met de impuls van een bewegend deeltje en bekijken de verschillen tussen de klassiek newtoniaanse theorie en de speciale relativiteitstheorie.

In de mechanica van Newton wordt de bewegingstoestand van een deeltje bepaald door ten eerste zijn **massa** *m* en ten tweede zijn snelheid $\vec{v}$ of **impuls** $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$, die ook wel 'hoeveelheid beweging' wordt genoemd (zie appendix 7.3). Snelheid en impuls zijn, net als kracht en versnelling, **vectoren**: ze hebben een richting en een grootte. In een wereld met drie ruimtelijke dimensies is zo'n vector een pijl met componenten langs de x-, y-, en z-as. In onze miniwereld, die slechts één ruimtelijke dimensie heeft, kunnen deze vectoren alleen langs de positieve of negatieve x-as gericht zijn: $p_x = m \cdot v$ of $p_x = -m \cdot v$.

Je zult er inmiddels van doordrongen zijn dat ruimte en tijd in de relativiteitstheorie nauw met elkaar verweven zijn. Om recht te doen aan het begrip 'ruimtetijd' moeten we een natuurlijke tijdcomponent, die we zullen noteren als p_0, voor de impulsvector definiëren, zodat we een ruimtetijdvector (p_0, p_x) krijgen analoog aan de positievector (w, x). Er is hiervoor een zeer natuurlijke keuze te doen.

Als het deeltje een pad door de ruimte aflegt is de impulsvector op een gegeven moment altijd gericht langs de raaklijn aan het pad door de ruimte in het punt waar dat deeltje op dat moment is. In de ruimtetijd beweegt het deeltje zoals we weten langs een wereldlijn en je verwacht dat de ruimtetijd impulsvector gericht is langs de raaklijn aan de wereldlijn. Omdat het pad in de ruimte niets anders is dan de projectie van de wereldlijn op de ruimte, moet het zo zijn dat de projectie van de ruimtetijd impulsvector de ruimtelijke impulsvector geeft. De tijdcomponent van de ruimtetijd impulsvector kan daaruit eigenlijk al bepaald worden zoals uit een eenvoudig voorbeeld moge blijken.

Figuur 6.1a Positievector met zijn componenten



Figuur 6.1b Impulsvector met zijn componenten

We beschouwen als voorheen het geval van een deeltje dat met een constante snelheid *v* in de positieve x-richting beweegt. De wereldlijn van het deeltje is de bekende lijn die een hoek α met de tijdas maakt en de projectie daarvan is inderdaad gewoon het pad waarlangs het deeltje zich in de ruimte beweegt. Dan ligt de ruimtelijke component van de impulsvector natuurlijk langs de positieve x-as en deze heeft per definitie de grootte $p_x=mv$. Voor de wereldlijn geldt dat $\tan\,\alpha = \beta = v/c$, maar dan geldt ook dat $\tan\,\alpha = p_x/p_0 = \beta$. We kunnen daaruit concluderen dat de grootte van de tijdcomponent p_0 van de impulsvector gegeven wordt door

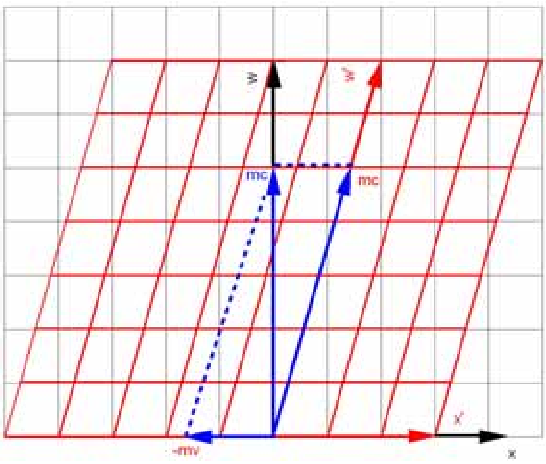
$$p_0 = p_x\,/\,\beta = mc$$

Hiermee is de ruimtetijd impulsvector volledig bepaald zo lijkt het. Merk echter op dat alleen de verhouding p_x/p_0 is vastgelegd. Als we zowel p_0 als p_x met dezelfde factor vermenigvuldigen blijft de verhouding hetzelfde.

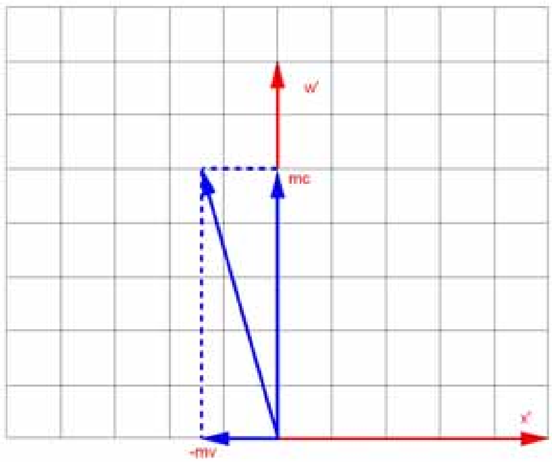
6.2 Relativistische impulsvector

We bekijken nu hoe de nieuwe impulsvector verandert onder de Galileï- dan wel Lorentz-transformaties. Om het verhaal zo duidelijk mogelijk te houden, zullen we de twee gevallen op analoge wijze behandelen.

We gaan uit van een stilstaand deeltje. Hieronder zie je hoe dat geval er volgens Newton (en Galileï) uitziet vanuit een bewegend stelsel. In figuur 6.1 staat de toestand van het deeltje afgebeeld in termen van de twee parameters die zijn bewegingstoestand (op een bepaald moment) beschrijven: de massa en impuls. Langs de verticale as staat *mc*, een massaparameter, en langs de horizontale as staat de impuls $p_x = -m \cdot v = -\beta \cdot mc$. Een deeltje met massa *m* dat stilstaat (waarvoor geldt $p_x = 0$), wordt dan voorgesteld door een vector (pijl) langs de verticale as.



Figuur 6.2a Massa en impuls volgens Newton voor een stilstaand deeltje



Figuur 6.2b Massa en impuls volgens Newton voor een bewegend deeltje

In figuur 6.2a is ook een rood stelsel getekend, dat een newtoniaanse waarnemer voorstelt die zich voortbeweegt met snelheid *v*. In dat stelsel heeft het deeltje een snelheid *-v* en een impuls —*mv*. Merk op dat figuur 6.2a er precies zo uitziet als die voor de coördinaten *w* en *x* in figuur 2.10. Dat komt omdat die op exact dezelfde veranderen onder de Galileï-transformatie: voor een positievector in de ruimtetijd (w,x) weten we dat bij Newton $w' = w$ en $x' = x\text{-}vt = x\text{-}\beta w$, terwijl voor de impulsvector in de ruimtetijd (mc, p_x) geldt dat

$$(mc)' = mc$$

(omdat de massa niet verandert) en

$$p_x' = p_x - mv = -\beta mc$$

(omdat p_x=0). In figuur 6.2b zie je hoe de impulsvector er in het bewegende stelsel uitziet.

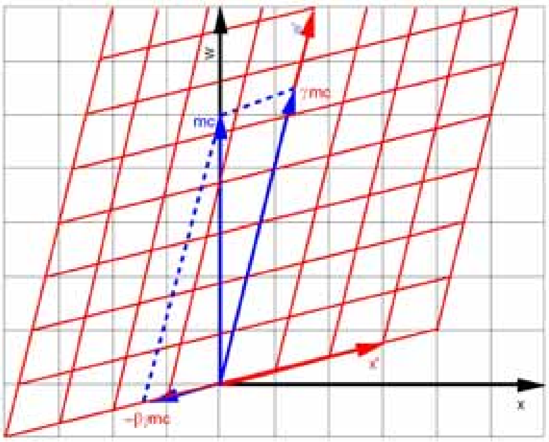
Om het verschil te zien doen we dezelfde exercitie nogmaals, maar dan vanuit het relativistisch perspectief. In figuur 6.3a zie je het stilstaande deeltje, dat in het ruststelsel wordt gekarakteriseerd door een vector met een tijdcomponent *mc* en een ruimtecomponent p_x = 0. Nu willen we de grootte van de componenten in het rode stelsel te weten komen. We zouden de Lorentz-transformaties kunnen toepassen, maar in dit geval weten we al dat

$$(mc)' = \gamma mc$$

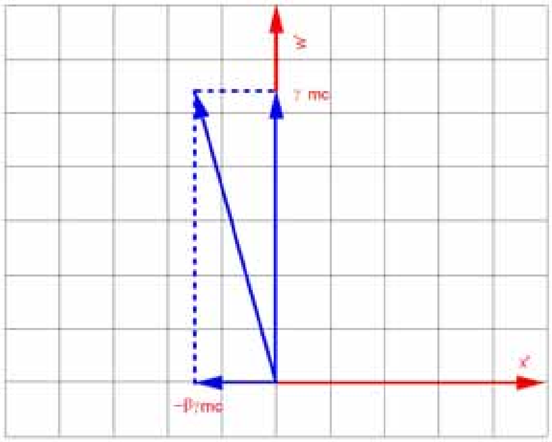
en

$$p_x' = -\beta\gamma mc$$

omdat de assen herschaald zijn met de relativistische snelheidsfactor γ. Figuur 6.3b toont de situatie vanuit het bewegende stelsel, waarin de **relativistische impulsvector** in de ruimtetijd een horizontale component heeft van *-βγmc* en een verticale component van *γmc*. Deze uitdrukkingen verschillen van die van Newton door de extra factor γ, hetgeen onder meer impliceert dat zowel de horizontale als de verticale component van de impulsvector onbegrensd toenemen als de snelheid van de waarnemer dichter bij *c* komt. Ook in de figuur 6.3 is dat mooi te zien: daar komen de componenten steeds meer in elkaars verlengde te liggen.



Figuur 6.3a Massa en impuls volgens Einstein voor een stilstaand deeltje



Figuur 6.3b Massa en impuls volgens Einstein voor een bewegend deeltje

In bovenstaande redenering beweegt de waarnemer met snelheid +*v* en het deeltje met -*v*. Hetzelfde geldt voor een waarnemer met snelheid –*v* en een deeltje met snelheid *v*. Een deeltje dat met snelheid *v* beweegt heeft een relativistische impulsvector met $p_x{}'$ = *βγmc* als ruimtecomponent. De tijdcomponent blijft *γmc.*

Relativistische impulsvector

De relativistische impulsvector voor een deeltje met massa *m* en snelheid *v* heeft 'ruimtetijd' componenten

$$(p_0, p_x) = (\gamma mc, \beta\gamma mc) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}, \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \right)$$

Waarin $\beta = v / c$. De uitdrukking verschilt van die van Newton door de extra relativistische snelheidsfactor γ.

