

**Massa's:  
Gewichtige zaken  
in de Relativiteitstheorie  
en de Quantummechanica**

Sijbrand de Jong  
Ronald Kleiss  
Radboud Universiteit Nijmegen/NIKHEF  
Toernooiveld 1  
6525 ED Nijmegen  
email: [s.dejong@science.ru.nl](mailto:s.dejong@science.ru.nl), [R.Kleiss@science.ru.nl](mailto:R.Kleiss@science.ru.nl)

28 november 2007



# Inhoudsopgave

Voorwoord	iii
1 Massa in de klassieke mechanica	1
2 Massa in de speciale relativiteitstheorie	11
3 De algemene relativiteitstheorie	19
4 Quantummechanica	31
5 Relativistische quantummechanica	45
6 Het Standaard Model	53
7 IJktheorie: electromagnetisme	69
8 De electrozwakke wisselwerking	81
9 Het Higgs mechanisme	91
10 Zoeken naar het Higgs deeltje	99
11 Neutrino Menging	113
A Wiskunde: De taal van de natuurkunde	117
B Deeltjes versnellers: Een bron van deeltjes	125
C Deeltjes detectoren: De ogen van de fysicus	129



# Voorwoord

Deze tekst is gebaseerd op een HOVO<sup>1</sup> cursus getiteld “Massa: een kwestie van gewicht” die een van ons (SdJ) in het najaar van 2004 heeft gegeven. Over massa hebben mijn collega Ronald Kleiss en ik in de afgelopen jaren veel nagedacht. In plaats van een min of meer standaard cursus, gaat *Massa’s: Gewichtige zaken in de Relativiteitstheorie en de Quantummechanica* dan ook vooral over onze eigen zoektocht naar het wezen van massa. Massa heeft veel aspecten, in de klassieke mechanica speelt het een belangrijke rol, in de relativiteitstheorie wordt voor het eerst duidelijk dat ook mechanica kan worden gedaan met objecten zonder massa, terwijl ook duidelijk wordt dat massa en energie verwant zijn. In de algemene relativiteitstheorie speelt de equivalentie van trage en zware de hoofdrol en wordt duidelijk dat massa en de eigenschappen van de ruimte niet zijn te scheiden. En in het standaard model van de elementaire deeltjes blijkt dat massa als intrinsieke statische eigenschap van een deeltje niet langer houdbaar is, maar moet worden vervangen door een massa die dynamisch ontstaat, terwijl en-passent in de quantummechanica massa nog aanleiding blijkt tot oscillatie van het ene in het andere deeltje. Het is onze bedoeling door al deze aspecten heen te gaan en met de cursisten onze verwondering over het begrip massa te delen. Nadeel van deze opzet is dat er geen standaard materiaal, zoals een boek waarin het meeste materiaal staat, voorhanden is. Vandaar dus deze syllabus.

Het materiaal in de cursus overlapt gedeeltelijk met dat van de cursus die een van ons (SdJ) in 2003 voor het HOVO heeft gegeven, *Elementaire deeltjes en de verklaring van ons bestaan*, en die ook grotendeels terugkwam in het honourscollege van Kosmos tot Mens deel I die in 2004 en 2005 is gegeven door ons. Die overlap zal minder dan 50% zijn en de overlappende delen worden vanuit een ander standpunt behandeld. Op die manier kunnen de twee cursussen elkaar wel versterken, terwijl ze ook onafhankelijk van elkaar te volgen zijn.

---

<sup>1</sup>Hoger Onderwijs voor Ouderen

## Opzet van de cursus

De cursus bestaat uit tien bijeenkomsten. In de eerste bijeenkomst willen we de rol van massa in de klassieke mechanica behandelen. In de twee opvolgende bijeenkomsten willen we het hebben over massa in de speciale en algemene relativiteitstheorie. Vervolgens willen we zes weken van de cursus besteden aan massa in de quantummechanische ijktheorie van het Standaard Model en het hebben over de rol van de structuur van het vacuüm voor massa. In de laatste bijeenkomst willen we de rol van massa- en energiedichtheid op de evolutie van het heelal bespreken en de schijnbare onverenigbaarheid van relativiteitstheorie en quantummechanica. Het kan natuurlijk tijdens de cursus heel goed blijken dat we dit plan moeten bijstellen, maar dat zien we dan wel weer. Dit college wordt afgesloten op zaterdag 2 december met een bezoek aan CERN.

# Hoofdstuk 1

## Massa in de klassieke mechanica

De mechanica is de leer die zich bezighoudt met de beweging van objecten. Beweging van objecten ervaren we naïef als de verandering van de plaats van een object in de tijd. Om dit preciezer te maken moeten we zowel de plaats definiëren als zeggen wat we met tijd bedoelen. We beginnen door een vaste *waarnemer* aan te nemen. De rol van de waarnemer zal cruciaal blijken te zijn.

Voor de definitie van plaats maken we gebruik van een Cartesisch assenstelsel. Ten opzichte van een waarnemer definiëren we drie richtingen in de ruimte, zodat de drie richtingen loodrecht op elkaar staan. Eén van de drie richtingen noemen we de  $x$ -as, een van de andere richtingen de  $y$ -as. Er blijkt dan een unieke richting te zijn die loodrecht op de  $x$ -as en de  $y$ -as staat en aan de “rechter hand regel” voldoet. Deze noemen we de  $z$ -as. De rechter handregel zegt dat als je de vingers van je rechterhand in de richting laat gaan van de  $x$ -as naar de  $y$ -as, dan wijst je duim in de  $z$ -richting. De relatieve richtingen van de assen ligt hiermee vast. De waarnemer kan ze echter als geheel nog willekeurig in de ruimte leggen. We definiëren nu een coördinatenstelsel door op elk van de drie richtingen een eenheidsafstand vast te leggen. De standaard hiervoor is de meter, klassiek gedefinieerd als de lengte van een specifieke staaf die de standaardmeter wordt genoemd. Langs elke as kunnen we nu een afstand afmeten door die met de standaard meter af te passen. We laten alle waarnemers afspreken dat de lengtemaat die van de standaardmeter is. Naast de drie richtingen (assen) en de lengtemaat moeten we ook nog een nulpunt vastleggen, de oorsprong. We laten het aan de waarnemen om die te kiezen. Coördinaten langs de assen worden vervolgens gemeten ten opzichte van deze oorsprong. De oorsprong heeft dus zelf noodzakelijkerwijs de coördinaten  $(0, 0, 0)$ . De keuze van de plaats van de oorsprong is er weer een van de waarnemer. Een punt in de driedimensionale ruimte kan nu door de waarnemer éénduidige worden gekarakteriseerd door de afstand langs de drie assen vast te leggen. De coördinaten van een willekeurig

punt zijn dan  $(x, y, z)$ .

De tijd is een heel wat waziger begrip. We meten verandering in de tijd, maar verandering is ook op te vatten als oorsprong van de tijd. We gaan hier uit van tijd die gemeten wordt door een klok, waarbij een klok een apparaat is dat gelijke intervallen van tijd registreert, dus bijvoorbeeld elke seconde tikt. De eenheid van tijd is de seconde, min of meer de tijdsperiode tussen twee hartslagen (hoewel daar nogal wat spreiding in zit.) Behalve een tijdsperiode moeten we ook een moment aangeven waarop de waarde van de tijd nul is. Tijden worden gemeten ten opzichte van deze  $t = 0$ . Het nulpunt van de tijd wordt weer bepaald door de waarnemer. Voor de tijdsperiode spreken we een standaard af, de seconde.

De waarnemer kan nu het pad door de ruimte dat een puntdeeltje in de tijd aflegt geven door de plaatscoördinaten op elk tijdstip  $(x(t), y(t), z(t))$ , waarbij  $t$  de tijd is. Een korte notatie maakt gebruik van vectoren:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Wat we nu echt willen in de mechanica is een voorspelling voor de baan van een puntdeeltje door de ruimte. Daartoe definiëren we eerst twee begrippen, de snelheid:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} dx(t)/dt \\ dy(t)/dt \\ dz(t)/dt \end{pmatrix},$$

en de versnelling:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} d^2x(t)/dt^2 \\ d^2y(t)/dt^2 \\ d^2z(t)/dt^2 \end{pmatrix}.$$

Hieruit zien we dat als er geen versnelling is ( $\vec{a} = 0$ ) de snelheid constant is. Voor een puntdeeltje met constante snelheid krijgen we:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v},$$

hetgeen zich laat oplossen voor constante  $\vec{v}$  als:

$$\vec{r}(t) = \vec{v} t + \vec{r}(t = 0).$$

Met andere woorden als we in dit geval de plaats op het tijdstip  $t = 0$  weten dan kunnen we de positie in de ruimte op elk ander willekeurig tijdstip voorspellen.

De snelheid van een lichaam (object, voorwerp) is constant volgens de eerste wet van Newton als er geen kracht op werkt [1]:



*Every body perseveres in its state of rest, or of uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed thereon.*

Dit introduceert het concept van de *kracht*. Door te kijken naar de baan van een puntdeeltje kunnen we dus zien of er een (netto) kracht op werkt.