Massaloze deeltjes

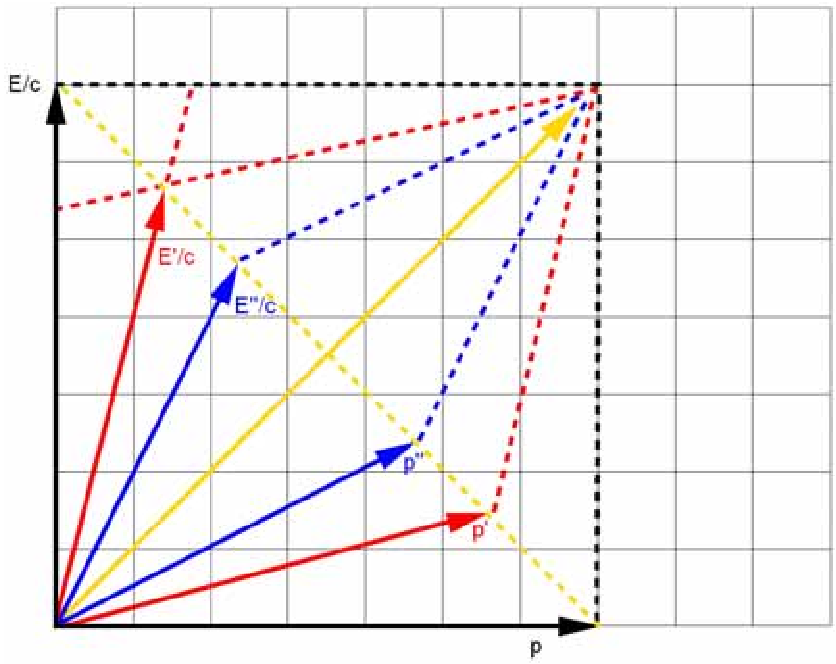
Een foton of lichtdeeltje verplaatst zich per definitie altijd met de lichtsnelheid. De ruimte-tijdimpuls ervan ligt in de richting van de bijbehorende wereldlijn en heeft daardoor voor alle waarnemers een even grote ruimte- als tijdscomponent. De fysica van het elektromagnetisme leert dat we ook aan licht een energie *E* en impuls *p* kunnen toekennen, die een constante verhouding hebben van

$$\frac{E}{p} = c$$

gelijk dus aan de lichtsnelheid. Die verhouding is daardoor hetzelfde voor alle waarnemers. Hieruit volgt dat de tijdscomponent van de impulsvector van een foton gelijk moet zijn aan E/c. Een foton gaat met de lichtsnelheid, maar kan wel een welbepaalde eindige impuls (en energie) hebben, in tegenstelling tot de deeltjes die we hiervoor bespraken. Materiedeeltjes zouden bij de lichtsnelheid een oneindige energie en impuls bezitten, hetgeen onmogelijk is – dit verklaart dat zij de lichtsnelheid nooit bereiken. In de figuur 6.4 is zo'n eindige 'energie-impulsvector' van een foton weergegeven. Merk op dat de componenten van de vector in de verschillende bewegende stelsels allemaal op een rechte lijn loodrecht op de wereldlijn terechtkomen.

In tegenstelling tot een massief deeltje, waarvan de impuls onbeperkt toeneemt, gedraagt licht zich keurig. Als we het foton willen interpreteren als een deeltje waarvan beide impulscomponenten een eindige waarde houden terwijl γ oneindig groot is, kan dat alleen als we eisen dat de fotonmassa naar nul gaat, zodat γmc kan worden vervangen door de energie E/c. We moeten het foton als een **massaloos deeltje** opvatten.

Ook het graviton, waarvan Einstein het bestaan voorspelde in zijn algemene relativiteitstheorie, maar waarvan het bestaan nog steeds niet is aangetoond, is zo´n massaloos deeltje. Algemeen geldt dat alle deeltjes die met de lichtsnelheid bewegen massaloos zijn, en omgekeerd!



Figuur 6.4 Impuls en energie van een foton

6.3 Impulsbehoud

We willen nu bekijken hoe het zit met de wet van behoud van impuls. Eerst in de Euclidische ruimte waar die natuurlijk als gevolg van de wetten van Newton geldig is in de afwezigheid van externe krachten (zie appendix 7.3), en vervolgens naar de generalisatie daarvan in de Minkowski ruimtetijd.

We beschouwen een simpel botsingsexperiment, waarbij er van links en van rechts een deeltje met massa m en snelheid v naar elkaar toe bewegen die botsen in de oorsprong. We nemen aan dat ze inelastisch botsen en er dus een deeltje met massa $M= 2m$ in rust (met $V=0$) in de oorsprong overblijft. Het stelsel waarin we dit waarnemen noemen we het ruststelsel.

Inderdaad: voor de botsing hebben we $p_{1,x} = mv$ en $p_{2,x} = -mv$ dus de ruimtelijke impuls $P_x^{voor} = p_{1,x}+p_{2,x} = 0$, en ook na de botsing hebben we een ruimtelijke impuls $P_x^{na}=MV=0.$ Het behoud van impuls voor de ruimtelijke component is dus geldig. Voor de tijdcomponent hebben voor de botsing: $p_{1,0}+p_{2,0} = 2mc$,en na de botsing: $P_0=Mc.$ Vergelijking van de tijdcomponent voor en na de botsing levert dus het behoud van massa op, n.l. dat $M = 2m$ en de totale massa´s voor en na de botsing gelijk zijn.

Je zou denken dat we nu klaar zijn en het probleem hebben opgelost, maar we moeten niet te vroeg juichen. Laten we eerst eens kijken hoe dit experiment er relativistisch in een ander, bewegend stelsel uitziet.

We kiezen een bewegende waarnemer die in het stelsel van het rechter deeltje zit (en die zich dus naar links beweegt met een snelheid $-v$ t.o.v. het ruststelsel). Voor de bewegende waarnemer geldt dat wij ons bewegen met een snelheid $+v$. Om de snelheid u van het naar rechts bewegende deeltje te bepalen in het bewegende stelsel moeten wij de optelformule van snelheden toepassen (zoals besproken in par. 3.3), waar we hebben laten zien dat

$$u = \frac{u'+v}{1+u'\cdot v / c^2}$$

Hierin is u de snelheid van het linkerdeeltje ten opzichte van de bewegende waarnemer, u' de snelheid van het linkerdeeltje ten opzichte van het ruststelsel en v de snelheid van het ruststelsel ten opzichte van de bewegende waarnemer. In ons voorbeeld geldt bovendien dat $u' = v$ zodat

$$u = \frac{2v}{1+v^2 / c^2}$$

Dus voor de botsing gezien vanuit het bewegende stelsel hebben we:

$$P_x^{\text{voor}} = p_{1,x} + p_{2,x} = 0 + m\cdot u = 2m\cdot v / (1+v^2 / c^2)$$

Na de botsing is er alleen het zware deeltje met massa $M=2m$ dat met snelheid v (ten opzichte van de rode waarnemer) beweegt, dus

$$P_x^{\text{na}} = M\cdot v = 2m\cdot v$$

Help! We zien dat in dit stelsel P_x^{voor} niet gelijk is aan P_x^{na}! Impuls lijkt niet langer behouden! Wat is hier gaande? Impulsbehoud was geldig in het ruststelsel maar niet in het bewegende stelsel? Een schending van het relativiteitspostulaat, een natuurwet die waar is in het ene inertiaalstelsel maar niet in een andere? Merk op dat in de Newtoniaanse mechanica de optelformule voor snelheden geeft dat $w = v+v = 2v$ en dan klopt de wet van impulsbehoud juist wel in beide stelsels.

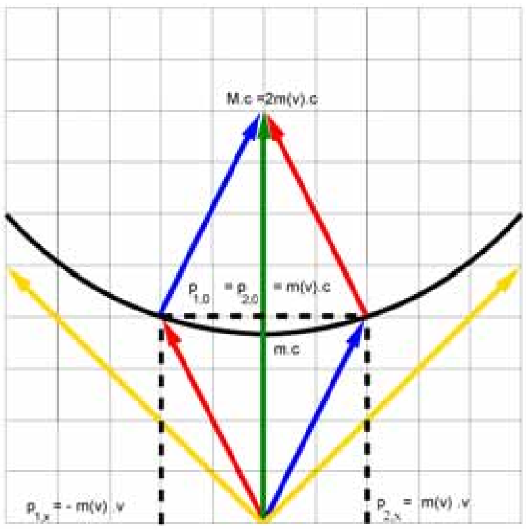
Maar we hebben iets vergeten! In de relativiteitstheorie is ***de massa van een deeltje afhankelijk van de grootte van zijn snelheid***, dus $m(v)= \gamma(v)\ m$, met $\gamma(v)$ de relativistische snelheidsfactor. Voor de behoudswet van impuls in het bewegende stelsel moeten we dus schijven:

$$P_x^{\text{voor}} = m(u)\cdot u = M(v)\cdot v = P_x^{\text{na}}$$

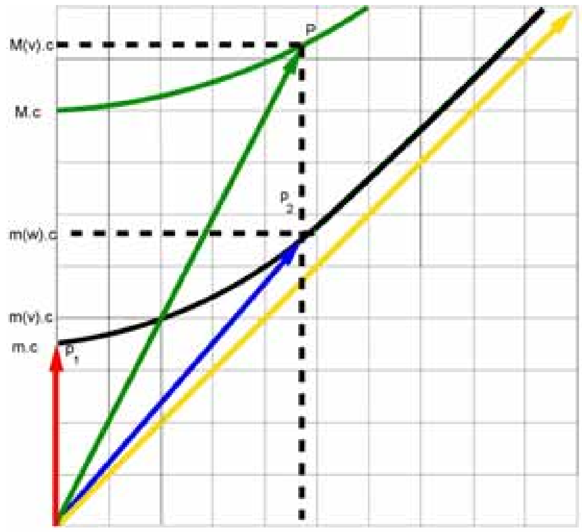
De massa van het bewegende deeltje zoals gezien door de bewegende waarnemer is *m(u)* en de massa van het zware deeltje *M* is gelijk aan

$$M(v) = \gamma(v) \cdot M = \gamma(v) \cdot 2m(v)$$

en dus niet gelijk aan *2m.* De verschillende situaties voor beide stelsels zijn in de onderstaande relativistische ruimtetijddiagrammen weergegeven:



Figuur 6.5a Impulsbehoud volgens Einstein, in het ruststelsel



Figuur 6.5a Impulsbehoud volgens Einstein, in het bewegende stelsel

Met een berekening kunnen we nu nagaan of inderdaad aan impulsbehoud is voldaan. We vullen in de vergelijking voor *u* zoals hierboven gegeven:

$$P_x^{\text{voor}} = m(u) \cdot u = m \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \cdot \frac{2v}{1+v^2/c^2}$$

$$= 2m \cdot v \cdot \frac{1}{1-v^2/c^2}$$

Dit is inderdaad gelijk aan

$$P_x^{\text{na}} = M(v) \cdot v = 2m \cdot v \cdot \frac{1}{1-v^2/c^2}$$

Er is dus voldaan aan impulsbehoud in de relativiteitstheorie als we accepteren dat de massa afhangt van de snelheid. De massa *m=m(0)* van een deeltje dat stilstaat wordt wel de **rustmassa** genoemd.

Maar we leren uit deze exercitie ook dat in de relativiteitstheorie het behoud van rustmassa niet langer geldig is; deze behoudswet wordt vervangen door het behoud van de tijdcomponent van de impulsvector. Die vertelt ons dat de totale relativistische massa*,* die snelheidsafhankelijk is, behouden blijft. Voor de rode waarnemer is de vergelijking:

$$P_0^{\text{voor}} = m \cdot c + m(u) \cdot c = M(v) \cdot c = P_0^{\text{na}}$$

Net als voor de impuls kunnen we door berekening controleren dat dit inderdaad een gelijkheid is.

T.30

Bekijk het simpele botsingsexperiment in het ruststelsel.

a. Hoe luidt de behoudswet voor de totale impuls?

b. Hoe luidt de behoudswet voor de tijdcomponent?

6.4 E=mc^2

In de vorige paragraaf hebben we een 'ruimtetijd'-impulsvector (γmc, $\beta\gamma mc$) voor massieve deeltjes geïntroduceerd, die op natuurlijke wijze volgde uit de relativistische relatie tussen verschillende stelsels. De ruimtecomponent $\beta\gamma mc$ kunnen we beschouwen als de fysische impuls p, omdat in het limietgeval $\beta = v/c \rightarrow 0$ geldt dat $\gamma \rightarrow 1$, zodat

$$\beta\gamma mc \rightarrow \beta mc = mv$$

De component $p_0=\gamma mc$ kunnen we met een soortgelijk argument interpreteren als de relativistische generalisatie van de massaparameter mc, en dat is precies wat Einstein voorstelde. Hij definieerde een **relativistische massa** als

$$m_{\mathrm{rel}} = \gamma m$$

(die zoals je ziet afhankelijk is van de snelheid). We hebben hierboven gezien dat de totale relativistische massa, die snelheidsafhankelijk is, behouden blijft. Einstein concludeerde hieruit dat de **relativistische energie** van een massief deeltje zal worden gegeven door de relatie

$$\frac{E}{c} = m_{\mathrm{rel}}c = \gamma mc$$

Daarmee komen we tot de opzienbarende conclusie die Einstein als eerste trok, namelijk dat er een verband is tussen de energie en de massa van een deeltje. Dit is de alom gelauwerde vergelijking die de equivalentie van energie en massa tot uitdrukking brengt, en die gekenmerkt wordt door een niet te evenaren eenvoud, kracht en schoonheid.

Equivalentie van energie en massa

De relativiteitstheorie geeft het verband

$$E = m_{\mathrm{rel}}c^2 = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

tussen de energie en de massa van een deeltje.

Zo zijn we met een consequent doorgevoerde logische redenering - die wel uit een respectabel aantal stappen bestond - doorgedrongen tot het revolutionaire inzicht dat massa een bepaalde vorm van energie is. Om de gedachten te bepalen: één gram van een willekeurig gekozen soort materie komt daarbij overeen met zo'n 10^{14} Joules, wat vergelijkbaar is met de energie die vrijkwam bij de kernbom op Hiroshima.

Om beter te begrijpen dat $m_{\mathrm{rel}}c^2$ inderdaad een energie is, helpt het om de uitdrukking γmc^2 te bekijken voor lage snelheid. Als we aannemen dat $\beta = v/c$ zeer klein is, kunnen we een benadering geven voor de uitdrukking

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

We passen de formule toe, besproken in de appendix

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot x + \ldots\ ,$$

Dan vinden we voor de eerste twee termen

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2} + \ldots$$

Voor de relativistische energie levert dit zo op:

$$m_{\mathrm{rel}}c^2 = \gamma mc^2 \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \ldots$$

De meest rechtse term is de bekende uitdrukking $mv^2/2$ voor de kinetische energie (of bewegingsenergie) van een voorwerp met massa *m* en snelheid *v* volgens de theorie van Newton. De relativistische energie van een massief deeltje bij niet al te hoge snelheid bestaat dus uit de bewegingsenergie plus de massa vermenigvuldigd met c^2 .

Wat mag dit betekenen? Het antwoord van Einstein was: aan de rechterkant staan energieën. Ook de linkerkant moet dan een energie voorstellen. Deze energie bestaat uit twee bijdragen. De bekende kinetische energie, maar ook een nieuwe term, de **rustenergie** mc^2 , die niets met de snelheid van het voorwerp van doen heeft. Deze energie is altijd in een voorwerp aanwezig en hangt met de massa van het voorwerp samen. We kunnen zeggen dat het de energie is die het heeft gekost om deze massa te maken. Deze energie zit opgeslagen in iedere massa.

Einstein noemde $m_{\mathrm{rel}} = \gamma m$ de relativistische massa van het lichaam; deze hangt via γ wèl van de snelheid af. De massa *m* hangt niet af van de snelheid en wordt de **rustmassa** genoemd, omdat dit de waarde van m_{rel} is voor een stilstaand deeltje.

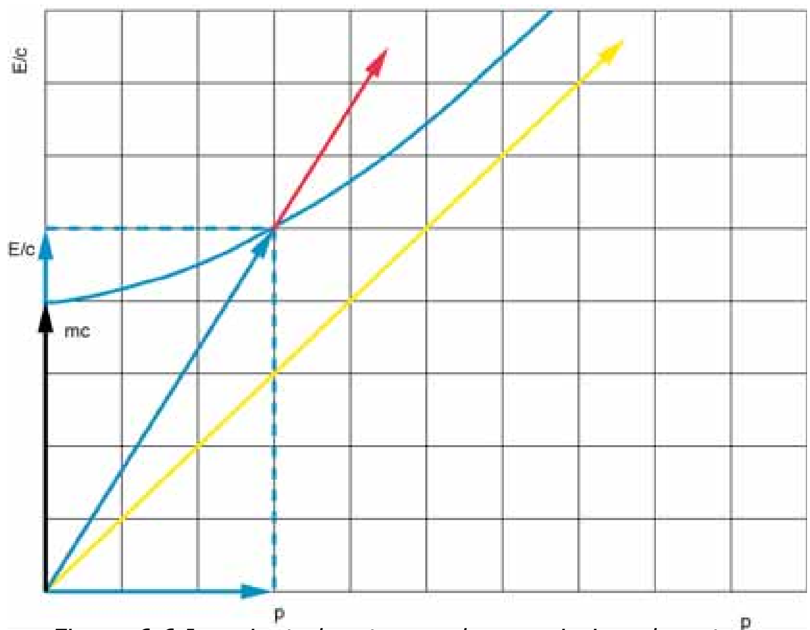
Invariante lengte

Tegenwoordig drukken natuurkundigen het verband tussen massa en energie vaak anders uit: ze zeggen dat de invariante massa (of rustmassa) *m* correspondeert met de invariante 'lengte' van de relativistische energie-impulsvector (*E,pc*). In formulevorm:

$$E^2 - p^2c^2 = (\gamma \mathrm{m}c^2)^2 - (\beta\gamma mc)^2 c^2 = m^2c^4$$

Deze uitdrukking beschrijft ook fotonen en andere massaloze deeltjes, want voor *m* = 0 vinden we *E* = ±*pc*.

Zoals je weet zijn rustmassa en lichtsnelheid voor alle inertiële waarnemers even groot. Berekening van de invariante lengte is daarom onafhankelijk van de snelheid van de waarnemer, net zoals in het vorige hoofdstuk het ruimtetijd interval *s* dat was.



Figuur 6.6 Invariante lengte van de energie-impulsvector

6.3 $E=mc^2$ in het onderzoek: het ATLASexperiment bij CERN

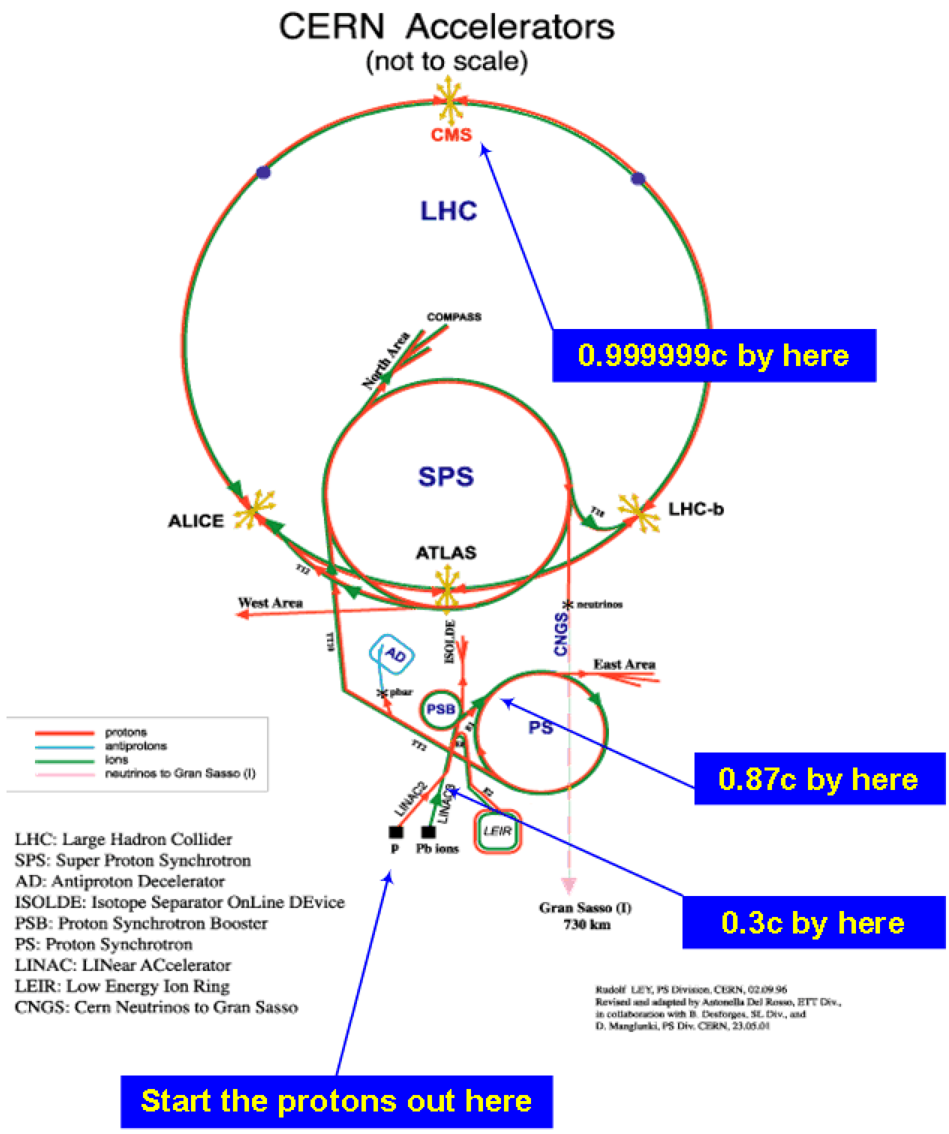
Elementaire deeltjes

Waar bestaat materie uit? Het antwoord "uit atomen" is al 2500 jaar geleden gegeven. Kunnen we ook nog zeggen waar atomen uit bestaan? Pas ruim 100 jaar geleden werd duidelijk dat in atomen nog kleinere deeltjes voorkomen: het elektron werd door J.J.Thomson in 1897 ontdekt. Niet lang daarna werd uit botsingsproeven met alfadeeltjes op een goudfolie door Ernest Rutherford (1907), duidelijk dat in het atoom behalve de elektronen ook een kern aanwezig is die het grootste deel van de massa bezit. Weer later vond men dat de kern uit protonen en neutronen bestaat. Er waren toen vier elementaire deeltjes bekend: elektron, proton, neutron en het foton. Het onderzoek had dus een structuur van materie opgeleverd die één laag dieper ligt dan het niveau van de atomen. Een vraag is dan natuurlijk: is dit de diepste laag?