We kunnen nu ook verwachten dat als er een kracht op een lichaam werkt er een verandering van snelheid en dus een versnelling is. De tweede wet van Newton geeft dit preciezer weer:

*The alteration of motion is ever proportional to the motive force impressed; and is made in the direction of the right line in which that force is impressed.*

Hierbij moeten we dan nog weten dat *motion* door Newton is gedefinieerd als het produkt van snelheid en *massa*, wij noemen dat in het Nederlands nu *impuls*,  $\vec{p} = m\vec{v}$  (*momentum* in het Engels.) In formulevorm geeft dat:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Als de massa niet van de tijd afhangt wordt dat:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

De laatste vorm is het bekendst, maar is wat misleidend, want in Newtons formulering gaat het terecht om de impuls en niet om de versnelling.

Intussen is de *massa* in het verhaal geslopen. Die is hierbij op een constante na impliciet gedefinieerd in de tweede wet van Newton. De definitie van Newton voor massa is het allereerste dat in de Principia staat:

*The quantity of matter is the measure of the same, arising from its density and bulk conjunctly.*

In andere woorden: *dichtheid* maal volume. Het definitieprobleem is verschoven naar dichtheid, en daar komt Sir Isaac nooit meer op terug.

De massa die in de definitie van impuls staat en daarmee in de tweede wet van Newton heet de *trage massa* of ook wel *inertiële massa*. Dit is de massa die weerstand biedt aan de verandering van snelheid onder invloed van een kracht. Hoe groter de massa, hoe kleiner de versnelling bij een constante kracht.

Behalve de door Newton geformuleerde relatie tussen kracht en versnelling draait de Principia voor het grootste deel om een verschijnsel dat kracht genereert, namelijk *zwaartekracht*. Newton formuleert zijn universele zwaartekrachtwet als:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},$$

waarbij  $\vec{r}$  de verbindingsvector is tussen de twee (punt)massa's  $m_1$  en  $m_2$  en  $G$  de universele zwaartekrachtsconstante is. Het minteken duidt uit dat de kracht tussen twee massa's aantrekkend is. Volgens Newton is de zwaartekracht universeel in de zin dat het de kracht is die de beweging van de planeten verklaart, maar dat ook de aantrekkingskracht van de aarde door dezelfde wet wordt bepaald.

Een belangrijk gegeven is dat omdat zwaartekracht alleen maar een aantrekkende kracht kan zijn zwaartekracht alleen maar groter wordt als het aantal objecten met massa toeneemt. Er kan geen opheffing van krachten plaatsvinden, zoals bijvoorbeeld bij elektrische krachten, waar tegengestelde ladingen in een netto kracht van nul kan resulteren. Zwaartekracht kan dan ook niet worden afgeschermd zoals elektrische velden door een kooi van Faraday kunnen worden afgeschermd.

De massa's die voorkomen in de zwaartekrachtwet van Newton worden *zware massa* of ook wel *gravitationele massa* genoemd.

Het meten van massa is op zichzelf al een interessante bezigheid. De meeste mensen zullen bijvoorbeeld hun eigen massa meten, of die van bloem en suiker voor de cake, met een weegschaal waar de massa op wordt gezet of gelegd. Een dergelijke weegschaal werkt met een veer die wordt ingedrukt. Een kleine massa drukt de veer weinig in, een grote massa drukt de veer verder in. In elektronische weegschalen kan de veer door een piëzo element zijn vervangen, maar ook dat is te zien als een veer met een hele grote veerconstante. Het indrukken van de veer van een weegschaal is het gevolg van de aantrekkingskracht van de aarde op het object op de weegschaal. De kracht waarmee het object naar de aarde toe getrokken wordt is:

$$F = -G \frac{m_{\text{object}} m_{\text{aarde}}}{r_{\text{aarde}}^2}.$$

De constante  $G$  in de Newtons zwaartekracht formule is een fundamentele natuurconstante.

Lokaal op een bepaalde plaats (de plaats is van belang omdat de afstand tot het middelpunt van de aarde varieert al naar gelang de plaats op de aardbol) kunnen we de constanten samenvatten in een gravitatieversnelling  $g$ :

$$g = G \frac{m_{\text{aarde}}}{r_{\text{aarde}}^2},$$

zodat de zwaartekracht van de aarde op het object te schrijven is als:

$$F = -m_{\text{object}} g.$$

Het blijkt dat de zwaartekrachtversnelling hier in Nederland ongeveer

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

is. Dat kunnen we meten, maar ook berekenen met:

$$m_{\text{aarde}} = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg} \quad (1.1)$$

$$r_{\text{aarde}} = 6.37 \times 10^6 \text{ m} \quad (1.2)$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2} \quad (1.3)$$

De kracht die op een veer moet worden uitgeoefend om de veer in lengte  $x$  in te drukken kan worden uitgedrukt met de wet van Hooke:

$$F = k x,$$

waarbij  $k$  de veerconstante is. Op een weegschaal wordt de veer ingedrukt totdat de kracht waarmee de veer omhoog duwt gelijk is aan de kracht waarmee het object door de aarde wordt aangetrokken. Er geldt dan:

$$x = \frac{g}{k} m.$$

De constanten  $g$  en  $k$  liggen vast voor een bepaalde weegschaal en in feite bepalen die de ijking van de weegschaal. De indrukking is voorts recht evenredig met de massa.

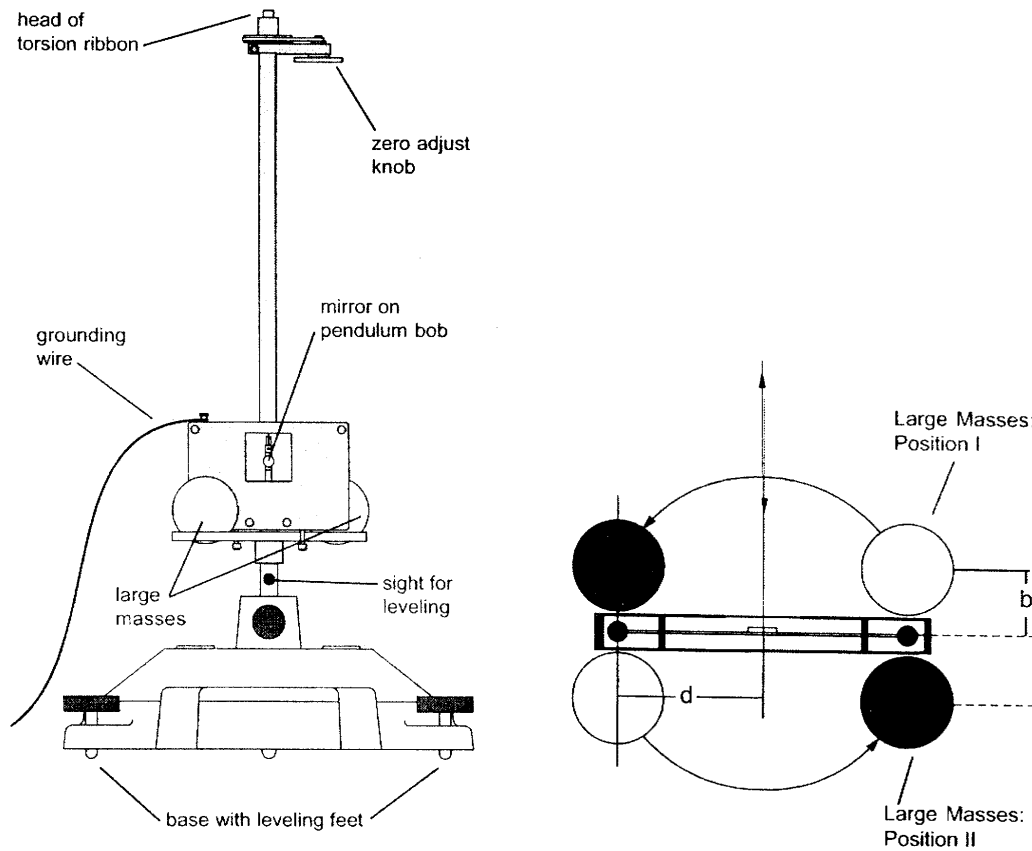
De bovenstaande methode om massa te meten gaat er vanuit dat de massa die in de tweede wet van Newton staat ( $F = ma$ ) hetzelfde is als de massa die in de gravitatiewet van Newton staat. Dus:

$$\textit{Trage massa} = \textit{zware massa}.$$

Dit heet het equivalentieprincipe en is het essentiële ingrediënt van de algemene relativiteitstheorie. We komen daar later op terug.

Een andere methode om te wegen is met een balans. Het idee van de balans is dat twee massa's met elkaar kunnen worden vergeleken. De ijking van de balans vindt plaats door een standaard massa te benoemen. Hiervoor is de standaard kilogram gekozen, waarvan precies één referentie exemplaar bestaat. Met een balans zijn alle massa's hiermee te vergelijken. De standaard kilogram, of een replica, kan ook worden gebruikt om weegschalen met een veer te ijken. Het feit dat we een massa standaard nodig hebben betekent dat in de klassieke mechanica massa is gedefinieerd tot op een constante. Als we alle massa's met een vast getal vermenigvuldigen verandert er niets aan onze natuurwetten.