Bij toeval stuitte men op het bestaan van nog een vijfde elementair deeltje, het muon. Dit werd ontdekt tijdens (onbemande) ballonexperimenten, hoog in de atmosfeer. Straling uit het heelal, met zeer hoge energie, creëert muonen bij botsingen met atmosferische deeltjes op enige tientallen kilometer hoogte. Voor verdere studie wilde men dit onder laboratoriumomstandigheden nabootsen: er waren versnellers nodig die de hoog-energetische deeltjes konden produceren.

Er zijn twee types versnellers die hiervoor gebruikt worden: de lineaire versneller, besproken in paragraaf 5.5 en cirkelvormige versnellers waarbij de deeltjes een (groot) aantal malen hetzelfde traject afleggen, elke keer met meer energie dan de vorige. De versnellers bij het onderzoekscentrum CERN bij Genève zijn volgens dat principe gebouwd. Het onderzoek naar nieuwe deeltjes vindt plaats door middel van botsingsproeven. Om een zo krachtig mogelijke botsing te krijgen neemt men twee bundels versnelde deeltjes die men frontaal laat botsen. De massa van de botsende deeltjes wordt hierbij omgezet in energie, volgens $E = mc^2$, en dezelfde wet beschrijft het ontstaan van nieuwe deeltjes.

Figuur 6.7 Luchtfoto van CERN bij Genève; de installaties zijn in tunnels onder de grond aangebracht.



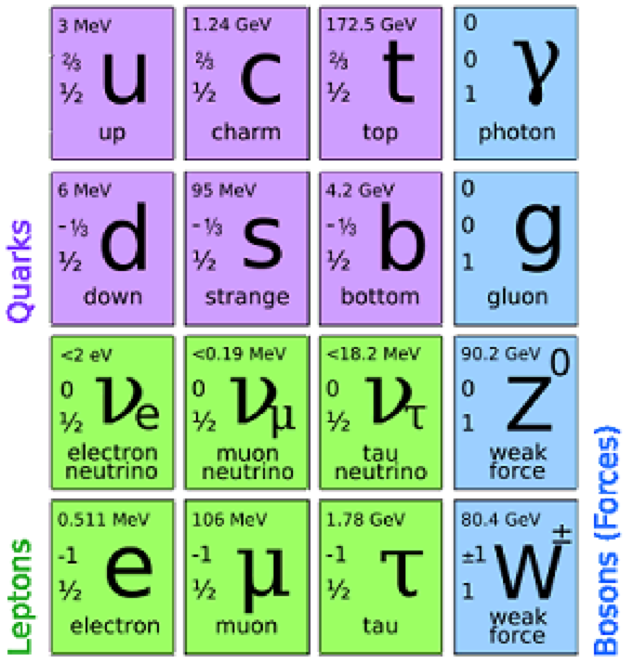
Figuur 6.8 Overzicht van de ringen, waarin de versnelling plaats vindt, met de plaatsing van de verschillende detectoren.

Standaardmodel

Bij proeven met dergelijke versnellers kwam het bestaan van nog veel meer tot dan toe onbekende deeltjes aan het licht. Het eenvoudige beeld dat alle materie bestaat uit protonen, neutronen en elektronen moest verlaten worden. Probleem was dat het aantal "elementaire" deeltjes zo enorm groot was, dat men zich niet kon voorstellen dat deze echt elementair waren. De zoektocht naar deeltjes die zich nog een laag dieper bevonden, was begonnen.

Uit botsingsproeven bij zeer hoge energie bleek dat bijvoorbeeld in protonen drie harde "pitten" aanwezig zijn. Men noemde die quarks. Twee identieke, "up" genoemd en één andere, "down". Ook neutronen bleken opgebouwd uit drie quarks, 1x up en 2x down. Het bleek mogelijk alle bekende samengestelde deeltjes op te bouwen uit 6 elementaire deeltjes: 6 quarks die in drie families gerangschikt worden, elk met hun eigen type niet-samengestelde deeltjes als elektronen en neutrino's. Daarbuiten bestaat nog een stel deeltjes die geacht worden dragers te zijn van alle bekende krachtwerkingen. Het bekendst daarvan zijn het foton, de drager van de elektromagnetische kracht en het graviton, overbrenger van de gravitatiekracht. Het graviton overigens is nog niet aangetoond.

Het systeem waarin al deze deeltjes en de krachten ertussen met grote precisie beschreven worden heet het Standaardmodel. De manier waarop dat werd ingevuld met de resultaten van de experimenten, leek erg op wat zich een eeuw eerder had afgespeeld bij het Periodiek Systeem van Mendelejew: uit behaalde resultaten werd een schema opgebouwd, dat gaten bleek te bevatten. Door analogieën kon men voorspellingen doen over de eigenschappen van de deeltjes die de gaten moesten opvullen, hetgeen het zoeken daarnaar zeer vergemakkelijkte.



Figuur 6.9 Overzicht van de elementaire deeltjes volgens het Standaardmodel

Nu is men zover dat alle deeltjes uit het Standaardmodel aangetoond zijn, op één na: het Higgsdeeltje.

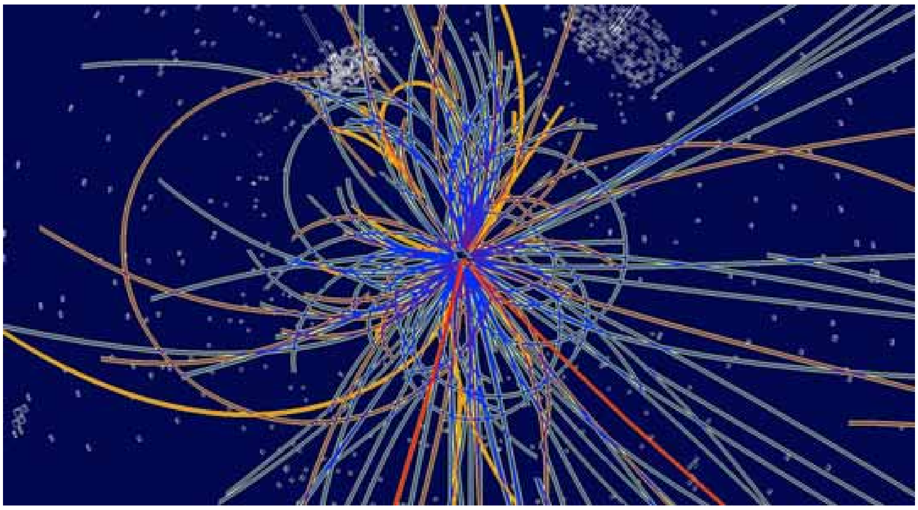
Higgsdeeltje

Alle materiedeeltjes lijken zeer sterk op elkaar, als je kijkt naar lading, spin (zoiets als draaiing rond de as) en andere fundamentele eigenschappen, maar deeltjes verschillen enorm in massa. Ruim 40 jaar geleden ontstond het idee dat dit veroorzaakt werd door één, nu nog hypothetisch deeltje, bedacht door de natuurkundige Peter Higgs (1960). Dit deeltje zou ruimtetijd beïnvloeden en een Higgsveld creëren, en alle materiedeeltjes zouden daaraan sterker of zwakker gekoppeld zijn. De zwak gekoppelde deeltjes bewegen gemakkelijker door het Higgsveld, en zijn dan deeltjes die een kleine traagheid (massa) hebben; de deeltjes die sterker koppelen hebben grotere traagheid. Ook zijn er deeltjes die niet koppelen; deze zijn massaloos, zoals het foton en het graviton, en bewegen daardoor altijd met de lichtsnelheid. Op deze manier is te begrijpen waarom deeltjes zo sterk uiteenlopende massa's kunnen hebben.

Van het Higgsdeeltje kunnen weer een heel stel eigenschappen voorspeld worden, hetgeen het mogelijk maakt gericht ernaar te zoeken. Deze zoektocht is momenteel op twee plaatsen aan de gang: in het Fermilab in de VS, waar men het deeltje alleen kan vinden als het niet te zwaar is, en bij CERN, waar men, zo is de verwachting, het deeltje in elk geval kan vinden. Bij CERN is mede voor dit doel een nieuwe deeltjesversneller gebouwd, de Large Hadron Collider (LHC), die in 2009 operationeel is geworden. De LHC is een 27 kilometer lange cirkelvormige versneller, waarin de versnelling tot stand gebracht wordt door zo'n

1300 supergeleidende magneten. De energieën waarbij de botsingen plaatsvinden is 10 TeV, d.w.z het equivalent van 10.000 protonmassa's. Dat zijn de hoogste energieën die ooit in een versneller gerealiseerd zijn.

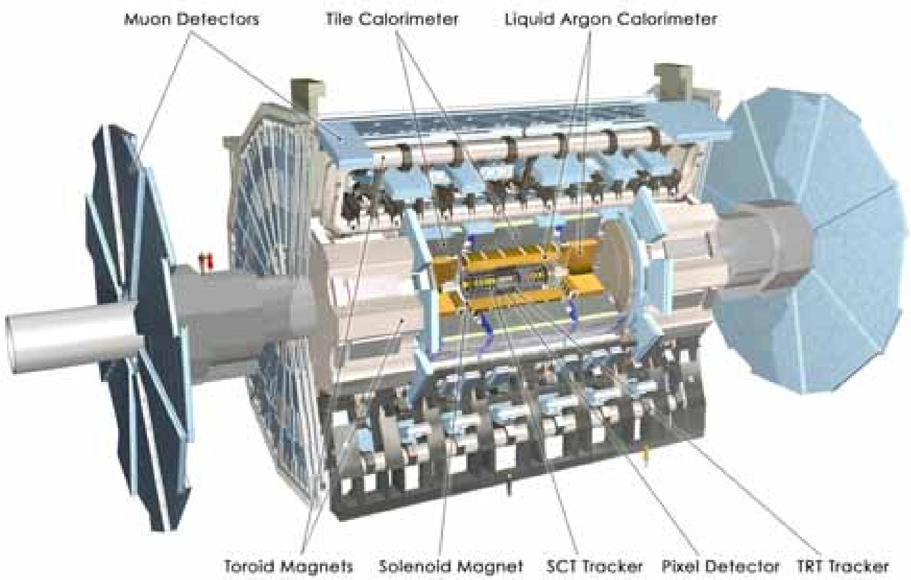
Door de energie van de botsende bundels op te voeren hoopt men zeer zware deeltjes als het Higgsdeeltje te kunnen produceren. Hierbij is het opsporen van zo'n deeltje in de lawine aan deeltjes die bij elke botsing ontstaat terwijl er ook een gigantisch aantal botsingen per seconde optreden een grote uitdaging op het gebied van data analyse.



Figuur 6.10 ATLAS moet een lawine aan sporen als deze analyseren.

Het ATLAS experiment

De opsporing gebeurt met behulp van ATLAS , een speciaal ontworpen detector, waaraan ook Nederlandse natuurkundigen een bijdrage leveren. De detector heeft de grootte van een fabriek: 25 m hoog, en is in staat de baan van deeltjes met een nauwkeurigheid van 1/1000 cm te volgen. Het is een apparaat dat de grens van het technisch kunnen verschuift: het bevat meer transistors dan er in de Melkweg aan sterren zijn, moet per seconde een miljard botsingen analyseren (een gegevens stroom die even groot is als wanneer elk mens op aarde 20 telefoongesprekken tegelijkertijd voert). Van die miljard botsingen per seconde produceren ongeveer 50 nieuwe verschijnselen en de kans dat daar een Higgsdeeltje bij zit is weer 1 op miljoen. Omgerekend komt dit neer op de productie van één Higgsdeeltje per dag en het is de taak van de 2800 fysici en technici die betrokken zijn bij het ATLAS experiment om dit unieke voorval uit het kolossaal aantal gegevens te filteren.



Figuur 6.11Doorsnede door de ATLASdetector

Atlas kent drie detectielagen, die van binnen naar buiten lopen. In de binnenste worden de posities van elektrisch geladen deeltjes nauwkeurig vastgelegd, waardoor computers in staat zijn de gevolgde banen te berekenen. Men laat daartoe de (geladen) deeltjes een sterk magneetveld doorlopen; de baankromming is afhankelijk van hun impuls. Het magneetveld wordt opgewekt in supergeleidende spoelen met stroomsterktes van 20.000 A. In het middelste deel wordt de energie van de deeltjes gemeten, door ze energie over te laten dragen aan het materiaal van deze calorimeters. Het Higgsdeeltje is instabiel en vervalt, waarbij hoogstwaarschijnlijk muonen gevormd worden. Bij de interactie van zware deeltjes met de calorimeters ontstaan o.a. muonen die in de buitenste laag gedetecteerd worden.

ATLAS

Videos en e-tours zijn te vinden op http://atlas.ch/

Waar is dit goed voor?

Het onderzoek naar de fundamenten van de materie heeft de afgelopen 100 jaar resultaten opgeleverd die de wereld veranderd hebben. Van Röntgenstraling en radiotherapie via annihilatie van materie in PET-scanners in ziekenhuizen tot de oplossing van het probleem te communiceren met al die wetenschappers en technici werkzaam bij het CERN: het ontstaan van het World Wide Web. Ook nu dient zich weer een volgende stap aan: het ontstaan van het Grid (het netwerk), waarbij vergeleken het www nog slechts een voorzichtige start is. Wordt het www gebruikt om informatie uit te wisselen, het Grid wordt gebruikt om rekenkracht en dataopslag te bundelen. Bij CERN zou zonder gebruik te maken van het Grid wel 100duizend pc's moeten opgesteld om de stroom aan gegevens te beheren en door te rekenen.

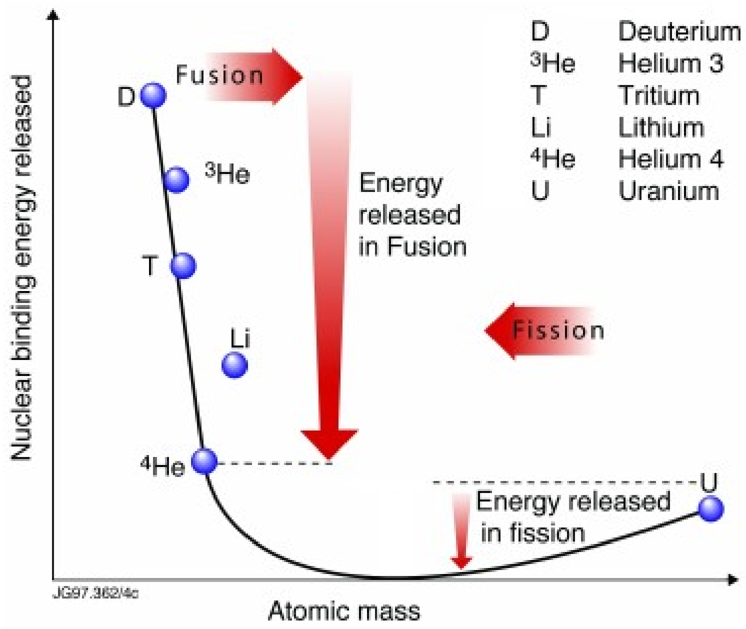
Is dit onderdeel van de natuurkunde "af" als het Higgsdeeltje gevonden is? Er is een probleem dat het Standaardmodel niet aan kan: het graviton en daarmee de gravitatiekracht laat zich er niet mee beschrijven. Theoretici werken daarom al een tijd aan een nog fundamenteler model: de snarentheorie, waarbinnen wel een plaats is voor alle deeltjes. Deze theorie is echter onbewezen en de fysici studeren nog op mogelijke experimenten – via botsingsproeven als boven beschreven het bestaan van snaren aantonen vereist een versneller die zo groot is dat die niet eens in ons zonnestelsel past.

6.4 E=mc² in actie: het ITERproject

Kernsplijting en Kernfusie

Toen Einstein in 1905 uitkwam op $E=mc^2$ zag men in dat massa equivalent is met een zeer grote hoeveelheid energie. Hoe men die uit de materie vrij kon maken was in eerste instantie onduidelijk. Circa 15 jaar later werd een toestel ontworpen waarmee het mogelijk was met zeer grote nauwkeurigheid atoommassa's te meten. Tot de verbazing van de wetenschappers die dit deden bleek, bijvoorbeeld, een Heliumatoom lichter te zijn dan de onderdelen waaruit het is opgebouwd, namelijk 2 protonen, 2 neutronen en 2 elektronen. Hoe kon het geheel nu lichter zijn dan de som van zijn onderdelen? Al snel werd bedacht dat bij samenvoeging van de genoemde losse onderdelen tot Helium, het massaverschil energie vrij zou maken volgens de formule $E=mc^2$. We noemen dit proces kernfusie. Het was in 1938 de Duitse fysicus Hans Bethe die berekende dat op deze manier de sterren hun enorme energie opwekken.

Vanzelf kwam de vraag naar voren of het mogelijk was een machine te maken om door massaomzetting energie op te wekken. Er dienden zich twee mogelijkheden aan. Het is mogelijk energie uit grote kernen vrij te maken door ze in kleinere te splitsen (**kernsplijting**), of er kan energie worden vrijgemaakt door juist lichte kernen te laten fuseren tot middelgrote kernen (**kernfusie**). Figuur 6.12 geeft dit aan (fission betekent splitsing).



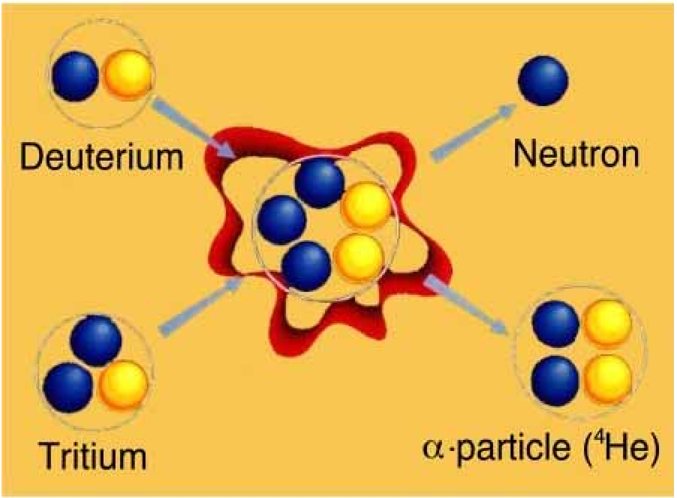
Figuur 6.12 Energie uit kernen kan op 2 manieren worden vrijgemaakt. Op de verticale as de bindingsenergie uitgezet in plaats van het massaverschil.

Technisch bleek energievrijmaking via splitsing het eenvoudigst te zijn. Dit gebeurt momenteel in kerncentrales, waarbij grote kernen als Uranium door botsende neutronen in tweeën worden gesplitst. Hierbij komen ook nog een paar neutronen vrij die voor splitsingen van andere kernen kunnen zorgen. De energie die vrijkomt bij de splitsingen wordt gebruikt om een koelvloeistof te verwarmen. Deze koelvloeistof geeft zijn warmte vervolgens over aan een systeem waarin water circuleert. Dit water wordt als stoom op turbines gespoten, waardoor elektrische energie opgewekt wordt. In een kolen- of oliecentrale is het de energie die bij de verbranding van die brandstoffen vrijkomt die het water in stoom verandert.

Men is ook al geruime tijd bezig kernfusie onder de knie te krijgen. Dit proces houdt veel mooie beloftes in: de hoeveelheid “brandstof” is onuitputtelijk, er komt geen CO_2 bij vrij, ontploffing van de centrale met als gevolg de verspreiding van grote hoeveelheden radioactief materiaal is door de speciale manier van energieopwekking niet mogelijk en ook is een kernfusiecentrale niet van militair nut. Hieronder wordt een aantal van deze aspecten toegelicht.

Fusiereactor

Uit figuur 6.12 valt af te lezen dat er energie vrijkomt bij de fusie van Deuteriumkernen tot bijvoorbeeld Helium. Deuterium is een isotoop van waterstof met een kern die bestaat uit een proton en een neutron. Deuteriumfusie is technisch erg lastig. Een volgende kandidaat die zich dan aandient is ^{3}He; daarvan is echter op Aarde slechts 200 kg van aanwezig. Het komt wel veel op de Maan voor, maar voorlopig is ook ^{3}He als fusiekandidaat afgewezen.
Men poogt nu energie te winnen door Deuterium met Tritium te fuseren. Tritium is een radioactieve isotoop van waterstof, met een kern die bestaat uit 1 proton en 2 neutronen. Tritium is vrij eenvoudig te maken door beschieting van Lithium met neutronen. Deuterium komt veel voor in zeewater – voor het beoogde fusieproces is er op Aarde voldoende brandstof voor handen. De reactie die plaats vindt is getekend in figuur 6.13.



Figuur 6.13 Fusie van deuterium en tritium

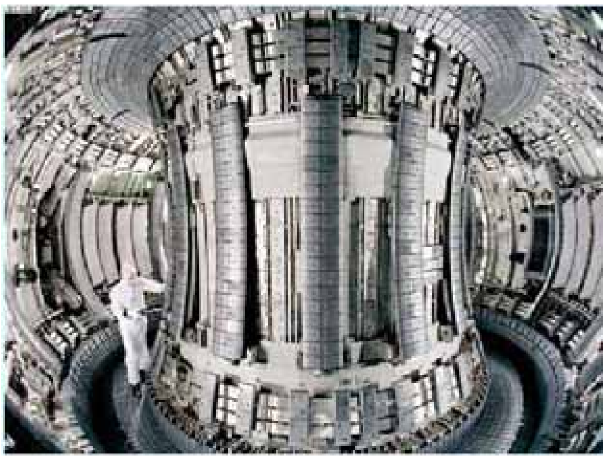
Waar het hier om gaat is, dat de sommassa van de gevormde reactieproducten, dus het neutron en het α–deeltje of ^{4}He-kern, kleiner is dan de massa van de kernen voor de reactie, dus D en T.