De constante  $G$  is van fundamenteel belang, maar het is echter niet makkelijk om  $G$  te meten. De eerste betrouwbare meting is gedaan door Cavendish [2] en in feite worden de meest nauwkeurige metingen vandaag de dag nog steeds volgens dat principe gedaan. In Fig. 1.1 staat een moderne versie van het apparaat van Cavendish afgebeeld. Aan een torsieveer hangen twee ronde ballen van een zwaar materiaal die door een stang zijn verbonden als een soort halter. Deze ballen



Figuur 1.1: Links een dwarsdoorsnede van de opstelling van Cavendish om de gravitatieconstante van Newton te meten. Aan de bovenkant zit een torsieveer geklemd. De torsieveer is een draad die gedraaid wordt. Aan de onderkant van de torsieveer zit een halterconstructie van twee massieve bollen elk aan de uiteinde van een stang die in het midden aan de torsieveer is opgehangen. Deze constructie is beschermd door een doos, zodat luchtstroming en elektrische lading geen invloed hebben op de beweging en de krachten op de halter. Aan de buitenzijde van de beschermdoos is een draaiplaat met twee zware massieve metalen bollen erop. De bollen zijn diagonaal ten opzichte van elkaar gemonteerd op de draaiplaat. Aan de torsieveer zit een spiegel gemonteerd die met het uiteinde van de draad meedraait. Door met een laser op de spiegel te schijnen is via het teruggekaatste licht de hoek van de spiegel te meten. Rechts is de constructie van de halter en de twee ballen op de draaiplaat te zien van bovenaf. De draaiplaat kan zo worden gedraaid dat de grote ballen in de getoonde positie zijn of in de gespiegelde positie, dus net aan de andere kant van de ballen aan het eind van de halter.

kunnen worden aangetrokken door twee grotere en zwaardere ballen die op een roterende schijf zijn gemonteerd. Door de schijf met de zware ballen te roteren kunnen die ballen beiden op kleine afstand van de ballen aan het uiteinde van de halter worden gebracht aan de ene of aan de andere kant. De meting is helemaal gebaseerd op de aantrekking tussen de ballen aan de halter en de ballen op de draaiplaat. Door de draaiplaat van de ene in de andere uiterste stand te draaien wordt de torsiekracht op de draad net omgedraaid. Door de verdraaiing van de draad te meten wordt de kracht bepaald. De verdraaiing van de draad wordt bepaald via een lichtstraal op een spiegeltje dat aan het einde van de draad vast zit. Op die manier kan de lichtstraal op grote afstand worden geprojecteerd en kan met huis-tuin-en-keuken middelen een nauwkeurig meting van de verdraaiing van de draad worden gemaakt. Om de kracht op de torsie veer te kennen moet ook de veerconstante bekend zijn. Die wordt gemeten door de ballen op de draaiplaat te draaien en zo de kracht van de andere kant te laten komen. De torsie veer is nauwelijks gedempt en gaat niet meteen van de ene verdraaiing naar de andere maar oscilleert eerst een tijdje om de nieuwe positie heen. De resonantiefrequentie van een veer is direct aan de veerconstante gerelateerd en via de oscillatiefrequentie kan de veerconstante worden vastgesteld zonder van zwaartekracht op enige manier gebruik te maken. Met de veerconstante eenmaal bekend kan uit de verdraaiing de kracht worden gemeten die de ballen van halter en draaiplaat op elkaar uitoefenen. Na nauwkeurige meting van de massa's van de ballen, dat wil zeggen een nauwkeurige vergelijking via een balans met de standaard kilogram, en een nauwkeurige meting van de afstanden tussen de ballen, kan de zwaartekrachtconstante van Newton  $G$  worden bepaald. In de praktijk is deze meting erg moeilijk. Als er nog ergens een asymmetrische massaverdeling in de buurt is, of als er (statische) elektrische ladingen in het spel zijn wordt de meting behoorlijk verstoord. Het feit dat de elektrische kracht voor twee ladingen van 1 Coulomb circa  $10^{10}$  keer sterker is dan de zwaartekracht tussen twee keer een kilo helpt bepaald niet de meting nauwkeurig te doen, ondanks dat alles zorgvuldig is geaard.

De meest nauwkeurige metingen van  $G$  zijn gedaan met variaties op het bovenbeschreven Cavendish experiment. De verschillende metingen lopen echter dusdanig uit elkaar dat het NIST, het Amerikaanse bureau van standaards, een nauwkeurigheid opgeeft die minder nauwkeurig is dan veel van de individuele metingen, maar wel de spreiding in de verschillende metingen die als betrouwbaar worden verondersteld, reflecteert:

$$G = (6.6742 \pm 0.0010) \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}.$$

Een afbeelding van een state-of-the-art experiment om  $G$  te meten staat in Fig. 1.2.



Figuur 1.2: Foto van het Eöt-Wash experiment dat aan de Universiteit van Washington in Seattle wordt uitgevoerd.

De gravitatiewet van Newton is getest tot ongeveer bovenstaande nauwkeurigheid voor afstanden tussen de massa's van de orde van een millimeter tot extragalactische afstanden. Daarbij moet wel worden aangetekend dat toepassing van de zwaartekrachtwet op de rotatie van melkwegstelsel leidt tot de conclusie dat er aanzienlijk meer massa in die stelsels moet zitten dan zichtbaar (circa vijf keer meer) en met een bepaald aparte verdeling, waarbij de niet zichtbare massa op grote afstand van het centrum van het melkwegstelsel toeneemt. Alternatief aan die conclusie kan natuurlijk de gravitatiewet op die afstanden in twijfel worden getrokken. De gravitatiewet testen op afstanden kleiner dan een millimeter is bijzonder interessant (we komen daar op terug), maar is experimenteel ontzettend moeilijk, omdat noodzakelijkerwijs de massa's heel klein worden op die afstanden bij gebruik van op aarde voorhande materialen.

Voor conservatieve krachten, en alle fundamentele krachten zijn conservatief, blijkt dat de kracht kan worden geschreven als:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} -\partial U/\partial x \\ -\partial U/\partial y \\ -\partial U/\partial z \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Hierin is  $U$  de potentiële energie. Bijvoorbeeld de potentiële energie van de zwaartekracht van de aarde op een lichaam als het onze neemt af met de afstand tot de aarde. Dit is precies waarom de zwaartekracht ons naar de aarde toe trekt (let op het minteken in formule 1.4.) Het is opmerkelijk dat een krachtveld met drie componenten voor elk punt van de ruimte<sup>1</sup> kan worden bepaald in termen van een potentiële energie met maar één getal per punt in de ruimte.<sup>2</sup> Een conservatief krachtveld bevat dus kennelijk een factor drie redundante informatie. In moderne theorieën wordt dan ook met de potentiële energie gewerkt en niet met kracht.<sup>3</sup> De gravitatiepotentiaal wordt gegeven door:

$$U = -G\frac{m_1m_2}{r} = -G\frac{m_1m_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (1.5)$$

en hangt dus alleen af van de afstand tussen twee massa's, een scalair getal.

---

<sup>1</sup>We noemen een veld met drie componenten een vectorveld.

<sup>2</sup>We noemen een veld met maar één component een scalarveld.

<sup>3</sup>We kunnen het gebruik van potentiële energie in plaats van kracht ook als een hoger abstractieniveau zien.





## Hoofdstuk 2

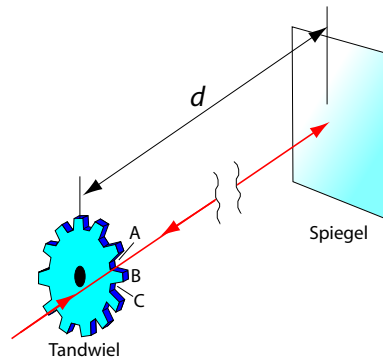
# Massa in de speciale relativiteitstheorie

### De lichtsnelheid

Newton geloofde in “actio in distance”, het fenomeen dat krachten, zoals de zwaartekracht, zich in de ruimte met oneindige grote snelheid voortplanten en “op afstand” op andere lichamen werken. In de 19<sup>e</sup> eeuw werd duidelijk dat elektromagnetische krachten zich voortplanten met een eindige snelheid, de lichtsnelheid. Dit besef kwam tegelijkertijd met het inzicht dat het elektromagnetisme, in de vorm van de Maxwell vergelijkingen, niet-triviale oplossingen heeft zelfs als er geen elektrische of magnetische<sup>1</sup> ladingen in de buurt zijn. De snelheid van het licht kan onder andere worden gemeten met een opstelling die het wiel van Fizeau wordt genoemd. De opstelling wordt geïllustreerd in Fig. 2.1. Een dunne lichtstraal wordt door de tanden van een tandwiel gestuurd. Als er een tand voor het licht is passeert het niet, anders wel. Op een afstand  $d$  staat een spiegel opgesteld die de lichtbundel precies recht terugkaatst. Als de lichtbundel terugkomt via de spiegel bij het tandwiel als het precies een half tandje is verplaatst wordt het licht op de terugweg niet doorgelaten. Als de schijf langzaam sneller gaat draaien komt er een moment dat er geen licht meer terugkomt door het tandwiel. De tijd die dan nodig is om een half tandje te draaien is dezelfde tijd die het licht nodig heeft om de afstand  $2d$  te reizen. Als de snelheid van de tandjes  $v$  is en de

---

<sup>1</sup>Magnetische ladingen, ook wel magnetische monopolen genoemd, dus alleen een noord- of zuidpool van een magneet, zonder de andere polariteit, zijn sowieso speculatief in de zin dat ze nog nooit zijn geobserveerd. Er is echter meer dan één theoretische reden [3, 4] waarom zulke magnetische monopolen toch zouden moeten bestaan.



Figuur 2.1: *Lichtsnelheidsmeting met het wiel van Fizeau. Een dunne lichtstraal wordt door de tanden van een tandwiel gestuurd. Als er een tand voor het licht is passeert het niet, anders wel. Op een afstand  $d$  staat een spiegel opgesteld die de lichtbundel precies recht terugkaatst. Als de lichtbundel terugkomt via de spiegel bij het tandwiel als het precies een half tandje is verplaatst wordt het licht op de terugweg niet doorgelaten. Tegenwoordig hebben we oscilloscopen met een tijdsresolutie van 100 ps. Delichtsnelheid is ongeveer 3 cm/(100 ps). Laten we het licht dus 1.5 m heen en weer lopen dan meten we delichtsnelheid al op 1% precies.*

afstand tussen de tandjes  $\ell$ , dan is delichtsnelheid aldus te meten als ongeveer:

$$c = \frac{2d}{(1/2)\ell} \cdot v \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (2.1)$$

Tegenwoordig hebben we oscilloscopen met een tijdsresolutie van beter dan 100 ps. Delichtsnelheid is ongeveer 3 cm/100 ps. Laten we een lichtpuls dus 1.5 m heen en weer lopen dan kunnen we met de oscilloscoop delichtsnelheid al op 1% precies meten. Nu we delichtsnelheid kunnen meten, kunnen we die ook onder verschillende omstandigheden meten, bijvoorbeeld in een rijdende trein of in een vliegtuig. A priori zouden we kunnen verwachten dat als we de lichtbron op een rijdende trein zetten die bijvoorbeeld van ons wegrijdt en delichtsnelheid nauwkeurig meten die kleiner is dan als de trein met de lichtbron stilstaat. Dat blijkt niet het geval te zijn! Delichtsnelheid blijkt onder alle omstandigheden in vacuüm (of in lucht, dat is bijna hetzelfde voor licht) precies hetzelfde te zijn. Of we er nu snel vanaf bewegen of snel naar toe gaan. Verder blijkt dat delichtsnelheid de hoogste snelheid is die we ooit hebben gemeten.

*Er is dus een maximum snelheid, delichtsnelheid  $c$ , en die is voor alle waarnemers, ongeacht hun eigen snelheid, hetzelfde.*

## Lengtecontractie en tijddilatatie

Dat er een maximumsnelheid is heeft nogal wat consequenties. De belangrijkste is wel dat we snelheden dus niet zomaar meer mogen optellen. Als we op een trein zitten die met drie-kwart van de lichtsnelheid beweegt ten opzichte van iemand op het perron<sup>2</sup> en vervolgens een tennisbal met een racket met drie-kwart van de lichtsnelheid naar voren serveren<sup>3</sup>, dan betekent dat niet dat de tennisbal met anderhalf keer de lichtsnelheid ten opzichte van de waarnemer op het perron beweegt. Kennelijk kunnen we dit soort snelheden niet lineair bij elkaar optellen. De optelregel voor snelheden blijkt te zijn:

$$v' = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (2.2)$$

Als de snelheden  $v_1$  en  $v_2$  in deze formule kleiner zijn dan  $c$ , dan zal de “som” van de snelheden  $v'$  ook kleiner zijn dan  $c$ .

De coördinatentransformatie van plaats en tijd voor een waarnemer  $S'$  met een constante snelheid  $V$  ten opzichte van een ander waarnemer  $S$  blijkt niet de klassieke Galileitransformatie te zijn:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t, \end{aligned} \quad (2.3)$$

maar geregeld te worden door de Lorentztransformatie:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

De Lorentzcontractie factor wordt gegeven door

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} \quad \text{met} \quad \beta = v/c \quad (2.5)$$

Dat deze Lorentzcontractie werkelijkheid is kunnen we demonstreren aan iemand die met grote vaart met een ladder van 6 m een garage in loopt van 5 m diep. Als de snelheid waarmee degene die met de ladder de garage in loopt  $v = 1.7 \times 10^8$  m/s is en de waarnemer stilstaat zodanig dat de laddersjouwer van

---

<sup>2</sup>Daar kan de NS nog een puntje aan zuigen.

<sup>3</sup>Daar kan Andy Roddick nog een puntje aan zuigen

hem wegloopt (en de waarnemer hem dus op de rug ziet terwijl hij de garage in loopt), dan bereikt het licht met de informatie dat de achterkant van de ladder de garagedeur passeert de waarnemer op hetzelfde moment dat het licht met de informatie dat de ladder de achterkant van de garage raakt. Dat laatste licht komt van verder en is dus langer onderweg. Of anders geformuleerd, aan de achterkant van de garage kijkt de waarnemer verder in het verleden. Juist doordat het begrip gelijktijdigheid voor de stilstaande waarnemer anders is dan voor de laddersjouwer, lijkt het voor de stilstaande waarnemer alsof de ladder in de garage past, terwijl voor diegene die met de ladder de garage inhoudt de catastrofe onmiddellijk duidelijk wordt.<sup>4</sup> Hoewel hier staat dat het voor de stilstaande waarnemer *lijkt* alsof de ladder in de garage past, is dit voor de waarnemer de realiteit. Deze stilstaande waarnemer kan niet anders weten. De ladder *is* voor deze waarnemer dus 5 m, terwijl die voor de laddersjouwer 6 m is.

Een voorbeeld van tijddilatatie is het verval van radioactieve deeltjes in beweging. Muonen zijn deeltjes die na  $2.2 \mu\text{s}$  vervallen in een elektron en twee neutrino's (we komen later terug op dit verval.) Worden ze echter versneld tot bijna de lichtsnelheid dan lijkt het voor de waarnemer waarvoor de muonen met bijna de lichtsnelheid gaan alsof ze veel trager vervallen. Dit kan in deeltjesversnellers worden geverifieerd en blijkt inderdaad zo te zijn. Het is zelfs door dit effect dat we denken dat het mogelijk is een opslagring te bouwen voor muonen waarin ze gemiddeld enkele milliseconden kunnen ronddraaien voordat ze vervallen, dus duizend keer langer dan hun levensduur in rust.

## Afleiding van de Lorentztransformatie

We beschouwen een inertiaalstelsel  $O'$  dat beweegt met een snelheid  $V$  ten opzichte van een inertiaalstelsel  $O$ . De assenstelsels van  $O$  en  $O'$  wijzen in dezelfde richting en het tijdstip  $t = 0$  in  $O$  valt samen met het tijdstip  $t' = 0$  in  $O'$  op het moment dat de oorsprong van  $O$  samenvalt met die van  $O'$ . De snelheid van  $O'$  ten opzichte van  $O$  ligt in richting precies langs de  $x$ -as, die overigens dezelfde richting heeft als de  $x'$ -as. We gaan kijken wat de relatie is tussen de coördinaten  $(x, y, z)$  en tijd  $t$  in  $O$  en de coördinaten  $(x', y', z')$  en tijd  $t'$  in  $O'$ . Uit de homogeniteit van ruimte en tijd concluderen we dat de transformatie tussen de ruimte en tijd in  $O$  en  $O'$  lineair zijn. Op het moment  $t = 0$  (en dus ook  $t' = 0$ ) sturen we een lichtpuls in de richting van de  $+x$ -as. In beide stelsel gaat de lichtpuls met dezelfde lichtsnelheid  $c$  en het lichtpuntje bevindt zich dus in  $O'$

---

<sup>4</sup>Een analoog en iets meer uitgewerkt voorbeeld staat in het Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde 70/4 van april 2004 onder de titel "De balk en de schuur"

in:

$$x' = c t'$$

en in  $O$  in:

$$x = c t$$

Voor een lineaire transformatie die aan beide vergelijkingen voldoet moet dus gelden:

$$(x' - c t') = A (x - c t)$$

Nu kunnen we de lichtpuls ook in de  $-x$  richting uitzenden en analoog moet dan gelden:

$$(x' + c t') = B (x + c t)$$

Beide vergelijkingen kunnen we nu bij elkaar optellen en aftrekken, zodat we krijgen:

$$x' = \frac{A+B}{2}x - \frac{A-B}{2}ct \quad (2.6)$$

$$ct' = -\frac{A-B}{2}x + \frac{A+B}{2}ct \quad (2.7)$$

We kunnen dit wat vereenvoudigen door de tot nog toe willekeurige constanten te herdefiniëren:

$$\gamma = \frac{A+B}{2} \quad (2.8)$$

$$\beta\gamma = \frac{A-B}{2} \quad (2.9)$$

Zodat bovenstaande vergelijkingen worden:

$$x' = \gamma x - \beta\gamma ct \quad (2.10)$$

$$ct' = -\beta\gamma x + \gamma ct \quad (2.11)$$

Kijken we nu naar de beweging van de oorsprong van  $O'$  in het stelsel van  $O$ , dan geldt voor alle  $t'$  dat  $x' = 0$  en dat  $\gamma x - \beta\gamma ct = 0$ , terwijl ook moet gelden dat  $x = Vt$ , zodat:

$$\beta = \frac{V}{c}$$

moet gelden. De enige echte onbekende is nu dus nog  $\gamma$ .