	Massa (u)		Massa (u)
D-kern	2,0135534	He-kern	4,0015058
T-kern	3,0155014	n	1,0086650
Som-massa, voor	5,0290548	Som-massa, na	5,0101708

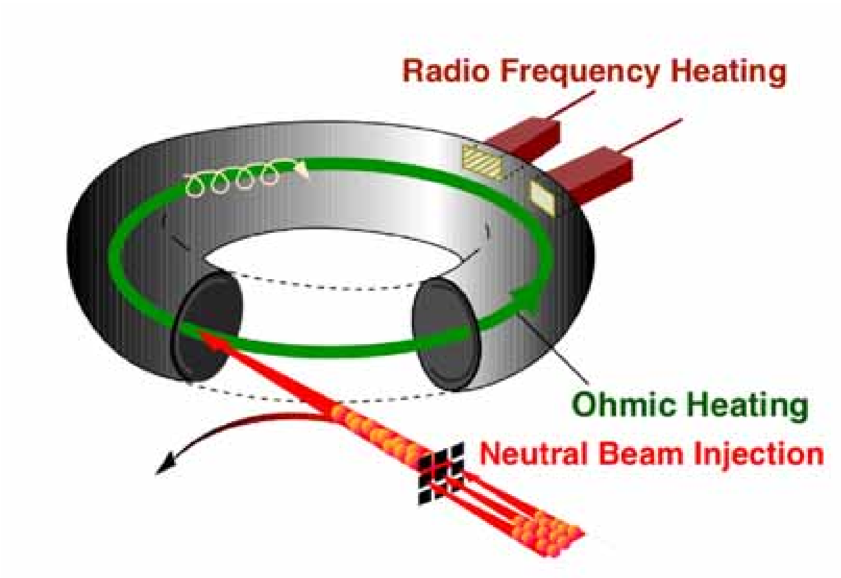
Dit massaverschil wordt volgens $E=mc^2$ omgezet in energie. Voor het grootste deel is dit kinetische energie van het neutron, dat door middel van een botsing die energie overdraagt aan de wand van het vat. De temperatuurstijging daarvan kan worden gebruikt om stoom te produceren.

In dit proces raken de "brandstoffen" D en T op. Met een handigheidje kan T weer worden aangevuld: in de wand van het vat brengt men Li aan. Bij de botsing van een neutron tegen de wand wordt dan Li omgezet in He en T, waarbij ook nog eens extra energie vrijkomt. Op deze manier hoeft tijdens de werking van de reactor geen radioactieve stof te worden toegevoerd, wat bijdraagt aan de veiligheid.

Kernen fuseren niet zomaar vanzelf. Omdat atoomkernen alle positief geladen zijn, stoten ze elkaar elektrisch af. De afstotende krachten kunnen overwonnen worden door de kernen grote snelheid te geven; dit gebeurt door de temperatuur tot grote hoogte op te voeren. Je moet dan denken aan zeer extreme temperaturen van meer dan 100 miljoen K. Bij die temperaturen zijn alle atoomkernen "kaal", d.w.z. alle atomen zijn volledig geïoniseerd: elektronen hebben losgelaten. We spreken van een plasma.



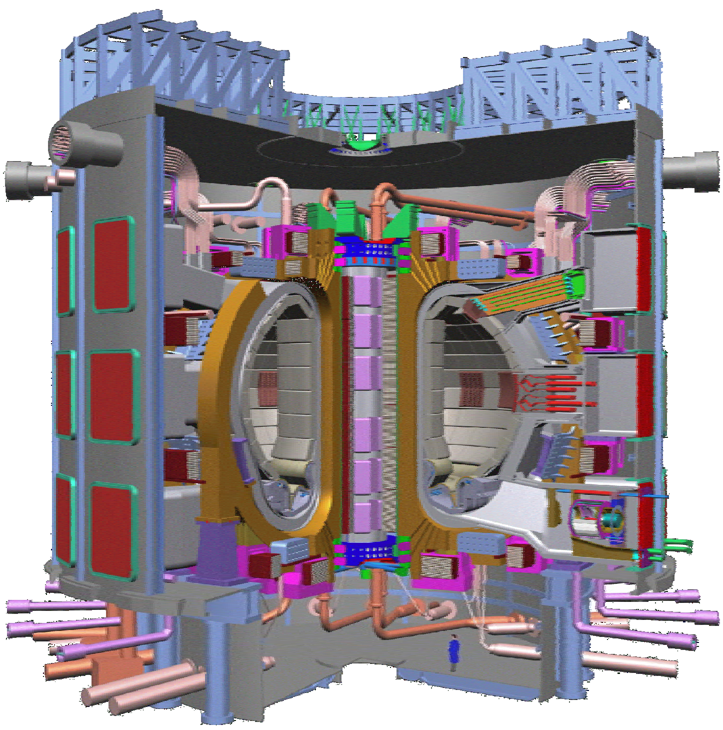
Figuur 6.14 Het vat van een fusiereactor



Figuur 6.15 Drie manieren om het plasma te verhitten

Het plasma wordt op drie manieren verhit tot genoemde temperaturen. Eerst wordt het al opgewarmd door het plasma te gebruiken als Ohmse weerstand in de secundaire keten van een transformator – er zijn dus spoelen nodig waardoorheen sterke stromen lopen. Om te voorkomen dat die spoelen zelf door de grote stroomsterkte heet worden, worden ze gekoeld met vloeibaar Helium – ze zijn dan supergeleidend, vertonen geen weerstand en worden dus ook niet warm. Op die manier wordt het plasma tot ca. 30 miljoen K verhit. Daarna wordt, net als bij een magnetron, via elektromagnetische golven een verdere verhitting gerealiseerd – tot ca. 100 miljoen K. Tot slot wordt D, dat in de reactie wordt verbruikt en dus aangevuld moet worden, met grote snelheid het plasma ingeschoten, leidend tot een verder temperatuurstijging.

Je zult je nu misschien afvragen waarom het vat waarin het plasma zich bevindt, niet smelt bij dergelijke temperaturen. Dit is te danken aan de opsluiting van het plasma in magnetische velden. Het plasma raakt de wanden van het vat niet aan, op de neutronen na die tegen de wanden botsen en zo, gecontroleerd, hun kinetische energie daaraan overdragen.



Figuur 6.16 Grote spoelen sluiten het plasma op

Hierin zit ook een heel belangrijk veiligheidsaspect van zo'n kernfusiereactor. Op elk moment bevindt zich maar een paar gram fusiematerie in de reactor. Weliswaar zeer heet, maar door de geringe massa met weinig warmte daarin opgeslagen. Als die warmte in één klap (bij een storing bijvoorbeeld) overgedragen zou worden aan het zware, metalen vat, zou dat niet eens veel in temperatuur stijgen. En in het slechte geval dat die warmte op één plek terecht zou komen, is denkbaar dat het vat plaatselijk smelt – een financiële schadepost, maar nog steeds geen ramp. De kernen zouden elektronen oppikken en veranderen in atomen. Van die atomen is alleen het T radioactief, waarbij het om minder dan 1 gram gaat. Dit zou opgevangen worden in het betonnen omhulsel dat het vat omsluit.
Ongelukken komen vaak niet alleen. Dus zelfs als het T in de omgeving terecht komt, zal het niet veel schade aan kunnen richten. Het is 1 gram gas dat zich in de atmosfeer verspreidt en dat bovendien alleen bij inademing schadelijk kan zijn. Wie niet net naast de centrale staat als het fout loopt, heeft zelfs van zo een ongeluk niets te duchten.

ITER-project

Aan energiecentrales die op fossiele brandstoffen of uranium draaien, kleven grote bezwaren. De hoeveelheid aardolie en aardgas op Aarde is te klein om de hele wereld lange tijd van energie te voorzien. Bovendien is er afval in de vorm van CO_2, hetgeen tegenwoordig in een kwade reuk staat. Ook is het zonde om aardolie te verbranden: het is immers ook een grondstof voor allerlei kunststoffen als plastics enz.

Van uranium is genoeg aanwezig voor nog een paar honderd jaar energieproductie. Daar speelt geen CO_2 –probleem, maar wel andere problemen: het radioactieve afvalprobleem, en twee veiligheidsproblemen. Een fout in een centrale kan voor ellende zorgen – zo veroorzaakte een reeks aan blunders in een centrale vlak bij Kiev een ontploffing waarbij velen gezondheidsschade opliepen. Ook is het mogelijk met zo'n centrale te werken aan een atoombom of de productie van het zeer giftige plutonium.

Om bovengenoemde redenen is men al een tijd bezig kernfusie onder de knie te krijgen. Het lijkt een prachtige bijdrage te kunnen worden aan de oplossing van ons energieprobleem: voldoende brandstof, geen CO_2 uitstoot, geen radioactief afval (behalve het vat op den duur – een probleem dat ook weer oplosbaar lijkt), geen militaire toepassing.

Tussen 2006 en 2018 wordt een reactor als boven beschreven in Frankrijk gebouwd, met financiële bijdragen van zo ongeveer alle grote staten: de EU, Rusland, de VS, China, Japan, India, Brazilië en Zuid-Korea. Blijkt tijdens de proefperiode, die zo'n 20 jaar gaat duren, de reactor goed te werken, dan kunnen er echte energiecentrales gebouwd gaan worden. De inschatting is dat het nog zo'n 40 jaar gaat duren voordat die in bedrijf zijn!

ITER project

Voor de details van het ITER-project zie http://www.iter.org

Begrippen

Relativistische snelheids-factor
Relativistische impuls
Relativistische massa
Rustmassa
Rustenergie
Equivalentie van energie en massa

Samenvatting

- Einstein kwam door de begrippen ruimte en tijd opnieuw te overdenken, tot de conclusie dat de massa van een lichaam geen constante is. Was bij Newton de massa van een lichaam nog uitsluitend een maat voor de hoeveelheid materie die in het lichaam zit opgesloten, bij Einstein is die massa snelheidsafhankelijk geworden. De **relativistische massa**

$$m_{\text{rel}} = m \cdot \gamma$$

is de uitdrukking van deze gedachte.
Omdat γ in de buurt van de lichtsnelheid zeer groot kan worden, heeft de relativistische massa dezelfde eigen schap.

- Voor snelheid v=0 is de relativistische massa gelijk aan de **rustmassa**- de massa m van een stilstaand deeltje.

- De **equivalentie van energie en massa** wordt uitgedrukt in de beroemde formule

$$E = m_{\text{rel}} c^2 .$$

m_{rel} de relativistische massa die van de snelheid afhangt.

- Benadering van de relativistische snelheidsfactor γ voor lage snelheden levert op dat je kunt schrijven

$$m_{\text{rel}} \cdot c^2 = m \cdot c^2 + \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad .$$

- Al deze termen hebben de eenheid van energie, waarmee de betekenis van $E = m_{\text{rel}} c^2$ wordt, dat in een lichaam behalve de bewegingsenergie ook nog **rustenergie** aanwezig is. Deze energie is het die men via kernsplitsing of kernfusie wil benutten.

- Volgens Newton is impuls het product van massa en snelheid van een lichaam. De **relativistische impuls** is

$$p = \gamma m v$$

Wat je moet kunnen...

- Je moet een relativistische impulsvector kunnen tekenen in een ruimtetijddiagram.
- Je moet kunnen uitleggen wat bedoeld wordt met het feit dat massa en energie 'equivalent' zijn
- Je moet kunnen uitleggen hoe relativistische massa verschilt van (gewone) massa.