We kunnen nu ook zeggen dat het stelsel  $O$  ten opzichte van  $O'$  beweegt met een constante snelheid  $-V$ . Op analoge wijze kunnen we dan afleiden dat:

$$x = \gamma x' + \beta\gamma ct' \quad (2.12)$$

$$ct = +\beta\gamma x' + \gamma ct' \quad (2.13)$$

Het teken van  $\beta$  wisselt dus, omdat  $V$  van teken wisselt. De factor  $\gamma$  moet in beide gevallen hetzelfde zijn omdat een lengte  $L$  in  $O$  zoals gezien vanuit  $O'$ ,  $L' = \gamma L$ , hetzelfde moet zijn als een lengte  $L$  in  $O'$  zoals gezien vanuit  $O$ . Passen we nu op tijd  $t = 0$  eerste de transformatie van  $O$  naar  $O'$  toe:

$$x' = \gamma x \quad (2.14)$$

$$ct' = -\beta\gamma x \quad (2.15)$$

en vervolgens weer de transformatie van  $O'$  naar  $O$ , dan krijgen we voor de  $x$  coördinaat:

$$x = \gamma x' + \beta\gamma ct' = \gamma^2 x - \beta^2\gamma^2 x = \gamma(1 - \beta^2) x$$

Dat loopt natuurlijk alleen maar goed af als:

$$\gamma^2(1 - \beta^2) = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}}$$

In dit hele voorgaande zijn de  $y$  en  $z$  coördinaten ongemoeid gelaten. De hele transformatie die nodig is om vanuit een inertiaalstelsel te komen naar een inertiaalstelsel dat met een constante snelheid  $V$  in de  $x$ -richting beweegt ten opzichte van het oorspronkelijk stelsel is:

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad (2.16)$$

$$y' = y, \quad (2.17)$$

$$z' = z, \quad (2.18)$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x), \quad (2.19)$$

waarbij:

$$\beta = \frac{V}{c} \quad (2.20)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 - (V/c)^2}}. \quad (2.21)$$

Deze transformatie heet de Lorentztransformatie. De Lorentztransformatie komt in plaats van de Galileitransformatie in de klassieke mechanica.

## De relatie tussen energie, impuls en massa

In klassieke mechanica is impuls de massa maal de snelheid:

$$p = mv = m \frac{dx}{dt} \quad (2.22)$$

We hebben echter gezien dat we voorzichtig moeten zijn met het begrip snelheid  $v = dx/dt$ . In het relativistische geval kunnen we beter de afgeleide van de plaats nemen naar de eigentijd van het deeltje, de tijd die behoort bij een waarnemer waarvoor het deeltje stil staat. Dit is in ieder geval een coördinatenstelsel dat we zonder ambiguïteit kunnen definiëren. Voor de waarnemer waarvoor het deeltje een snelheid  $v$  heeft geldt dan:

$$p = m \frac{dx'}{dt} = m \frac{d(\gamma(x + vt))}{dt} = \gamma mv, \quad (2.23)$$

en inderdaad blijkt dit heel goed bruikbaar als relativistische impuls. Ook interessant is het om te kijken hoe de tijd van de waarnemer waarvoor het deeltje snelheid  $v$  heeft zich verhoudt tot de eigentijd van het deeltje. Om de symmetrie tussen tijd en ruimte optimaal te benutten vermenigvuldigen we de tijd met een factor  $c$ , waardoor  $ct$  dezelfde eenheid (m) krijgt als de plaatscoördinaten. Om iets equivalentes te krijgen aan de snelheid nemen we nog steeds de afgeleide naar de eigentijd  $t$ :

$$p^0 = m \frac{dct'}{dt} = mc \frac{d\left(\gamma\left(t + \frac{v}{c^2}x\right)\right)}{dt} = \gamma mc. \quad (2.24)$$

In bovenstaande uitdrukking heeft  $p^0$  de eenheden van een impuls (kg m/s). Definieren we nu de relativistische energie als  $E = p^0 c$  dan krijgen we hiervoor de goede eenheden en:

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}. \quad (2.25)$$

We kunnen deze uitdrukking ontwikkelen door middel van een Taylorreeks in de variabele  $v/c$  en krijgen dan voor de eerste paar termen:

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right). \quad (2.26)$$

De eerste term correspondeert met de rustenergie van een deeltje, de welbekende  $E = mc^2$ . De tweede term correspondeert precies met de klassieke kinetische energie van een deeltje met snelheid  $v$ . De derde term geeft aan dat er nog (relativistische) correcties volgen, van de orde van  $v^2/c^2$ , die heel klein zijn als  $v$  klein is ten opzichte van  $c^2$ . Als  $v$  in de buurt komt van  $c$  zijn deze termen wel belangrijk en moet de uitdrukking genomen worden zoals in formule 2.25.

Voor de energie en impuls van een vrij deeltje geldt nu altijd voor alle waarnemers de relatie:

$$E^2 = (\vec{p} \cdot \vec{p}) c^2 + m^2 c^4, \quad (2.27)$$

waarbij de impuls hier is gegeneraliseerd tot de vectorimpuls. Uit deze relatie zien we onmiddellijk twee gewichtige zaken betreffende de massa:

**Massa en energie zijn aan elkaar gerelateerd:** Massa en energie zijn niet aan elkaar gelijk, maar blijken wel eenduidig aan elkaar gerelateerd. Het is met name mogelijk om energie in massa om te zetten en omgekeerd. In de klassieke mechanica geldt de wet van behoud van massa. In de relativiteitstheorie geldt dat niet meer. Het gevolg van het feit dat massa niet meer behouden is, is dat het aantal deeltjes ook niet meer behouden hoeft te zijn. uit energie kunnen deeltjes worden gemaakt en deeltjes kunnen verdwijnen als ze omgezet worden in energie. Het blijkt wel dat deeltjes niet zomaar kunnen ontstaan of verdwijnen, maar alleen in paren van deeltje en anti-deeltje. We komen daar later op terug.

**Deeltjes met massa  $m = 0$  kunnen impuls en energie hebben:** In de klassieke mechanica hebben deeltjes met massa  $m = 0$  altijd impuls en energie gelijk aan nul. Equivalent kunnen we zeggen dat in de klassieke mechanica deeltjes met massa nul niet kunnen bestaan. In de relativiteitstheorie kunnen deeltjes met massa nul wel bestaan en een impuls en energie hebben die van nul verschilt. In dat geval moeten de energie en impuls wel een vaste verhouding tot elkaar hebben:  $E = |\vec{p}|c$ . Een voorbeeld van een deeltje dat geen massa bezit is het foton, het lichtdeeltje. Het foton als deeltje is niet te beschrijven met klassiek mechanica, maar wel in de relativiteitstheorie.



# Hoofdstuk 3

## De algemene relativiteitstheorie

### Viervectoren: een elegante notatie

In het voorgaande hebben we gezien dat in Lorentztransformaties plaats en tijd met elkaar mengen. We kunnen als het ware tijd en plaats in elkaar omzetten. Tijd en plaats nemen dan ook een gelijkwaardige positie in in de relativiteitstheorie. Om dat wat explicieter te maken en ook omdat hierdoor een hoop notaties korter worden kunnen we in plaats van de tijd en de drie-dimensionale plaats apart te nemen ze combineren in een zogenaamde viervector:

$$a_\mu = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

waarbij de index  $\mu$  van 0 tot en met 3 loopt. Merk op dat de index hier rechts *onder* staat. Een dergelijke viervector heet een covariant. Als de index *boven* staat betreft het een contravariant. Co- en contravarianten worden in elkaar overgevoerd door de metriek,  $g^{\mu\nu}$ :

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu, \quad a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu, \quad (3.2)$$

waarbij de relativistische metriek wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} g^{00} &= g_{00} = 1, \\ g^{11} &= g^{22} = g^{33} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \\ g^{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} = 0 \text{ als } \mu \neq \nu. \end{aligned} \quad (3.3)$$

We kunnen ons  $g^{\mu\nu}$  voorstellen als matrix waarvan alleen de diagonale elementen waarden aannemen:<sup>1</sup>

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

In formule 3.2 hebben we de Einstein sommatie conventie gebruikt die zegt dat over indices die eenmaal onder en eenmaal boven voorkomen wordt gesommeerd van 0 tot en met 3. Het inproduct van twee viervectoren is een Lorentzinvariante grootheid (voor alle waarnemers hetzelfde) en wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} a_\mu a^\mu &= a_0 a^0 + a_1 a^1 + a_2 a^2 + a_3 a^3 \\ &= a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

waarbij de superscripts buiten de haakjes,  $( )^2$ , kwadrateren betekent.

Behalve de plaats kunnen we ook de energie en impuls samen als viervector schrijven:

$$p_\mu = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Dit heet dan de vierimpuls. De vierimpuls transformeert precies eender als viervectoren van de plaats onder Lorentztransformaties.

Lorentztransformaties, zoals die in formule 2.4, worden in viervector- of tensornotatie<sup>2</sup> geschreven als:

$$x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

waarbij in het tweede deel van de vergelijking het voorbeeld is genomen van een Lorentztransformatie die correspondeert met een snelheid  $v = \beta c$  in de  $z$ -richting.

<sup>1</sup>Hoewel deze voorstelling niet strikt correct is komen we er in deze tekst mee weg.