Opgaven

§6.2

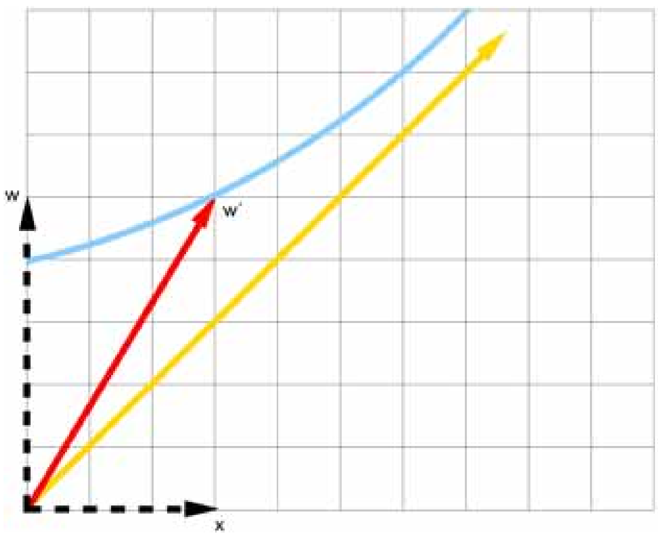
74 * Impulsbehoud – relativistisch algebraïsch

Zie figuur 6.5 a en b.
Merk op dat de ruimtelijke component van de groene en blauwe impulsvectoren gelijk zijn; dat komt in feite doordat we de correcte optelformule voor snelheden hebben gebruikt. Bereken nu eerst $m(u)$ met $u = 2v/(1+\beta^2)$) en laat vervolgens door een berekening zien dat inderdaad: $M(v)\ v = 2\ m(u)u$.
Daarmee hebben we op een algebraïsche manier laten zien dat het meetkundige ruimte-tijddiagram inderdaad klopt.

(Je vindt: $m(u)=m_0\ (1+\beta^2)/(1-\beta^2)$, en $M(v)=\gamma\, M_0= 2\ \gamma\, m(v)$, invullen bewijst de gewenste relatie)

§6.2

75 Van rood naar zwart – plaatsvector



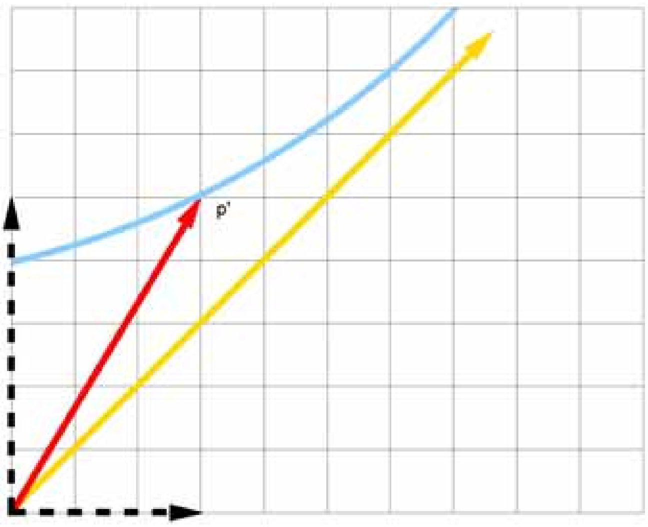
Figuur 6.17a

Zie figuur 6.17a.
De Lorentztransformaties laten de grootheid $w^2 - x^2$ invariant.

a. Hoe groot is deze in het rode stelsel?

b. Laat zien dat deze in het zwarte stelsel even groot is (zie ook T.25).

76 Van rood naar zwart – impulsvector



Figuur 6.17b

De getekende vector heeft in het rode stelsel lengte p´.

a. Bereken zijn tijd – en x-component in het zwarte stelsel.
b. Laat zien dat zijn lengte in het rode stelsel even groot is als in het zwarte.
c. Wijs een tweede vector aan die even lang is als de rode vector.

77 Heeft impuls een maximum?

Als twee deeltjes op elkaar botsen, is hun relatieve snelheid nooit groter dan c, en dus beperkt. Is hun relatieve impuls daarmee ook beperkt of kan die, in theorie, een oneindige waarde benaderen? Zo ja, onder welke omstandigheden?

78 Wat is meer: kinetische energie of mc^2?

In de uitdrukking $\gamma mc^2 \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$ staan aan de rechterkant twee energieën. Leg uit dat voor een rijdende auto de waarde van mc^2 veel groter is dan de waarde van $\frac{1}{2}mv^2$.

79 Wat gebeurt er met m_{rel} in de buurt van c?

Wat kun je opmerken over de waarde van de relativistische massa, als een lichaam de lichtsnelheid benadert?

80 mc^2 is ook veel groter dan chemische energie.

Bereken de waarde van mc^2 voor 1 liter benzine en vergelijk die met de energie die vrijkomt bij de verbranding van 1 liter benzine.

81 mc^2 in het dagelijks gebruik

In een kerncentrale wordt, door splitsing van uranium, massa omgezet in energie. Van de uraniummassa wordt 0,8 promille omgezet in energie. Neem nu een reactor met 100 kg uranium.

d. Hoeveel energie, in J uitgedrukt, kan daar uit vrij komen?
e. Hoeveel liter benzine je zou moeten verbranden om evenveel energie vrij te krijgen?

82 * Is er voor een deeltje een maximale energie?

De uitdrukking $E = m_{rel}c^2 \approx mc^2 + ½\, mv^2$ lijkt te suggereren dat er een maximum aan energie voor een deeltje bestaat. De suggestie is: $E_{max} = \frac{3}{2}mc^2$. In werkelijkheid kan de energie van een deeltje boven alle grenzen uitgroeien (naar "oneindig" gaan).
Hoe is dit te rijmen met $E = m_{rel}c^2 \approx mc^2 + ½\, mv^2$?

83 * Fotonenergie in verschillende stelsels

Toon aan dat als de energie van een foton in een stilstaand stelsel *E* is, deze in een bewegend stelsel gelijk is aan $E' = (1-\beta)\gamma E$. Maak hiervoor gebruik van figuur 6.5.

84 * $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$

Laat zien dat $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$.

85 Een relativistische klap

Als een biljartbal A tegen een andere, stilstaande (B) botst, heeft A een zekere impuls, hetgeen aanleiding geeft tot krachten bij de botsing. Zou B nu ook een even grote snelheid hebben en op A afrollen, dan bezit A een twee maal zo grote impuls in het stelsel van B als eerst, hetgeen leidt tot een twee maal zo harde klap.

We gaan na of dit relativistisch ook zo is. Een proton A vliegt met snelheid 0,99 c op een stilstaand proton B af.

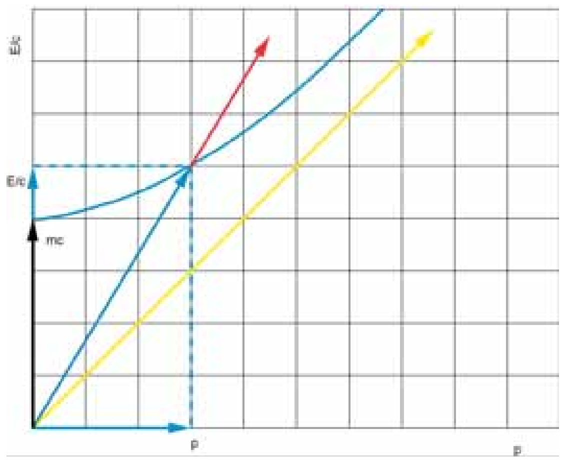
f. Bereken de ruimtelijke impuls van A in het stelsel van B, uitgedrukt in *m* en *c*, waarbij *m* de rustmassa is.

Nu laten we B ook met snelheid 0,99 c op de bewegende A afvliegen en vragen ons af of de impuls van A in B's stelsel twee maal zo groot is als je antwoord bij vraag a.

g. Bereken de snelheid van A ten opzichte van B.
h. Bereken hoeveel maal zo groot de ruimtelijke impuls van A is in B's stelsel in vergelijking tot je antwoord op vraag a.

86 * Handig aflezen

Laat door een handige keuze van de waarde voor p zien dat de lengte van de vector $\left(E/c\right)^2 - p^2$ direct uit figuur 6.18 (dit is figuur 6.6 uit de tekst) is af te lezen.



Figuur 6.18

87 *   Massacreatie

Bij beschieting van een Argonkern met een proton ontstaan een Kaliumkern en een neutron: ${}^{40}_{18}Ar + {}^{1}_{1}p \rightarrow {}^{40}_{19}K + {}^{1}_{0}n$.

De Argonkern en het proton hebben samen een rustmassa van 40,95978 u (atomaire massa-eenheden). De K-kern en het neutron hebben samen een rustmassa van 40,96224 u. Stel nu dat de massacreatie die bij deze reactie optreedt geheel toe te schrijven is aan het feit dat het proton met zeer grote snelheid op de Ar-kern wordt geschoten, bereken dan de minimale snelheid van dit proton.

Maak gebruik van:

rustmassa van het proton = 1,007276 u,
1 u = $1{,}660539 \cdot 10^{-27}$ kg.

7 Appendix

Wiskundige benaderingen, vectoren, impuls.

7.1 Benaderingen

Kijk naar de wiskundige uitdrukking $\frac{1}{1-x}$; deze kun je voor $0 \le x < 1$ benaderen met behulp van de reeks:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Als we deze reeks na een bepaald aantal termen afbreken, vormt de verkregen veelterm een benadering van het linkerlid. Dit kun je zien, als je 1-x naar de andere kant brengt:

$$1 \approx (1-x) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)$$

Uitwerking van de positieve termen aan de rechterkant levert,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

terwijl de negatieve termen (afkomstig van −x) zijn:

$$-x - x^2 - x^3 - x^4 - \ldots$$

Deze optelling levert $1 - x^4$; door hogere machten van x mee te nemen komt het product voor $0 \le x < 1$ willekeurig dicht bij 1 te liggen.