<sup>2</sup>Een tensor is een object met bepaalde transformatie eigenschappen, zoals de Lorentztransformatie voor coördinatenstelsels die relatief ten opzichte van elkaar bewegen met constante snelheid.

## Trage en zware massa

In de klassieke mechanica wordt trage massa gedefinieerd door de volgende formulering van de tweede wet van Newton:

$$F = ma.$$

Dit is de massa die weerstand biedt, in termen van versnelling, aan een kracht. We hebben al gezien dat in de speciale relativiteitstheorie de rol van trage massa verandert en dat de manier waarop weerstand wordt geboden aan versnelling de volgende vorm aanneemt:

$$F = \frac{dp}{dt} = m\gamma a + mv \frac{d\gamma}{dt}.$$

Zware massa is gedefinieerd in termen van de zwaartekrachtswet van Newton:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Al in de klassieke mechanica wordt aangenomen dat trage massa en zware massa hetzelfde zijn. Dit leidt in de klassieke mechanica onder andere tot de zwaartekrachtswet hier op de aardkorst:

$$F = mg,$$

met:

$$g = \frac{GM_{\text{aarde}}}{R_{\text{aarde}}^2}.$$

## Het equivalentieprincipe

Het relativiteitsprincipe, het eerste postulaat van Einstein, impliceert de geldigheid van de natuurwetten voor alle inertiële waarnemers. Het ware natuurlijk makkelijk geweest als de natuurwetten gewoon geldig zijn voor alle waarnemers, inertiael of niet. In de algemene relativiteitstheorie heeft Einstein een raamwerk geformuleerd waarin inderdaad de natuurwetten gelden voor alle waarnemers, dus met name ook voor waarnemers in een versneld referentiestelsel.

In de algemene relativiteitstheorie verheft Einstein de gelijkheid van trage en zware massa tot een extra postulaat. Een andere formulering van de gelijkheid van trage en zware massa is de equivalentie van het effect van zwaartekracht op een puntmassa en van een versneld coördinatenstelsel op de puntmassa.

Het equivalentieprincipe zegt dat een waarnemer uit de kracht die op hem werkt niet uit kan maken of dat ten gevolge van zwaartekracht is of van een versnelling.

Als we kijken wat dat voor gevolg heeft voor een lichtstraal dan zien we dat het pad voor licht ten opzichte van een versneld referentiestelsel niet langer door een rechte lijn wordt gegeven, maar door een kromme baan. Maar wegens het equivalentieprincipe zal een lichtstraal dan dus ook in een zwaartekrachtsveld krom lopen.

## Geodeten: iets dat krom is recht praten

Een andere manier om tegen de gekromde baan van een lichtstraal in een zwaartekrachtsveld aan te kijken is te claimen dat de lichtstraal recht loopt ten opzichte van de ruimte, maar dat de ruimte krom is. Bij deze manier van beschouwen wordt de ruimte kennelijk vervormd van vlak naar gekromd door de zwaartekracht. Het ligt dan voor de hand aan te nemen dat een grote massa, dat wil zeggen grote zwaartekracht, de ruimte krommer maakt dan een kleine massa.

Gelukkig kunnen we in een gekromde ruimte altijd plaatselijk de ruimte vlak veronderstellen. Bijvoorbeeld op het gekromde aardoppervlak zien we onze onmiddellijke omgeving als een platte aarde. (Dit heeft in het verleden wel aanleiding gegeven over verwarring betreffende de vorm van de aarde.)

Banen van deeltjes die ten opzichte van de ruimte recht zijn heten geodeten. De eerste wet van Newton kan nu wat algemener worden geïnterpreteerd: Een lichaam waarop geen externe kracht werkt volgt een geodeet door de ruimte. Dat een lichaam een geodeet volgt, is hetzelfde als een rechte baan ten opzichte van de ruimte doorlopen. In het geval de ruimte vlak is krijgen we de klassieke mechanica terug van Newton.

## Snelheid en versnelling in een gekromde ruimte

De snelheid is gedefinieerd als de afgeleide van de plaats naar de tijd. We hebben al gezien dat het voordelig is de afgeleide te nemen naar de eigentijd. Op die manier hebben we bijvoorbeeld de energie en impuls gedefinieerd en nemen de energie en impuls de transformatie eigenschappen van tijd en ruimte over.

Als we echter op een gekromd oppervlak werken dan verandert bijvoorbeeld de snelheid niet alleen door de intrinsieke snelheidsverandering van het deeltje in kwestie, maar ook doordat de ruimte verandert bij verplaatsing daarover. In dit geval moet ruimte zelfs ruim worden opgevat, de tijd is ook deel van de ruimte.

Als voorbeeld om dit te verduidelijken nemen we weer het aardoppervlak. Twee objecten die beiden vanaf de evenaar parallel en even snel naar het noorden bewegen kunnen starten met een zeker afstand tot elkaar. Zij zullen elkaar echter op de Noordpool tegenkomen en in het traject vanaf de evenaar naar de noordpool

hun tussenafstand zien afnemen. Hoewel ze dus geen krachten in het spel zijn, zorgt de kromming van de ruimte voor een relatieve snelheidsverandering.

Een ander voorbeeld van hoe de ruimte je letterlijk in de knoop kan leggen is de oriëntatie van je hand als die over een boloppervlak beweegt dat wordt gegeven door je schoudergewricht als middelpunt en je armlengte als straal. Begin met je hand plat tegen je bovenbeen. Beweeg nu je arm van onder naar recht voor je terwijl je je hand parallel houdt. Beweeg nu je arm negentig graden opzij en houdt de oriëntatie van je hand ten opzichte van je arm constant. Beweeg nu je arm weer naar beneden tot langs je been, weer de oriëntatie van de hand ten opzichte van de arm constant houdend. Je arm is nu in de uitgangspositie, maar je hand is negentig graden verdraaid.

We hebben al gezien dat het nemen van de afgeleide naar de tijd een wat problematische procedure is. We hebben daarom in de speciale relativiteitstheorie de afgeleide naar de tijd voor de waarnemer vervangen door de afgeleide naar de eigentijd van het deeltje. Een andere manier om onder dit probleem uit te komen is om de afgeleide te nemen naar alle tijd- en ruimtecoördinaten op een symmetrische manier.

Om nu de versnelling te beschrijven in een gekromde ruimte bestaat de afgeleide uit twee delen, een deel met de intrinsieke verandering van de snelheid die wordt beschouwt plus een term die aangeeft hoe de ruimte over de kleine verplaatsing van de differentiaal verandert. De afgeleide met de twee termen heet de covariante afgeleide:

$$\frac{DA^\mu}{Dx^\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu A^\alpha.$$

Het symbool  $\Gamma_{\nu\alpha}^\mu$  blijkt te worden gegeven door:

$$\Gamma_{\nu\alpha}^\mu = \frac{g^{\mu\beta}}{2} \left( \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} \right),$$

waarin  $g^{\mu\nu}$  de metriek is.<sup>3</sup> Omdat het resultaat van de covariante afgeleide een tensor is en de partiële afgeleide naar de plaats geen tensor is, is  $\Gamma_{\nu\alpha}^\mu$  ook geen tensor. Alleen de combinatie van de twee termen is weer netjes een tensor. Het symbool  $\Gamma_{\nu\alpha}^\mu$  heet ook wel het Christoffel symbool van de tweede soort en de volgende notatie wordt ook wel aangetroffen:

$$\Gamma_{\nu\alpha}^\mu = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\alpha \end{matrix} \right\}.$$

---

<sup>3</sup>Dit volgt uit het feit dat  $g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu$  altijd een invariant is, en dat dus voor de parallele verplaatsing daarvan geldt:  $0 = \delta(g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu) = (\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\alpha)A^\mu A^\nu dx^\alpha + g_{\mu\nu}A^\mu \delta A^\nu + g_{\mu\nu}A^\nu \delta A^\mu = ((\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\alpha) - g_{\mu\beta}\Gamma_{\alpha\nu}^\beta - g_{\beta\nu}\Gamma_{\alpha\mu}^\beta) A^\mu A^\nu dx^\alpha$ . Door in deze vergelijking de drie indices  $\mu$ ,  $\nu$  en  $\alpha$  cyclisch te verwisselen en te gebruiken dat  $\Gamma_{\nu\alpha}^\beta$  symmetrisch is onder het verwisselen van  $\nu$  en  $\alpha$  en de drie uitdrukkingen met cyclisch verwisselde indices bij elkaar op te tellen volgt de uitdrukking van  $\Gamma_{\nu\alpha}^\beta$  in termen van de metriek  $g_{\mu\nu}$ .

We zien dat als de metriek niet afhangt van de plaats en de tijd de covariante afgeleide overgaat in de normale (partiële) afgeleide.

Uiteindelijk willen we wat kunnen zeggen over de versnelling. De versnelling is de afgeleide van de snelheid. Om de gewenste Lorentz invariantie te bereiken nemen we voor de snelheid van een deeltje:

$$\frac{dx^\mu}{ds} = A^\mu,$$

die we dus gelijkstellen aan de Lorentz-vector  $A^\mu$ , die er eerder als algemeen beschouwden. We hebben hier de differentiaal van de wortel van de invariante lengte voor de eigen tijd-ruimte vector genomen om naar te differentiëren. Deze is op een factor  $c$  na de eigen tijd van een deeltje,  $ds = c d\tau$ , waarbij  $\tau$  de tijd is van de klok in rust ten opzichte van het deeltje dat wordt beschouwd.

Nemen we als voorbeeld een situatie waarin geen externe krachten werken, dan volgt zo'n deeltje met snelheid  $A^\mu$  een geodeet, een *recht* pad:

$$\frac{DA^\mu}{Dx^\nu} = \frac{D(dx^\mu/ds)}{Dx^\nu} = 0.$$

De intrinsieke verandering van de snelheid is nu puur en alleen het gevolg van de structuur van de ruimte:

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} = -\Gamma_{\nu\alpha}^\mu A^\alpha.$$

Vermenigvuldigen we nu met de differentiaal  $\partial x^\nu$  en vatten we alles als differentiaal op, zonder onderscheid te maken tussen gewone en partiële differentiaal (dus  $\partial x^\nu = dx^\nu$  en  $\partial A^\mu = dA^\mu$ , en delen we door de differentiaal  $ds$ , dan krijgen we:

$$\frac{dA^\mu}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{dx^\mu}{ds} \right) = \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = -\Gamma_{\nu\alpha}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}$$

Voor een vlakke ruimte, dat wil zeggen met een constante metriek in ruimte en tijd, volgt:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0$$

de eerste wet van Newton dus: geen versnelling op een deeltje waarop geen kracht werkt.

In de post-Newtoniaanse limiet nemen we de ruimtelijke snelheden  $dx_i/ds$ ,  $i = 1, 2, 3$  klein, zodat we  $dx_i/ds$ ,  $i = 1, 2, 3$  verwaarlozen ten opzichte van  $dx_0/ds$ , en waardoor  $dx_0/ds = 1$  wordt. We houden dan één term over in de indices  $\alpha$  en  $\nu$ , namelijk voor  $\alpha = \nu = 0$ :

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = -\Gamma_{00}^\mu \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} = -\Gamma_{00}^\mu$$

Verder nemen we als onderdeel van de post-Newtoniaanse limiet aan dat de we een alleen kleine afwijking van de vlakke metriek hebben die tijd en ruimte afhankelijk kunnen zijn. Dit tijd en ruimte afhankelijk deel van de metriek geven we aan met  $\gamma_{\mu\nu}$ .<sup>4</sup>

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \gamma_{\mu\nu},$$

waarbij de elementen van  $\gamma_{\mu\nu}$  klein zijn ten opzichte van 1. We kunnen dan  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$  benaderen door voor de metriek waarmee als constante wordt vermenigvuldigd de vlakke (niet tijd-tuimte afhankelijke) metriek te gebruiken en in de afgeleiden speelt natuurlijk alleen  $\gamma_{\mu\nu}$  een rol. We contraheren meteen met de constante metriek, waardoor de  $\gamma$ 's soms ook een bovenindex krijgen en de laatste afgeleide naar een co-variant is in plaats van een contra-variant:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_{\alpha}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \gamma_{\beta}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} \right)$$

Invullen voor  $\Gamma_{00}^{\mu}$  geeft:

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \gamma_0^{\mu}}{\partial x^0} + \frac{\partial \gamma_0^{\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x_{\mu}} \right)$$

Voor het gemak maken we de substitutie:

$$U = -m c \gamma_{00}/2.$$

Vervolgens beschouwen we de  $\mu = 0$  component van de vergelijking:

$$\frac{d^2 x^0}{ds^2} = \frac{dE/mc}{ds} = -\frac{1}{mc} \left( \frac{\partial U}{\partial x^0} + \frac{\partial U}{\partial x^0} - \frac{\partial U}{\partial x_0} \right) = -\frac{1}{mc} \left( \frac{\partial U}{\partial x^0} \right) \Leftrightarrow \frac{dE}{d\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \tau},$$

waarbij we weer de lage snelheidslimiet hebben gebruikt waarin  $ds = dx^0 = dx_0 = c d\tau$ .

Voor de ruimtelijke componenten  $\mu = 1, 2, 3$  nemen we aan (weer als deel van de post-Newtoniaanse limiet) dat de veranderingen van  $\gamma_{0i}$  als functie van de eigentijd  $x^0$  langzaam gaan ten opzichte van de verandering bij verplaatsing in de ruimte van  $\gamma_{00}$ , dus  $|\partial \gamma_{0i}/\partial x^0| \ll |\partial \gamma_{00}/\partial x^i|$ , voor  $i = 1, 2, 3$ , zodat geldt (voor

---

<sup>4</sup>De matrixvoorstelling is natuurlijk weer wat onnauwkeurig, maar je snapt wel wat er wordt bedoeld...

$i = 1, 2, 3$ , waarbij we overstappen op ruimte-vector notatie  $\vec{x} = x^i, i = 1, 2, 3$  en let op  $i$  is hier contravariante index):

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{d\vec{p}/m}{ds} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial\gamma_0^i}{\partial x^0} + \frac{\partial\gamma_0^i}{\partial x^0} - \frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x_i} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^i} \right) = -\frac{1}{mc} \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} \Leftrightarrow \frac{d\vec{p}}{d\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}}.$$

Als we nu  $U$  identificeren met de potentiaal van het zwaartekrachtsveld dan krijgen dat de toename in de tijd van de kinetische energie  $E$  precies de afname van de potentiële energie  $U$ :

$$\frac{dE}{d\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \tau},$$

en dat de kracht, de verandering van de impuls in de tijd, precies het gevolg is van de gradiënt in de ruimte van de potentiaal:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}}.$$

Zonder verder bewijs wordt vermeld dat de gravitatiepotentiaal wordt berekend uit de massadichtheidverdeling  $\sigma$  als:<sup>5</sup>

$$\gamma_{00} = \frac{\kappa}{4\pi} \int_V \frac{\sigma d\vec{x}}{r},$$

waarbij  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  de afstand is van het volume-elementje  $d\vec{x}$  tot de waarnemer, er wordt geïntegreerd over het ruimtelijk volume  $V$  en  $\kappa = 1.86 \times 10^{-27}$  m/kg de constante is die de sterkte van de zwaartekracht karakteriseert.

De manier om ruimte en tijd expliciet te koppelen in één vergelijking is door Einstein ontwikkeld. Uitgaande van het eerder genoemde Christoffel symbool kunnen we ons afvragen wanneer de ruimte nu echt is gekromd (en dus niet “vlak” is.) Het is duidelijk uit de expliciete vorm van het Christoffel symbool dat als de ruimte vlak is, en de metriek  $g_{\mu\nu}$  dus niet van tijd en plaats afhangt, alle elementen van het Christoffel symbool nul zijn. Andersom geldt dat echter niet. Dat kunnen we met een voorbeeld illustreren, In een twee dimensionale ruimte kunnen we een zogenaamd Carthesisch coördinaten stelsel nemen, met een  $x$ - en  $y$ -as die loodrecht op elkaar staan en dezelfde lengtemaat hebben. In dat stelsel is de metriek  $g_{\mu\nu} = 1$  als  $\mu = \nu$  en  $g_{\mu\nu} = 0$  als  $\mu \neq \nu$ , zoals we dat van de stelling van Pythagoras gewend zijn. Hetzelfde vlak, dus dezelfde ruimte, kunnen we ook beschrijven met zogenaamde poolcoördinaten  $(r, \phi)$ , waarbij  $r$  de afstand van een punt tot de oorsprong aangeeft en  $\phi$  de hoek die de lijn van oorsprong tot het punt met de positieve  $x$ -as maakt. In het geval van poolcoördinaten is de metriek  $g_{11} = 1, g_{22} = r$  en  $g_{\mu\nu} = 0$  als  $\mu \neq \nu$ . In dat geval hangt de metriek dus van

<sup>5</sup>Zie het derdejaars college over algemene relativiteitstheorie.



de plaats af. Het Christoffel symbool heeft dan ook componenten die niet nul zijn. Echter we hebben nog steeds dezelfde vlakke ruimte als met de Carthesische coördinaten. Het niet nul zijn van sommige Christoffel symbolen kan dus ook zijn te wijten aan de keuze van het coördinatenstelsel.

Een manier om wel een goed “ja” of “nee” antwoord te krijgen op de vraag of de ruimte vlak is gaat met behulp van de Riemann-Christoffel tensor. Als we van het ene naar het andere punt in de ruimte gaan kunnen we altijd een pad volgen waarbij we eerst de ene coördinaat constant houden en dan een andere. We kunnen dan ook proberen het constant houden van de coördinaten om te draaien. We volgen nu wat er gebeurt met een vectorveld  $A^\mu$  als we op de twee verschillende manieren lopen. In differentiaal (in dit geval covariante afgeleiden) is dat te schrijven als:

$$\frac{D}{Dx^\alpha} \frac{D}{Dx^\beta} A^\mu$$

voor het ene pad en in de andere volgorde:

$$\frac{D}{Dx^\beta} \frac{D}{Dx^\alpha} A^\mu$$

In het algemeen kunnen deze twee opeenvolgende verplaatsingen een verschillende uitkomst geven die we parametriseren met de Riemann-Christoffel tensor  $R^{\mu\alpha\beta\lambda}$  als:

$$\frac{D}{Dx^\alpha} \frac{D}{Dx^\beta} A^\mu - \frac{D}{Dx^\beta} \frac{D}{Dx^\alpha} A^\mu = R^{\mu}_{\alpha\beta\lambda} A^\lambda.$$

De Riemann-Christoffel tensor heeft in de ruimte-tijd 256 verschillende componenten. Als al deze componenten nul zijn dan is de ruimte vlak. Als een of meer van deze componenten niet nul is, dan is de ruimte gekromd.