We maken hieronder gebruik van de volgende, zogenaamde lineaire benadering, waarbij x steeds een getal voorstelt dat veel kleiner is dan 1:

$$\boxed{\frac{1}{1-x} \approx 1 + x}$$

We kunnen nu ook een benadering vinden voor de uitdrukking $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Als oplossing proberen we $1 + a \cdot x + b \cdot x^2 + c \cdot x^3 + \ldots$, en rekenen dan de waarden van de coëfficiënten $a,\ b,\ c,\ \ldots$ uit. Bedenk dat

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{1-x}$$

en van de laatste uitdrukking kennen we al de (benaderde) uitkomst. We berekenen

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1 + a \cdot x + b \cdot x^2 + c \cdot x^3 + \ldots) \cdot (1 + a \cdot x + b \cdot x^2 + c \cdot x^3 + \ldots) =$$

$$(1 + 2ax + (2b + a^2)x^2 + (2c + 2ab)x^3 + \ldots) =$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Hieruit zie je dat $a = 1/2,\ b = 3/8,\ c = 5/16$. De uitdrukking $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ laat zich daarom benaderen door $1 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{8} \cdot x^2 + \frac{5}{16} \cdot x^3 + \ldots$

We laten de hogere machten van x buiten beschouwing en doen de benadering:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \ldots}$$

7.2 Over vectoren in de ruimte en ruimtetijd

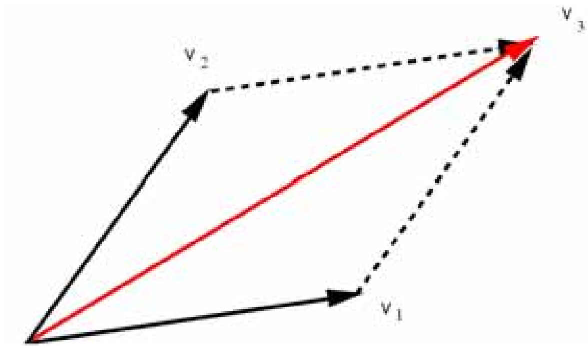
Grootheden met richting en grootte, zoals snelheid en kracht, noemen we **vectoren**. Een vector kunnen we ontbinden in componenten. Een vector kunnen we ontbinden in componenten;

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

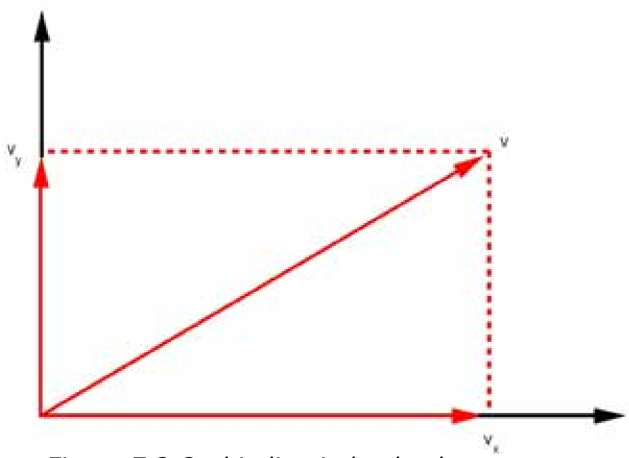
Ook kunnen we 2 of meer vectoren bij elkaar optellen.

Optelling doen we (zie figuur 7.1) met behulp van de parallellogrammethode: de twee vectoren die we bij elkaar willen optellen vormen twee zijden van een parallellogram; de somvector is de diagonaal die loopt van het punt waar de staarten elkaar raken naar het daar tegenover liggende hoekpunt.



Figuur 7.1 Vectoroptelling

Bij het ontbinden van een vector in 2 componenten zoeken we 2 nieuwe vectoren die, bij elkaar opgeteld, de te ontbinden vector weer opleveren. Bij de optelling gebruiken we weer de parallellogrammethode.
Dat gaat het gemakkelijkst als je ontbindt in componenten die loodrecht op elkaar staan; het parallellogram is dan een rechthoek.



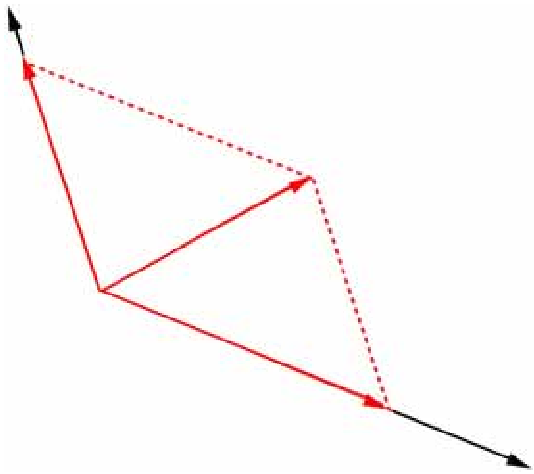
Figuur 7.2 Ontbinding in loodrechte componenten

Ook als de componenten niet loodrecht op elkaar staan, blijft gelden dat zij de zijden van een parallellogram vormen waarvan de somvector een diagonaal is.

Neem eens een gebeurtenis in de Newtonse ruimte en tijd. Die gebeurtenis wordt vastgelegd door plaats (x) en tijd (t). We kunnen dit schrijven als (t,x) en dit laatste opvatten als een vector met componenten t langs de tijd-as en x langs de plaats-as.

Bekijken we dezelfde gebeurtenis vanuit een stelsel (t,x') dat beweegt ten opzichte van het eerder gekozen stelsel en waarvan de oorsprong op t = 0 samenvalt met het eerste stelsel, dan zal dat in de Newtonse theorie geen gevolgen hebben voor de tijdcomponent maar wel voor de plaatscomponent.

Op vergelijkbare manier kunnen we vectoren tekenen met als componenten m (massa) en p (impuls). De betekenis van de lijn is dan: bij gegeven snelheid v neemt de impuls evenredig met de massa toe. De steilheid van de lijn wordt juist door die snelheid bepaald.
De gestippelde lijn is getrokken in een stelsel dat beweegt ten opzichte van het eerder gekozen stelsel; de impuls in dat gestippelde stelsel heeft een andere waarde omdat de snelheid van het lichaam een andere waarde heeft.



Figuur 7.3 Ontbinding in niet-loodrechte componenten

7.3 Impuls en impulsbehoud in de mechanica van Newton

Wet van impulsbehoud

Onder de impuls ($\vec{p}$) van een lichaam verstaan we het product van zijn massa en zijn snelheid: $\vec{p} = m.\vec{v}$. Deze grootheid blijkt heel handig te werken bij het beschouwen van botsingen.
Neem twee biljartballen in gedachten, A en B. A botst tegen B en oefent zo een kracht op B uit: $\vec{F}_{\mathrm{AopB}}$. Volgens Newtons 3^{e} wet oefent B een even grote, tegengesteld gerichte, kracht op A uit:

$$\vec{F}_{\mathrm{AopB}} = -\vec{F}_{\mathrm{BopA}} \ .$$

De kracht van A op B geeft B een versnelling aan B; de reactiekracht verandert de snelheid van A:

$$m_{\mathrm{B}} \cdot \vec{a}_{\mathrm{B}} = \vec{F}_{\mathrm{AopB}} = -\vec{F}_{\mathrm{BopA}} = - m_{\mathrm{A}} \cdot \vec{a}_{\mathrm{A}}$$

Schrijven we $\Delta\vec{v} = \vec{a} \cdot \Delta t$ en vermenigvuldigen we links en rechts met Δt, dan krijgen we

$$m_{\mathrm{B}} \cdot \Delta\vec{v}_{\mathrm{B}} = - m_{\mathrm{A}} \cdot \Delta\vec{v}_{\mathrm{A}}$$

Dit kun je ook schrijven als

$$\Delta(m_{\mathrm{B}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{B}}) = - \Delta(m_{\mathrm{A}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{A}})$$

omdat de massa´s bij de botsing niet veranderen. Hier staat dat de impulsen van A en B evenveel veranderen, en dat de impulstoename van B gelijk is aan de impulsafname van A. Je mag dan ook zeggen dat de impulssom onveranderd is gebleven

$$\Delta\vec{p}_{\mathrm{A}} + \Delta\vec{p}_{\mathrm{B}} = 0$$

Dit staat bekend onder de **wet van behoud van impuls**. Deze wet geldt altijd, onder de voorwaarde dat er geen krachten van buiten werkzaam zijn.

De impulswet geldt zelfs nog algemener dan we afgeleid hebben. Ook als de massa veranderd blijft de impulswet geldig. Neem als voorbeeld een vliegtuig dat massa verliest door verbranding van kerosine. Dat komt omdat de tweede wet van Newton die gewoonlijk geschreven wordt als $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, eigenlijk luidt $\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta\vec{p}$ .Voor constante massa is dat hetzelfde, maar niet als de massa kan veranderen. Hieruit kunnen we begrijpen dat impulsbehoud ook geldt in de relativiteitstheorie, hoewel de massa daar geen constante is.

Botsingen

We onderscheiden twee soorten: de centrale botsingen en de niet-centrale. Bij de centrale liggen de snelheidsvectoren van de botsende deeltjes voor en na de botsing op één lijn. Dit zijn de eenvoudigste botsingen, die we hier kort bespreken. We kunnen deze nog in drie categorieën onderverdelen:

- De volledig elastische; dat zijn botsingen zonder verlies aan kinetische energie. Ze zijn wiskundig op te lossen door gebruikmaking van zowel de wet van behoud van impuls als de wet van behoud van kinetische energie. Dit soort botsingen komt niet bij biljartballen voor, maar wel op het microniveau van atomen en dergelijke.
- De volledig inelastische: hierbij plakken de deeltjes na de botsing aan elkaar en gaan als één geheel verder. Denk aan biljartballen die van stopverf gemaakt zijn. De wet van behoud van impuls gaat hier wel op, die van kinetische energie niet: er is arbeid verricht bij het vervormen van de ballen hetgeen ten koste is gegaan van de kinetische energie.
- Alle botsingen die daar tussenin liggen – de botsingen van reële biljartballen bijvoorbeeld.

We beschouwen het allereenvoudigste geval: de centrale botsing die volledig inelastisch is, waarbij de twee botsende deeltjes ook nog even zwaar zijn.
Zijn de snelheden voor de botsing $\vec{v}_{\mathrm{A}}$ en $\vec{v}_{\mathrm{B}}$, dan is de impulssom voor de botsing

$$\sum \vec{p} = \mathrm{m}_{\mathrm{A}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{A}} + \mathrm{m}_{\mathrm{B}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{B}}$$

De wet van behoud van impuls zegt dat deze som onveranderd blijft.
Na de botsing geldt dan

$$\sum \vec{p} = m_{\mathrm{A+B}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{A+B}} = \mathrm{m}_{\mathrm{A}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{A}} + \mathrm{m}_{\mathrm{B}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{B}}$$

Omdat $m_A = m_B$, geldt dat $m_{A+B} = 2m_A$; deling door m_A levert dan op:

$$\vec{v}_{\mathrm{A}} + \vec{v}_{\mathrm{B}} = 2\vec{v}_{\mathrm{A+B}}$$

Twee eenvoudige varianten hiervan zijn:

- A bewoog, maar B lag stil. Na de botsing bewegen beide (als één geheel) met de halve beginsnelheid van A verder.
- A en B bewegen met even grote snelheid op elkaar af: $\vec{v}_{\mathrm{A}} = -\vec{v}_{\mathrm{B}}$. Na de botsing ligt de gevormde combinatie stil.

Opgaven

§7.1

88 Hoe goed zijn de benaderingen?

a. Bereken met je rekenmachine $\dfrac{1}{1-x}$, voor $x = 0.01,\ 0.1,\ 0.2\ en\ 0.3$.

b. Vergelijk deze waarden met de uitkomsten van de benaderingsformule $\dfrac{1}{1-x} \approx 1+x$

c. Voor elke waarden van x is de fout minder dan 1 %?

d. En voor welke waarden van x als ook de tweede benaderingsterm wordt meegenomen?

89 Zijn ook deze benaderingen gerechtvaardigd?

a. Ga na met je rekenmachine voor welke van de waarden $x = 0.01,\ 0.1,\ 0.2 \text{ en } 0.3$ de formule $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1+\dfrac{1}{2}\cdot x$ een goede benadering is.

b. Gebruik de boven afgeleide benaderingen en beredeneer dat geldt $\sqrt{1-x} \approx 1-\dfrac{1}{2}x$

c. Ga dit weer na voor enkele waarden van x.