Uit de Riemann-Christoffel tensor is de Ricci tensor,  $R_{\mu\lambda}$  af te leiden als:

$$R_{\mu\lambda} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\lambda}.$$

In dit geval is de ruimte niet vlak als  $R_{\mu\lambda} \neq 0$ , maar kun je niets over de vlakheid van de ruimte zeggen als  $R_{\mu\lambda} = 0$ . Een verdere afgeleide grootheid is de Gauss kromming,  $R$ :

$$R = g^{\mu\lambda} R_{\mu\lambda},$$

die voor de driedimensionale bol  $R = 1/r^2$  blijkt te zijn met  $r$  de straal van de bol. Ook hier geldt weer dat als  $R \neq 0$  de ruimte gekromd is en als  $R = 0$  we daarover niets kunnen zeggen.

Einstein construeerde nu uit al deze tensoren de Einstein tensor,  $G_{\mu\nu}$  als:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}.$$

Dit is een symmetrische tensor met twee indices ( $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$ ) met als eigenschap dat:

$$\frac{D}{Dx^\mu} G^{\mu\nu} = 0,$$

ongeacht de metriek, dwz. alleen afhankelijk van de vorm van de ruimte.

Vervolgens stelde Einstein de vergelijking:

$$G_{\mu\nu} = \frac{4\pi G_N}{c^2} T_{\mu\nu}$$

op waarbij  $G_{\mu\nu}$  de eigenschappen van de ruimte beschrijft en  $T_{\mu\nu}$  de verdeling van materie in de ruimte. Bijvoorbeeld voor losse deeltjes geldt:

$$T_{\mu\nu} = \rho v_\mu v_\nu,$$

met  $\rho$  de massa dichtheid (in  $\text{kg}/\text{m}^3$ ) en  $v_\mu$  de vier-snelheden van de deeltjes ( $1, v_x, v_y, v_z$ ). De constante  $G_N$  is de gravitatieconstante van Newton die we al eerder in de klassieke mechanica zijn tegengekomen.

Uit de Einstein vergelijking volgt automatisch wegens vergelijking 3 dat:

$$\frac{D}{Dx^\mu} T^{\mu\nu} = 0,$$

Materie beweegt dus langs geodeten, waarbij een geodeet de kortste afstand is tussen twee deeltjes.

Om een voorbeeld van een geodeet te visualiseren kan aan een racebaan worden gedacht, waarbij de bochten zo schuin zijn gelegd dat bij een bepaalde snelheid de auto niet gestuurd hoeft te worden, maar rechtdoor rijdend de bocht om gaat.

## Gevolgen van de algemene relativiteitstheorie

Het eerste gevolg van de algemene relativiteitstheorie is dat de invariante lengte

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

nog steeds invariant is en dat in het bijzonder de lichtsnelheid dus nog steeds hetzelfde is voor alle waarnemers, zelfs voor waarnemers in niet-inertiaalstelsels.

Het tweede gevolg is dat als gevolg van het feit dat

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

en de metriek  $g_{\mu\nu}$  nu van de tijd en plaats kan afhangen de lengte van tijdintervallen en de lengte van objecten anders is voor inertiale waarnemers en versnelde

waarnemers of waarnemers in een gravitatieveld. In het bijzonder hangt lengte en tijdsverschil voor een niet-inertiële waarnemer af van de tijd en plaats zelf. Klokken lopen trager op zeeniveau dan op de Mount Everest. De standaardmeter is in Parijs korter dan op de Mont-Blanc (voor een waarnemer in Parijs). Merk op dat de lokale waarnemer hier niets van merkt, die neemt zijn of haar klok en standaard meter mee en de tijd en afstand verandert niet.

Een meer gecompliceerd voorbeeld is een lege ruimte, waarbij wordt aangenomen dat de ruimte zelf een bolvormige symmetrie heeft en dus in bolcoördinaten  $(r, \theta, \phi)$  uitgedrukt alleen van de afstand  $r$  van een punt tot de oorsprong afhangt en niet van de hoeken  $\theta$  en  $\phi$ . De Einstein-vergelijkingen zijn in dat geval exact op te lossen met als oplossing voor de metriek:

$$(ds)^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) (cdt)^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{R_s}{r}}\right) (dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2.$$

Deze oplossing voor de metriek is door Schwarzschild uitgerekend en  $R_s$  wordt de Schwarzschildstraal genoemd. De twee laatste termen in de metriek die met de hoeken corresponderen hebben wat vreemde coëfficiënten vanwege de keuze van coördinaten. De eerste twee termen hebben een coëfficiënt die het gevolg is van de vorm van de ruimte. Als de afstand tot de oorsprong  $r$  groot is ten opzichte van  $R_s$  dan blijkt deze metriek te corresponderen met de Newtonse gravitatie waarbij:

$$R_s = \frac{2G_N}{c^2} M,$$

voor een massa  $M$  in de oorsprong.

Als de Schwarzschildstraal gepasseerd wordt dan verandert het teken van zowel de  $\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)$  coëfficiënt van  $(cdt)^2$  als de  $\left(\frac{1}{1 - \frac{R_s}{r}}\right)$  coëfficiënt van  $(dr)^2$ . Dat wil zeggen dat de rol van ruimte en tijd omdraaien. De Schwarzschildstraal correspondeert met de straal van een zwart gat als alle massa die nodig is om een bepaalde Schwarzschildstraal te creëren binnen die straal ligt. Een consequentie is dat alles wat van buiten komt en binnen de Schwarzschildstraal gaat er nooit meer uit komt. Dat geldt met name ook voor lichtdeeltjes (c.q. lichtgolven.)

Een consequentie van de algemene relativiteitstheorie die als eerste experimenteel is geverifieerd is de afbuiging van licht door een zwaar lichaam, zoals de zon. Door de positie van sterren vast te leggen in de nacht en vervolgens de positie van dezelfde sterren te bekijken door langs de zon te kijken die door de maan is verduisterd kon Eddington in 1917 vaststellen dat het licht rond de zon twee keer zo sterk wordt afgebogen als op grond van de wetten van Newton het geval is. De gravitatiewetten van Einstein voorspellen precies deze twee keer zo sterke afbuiging.

Een andere verifieerbare consequentie is de perihelium beweging van planeten. Voor Mercurius is deze afwijking van de perfecte ellipsbaan reeds lang gemeten als  $0.16^\circ$  per eeuw. Als de effecten van de andere planeten hiervan wordt afgetrokken blijft nog  $0.01194^\circ$  per eeuw over. Een klein maar zeer significant effect dat eeuwenlang een doorn in de ogen van de planeetobservators is geweest. Dit effect wordt veroorzaakt doordat de zwaartekracht volgens de Schwarzschild oplossing niet als  $F \approx \frac{1}{r^2}$  gaat zoals bij de Newtoniaanse zwaartekracht, maar verder een term heeft die gaat als  $F \approx \frac{R_s}{r^3}$ . Deze extra term blijkt precies het goede antwoord te geven voor de gemeten perihelium beweging van Mercurius.

**In conclusie:**

Massa verandert de structuur van de ruimte en tijd. De zwaartekracht kan worden opgevat als dat wat verantwoordelijk is voor de verandering van de snelheid (versnelling) als een testmassa door de gekromde ruimte beweegt. Een gevolg is dat ook massalozes deeltjes zoals het lichtdeeltje (foton) door zwaartekracht worden beïnvloed.

# Hoofdstuk 4

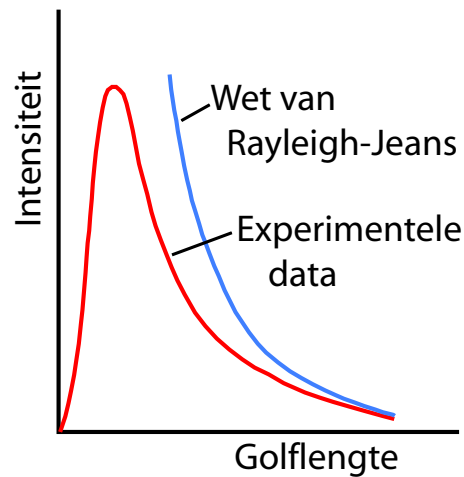
## Quantummechanica

### Deeltjes en golven

Al vanaf vroege leeftijd zijn we gewend om tegen “dingen” aan te kijken als vaste objecten met een bepaalde vorm en afmeting. Als het woord deeltje wordt gebruikt denken verreweg de meeste mensen aan een klein bolvormig object. We stellen ons zo’n bolletje voor als bewegend, of desnoods stilhangend, in de ruimte. Dit model wordt onder natuurkundigen ook wel het *biljartballenmodel* genoemd. Interacties tussen deeltjes worden in dit model voorgesteld als botsingen tussen harde (biljart)ballen. Ruim een eeuw geleden, in 1897, ontdekte Thomson het elektron [5]. Hij deed dat door elektronen uit een metalen draad te verdampen en te versnellen. Door slim te spelen met de afbuiging van elektronen in een elektrisch en magnetisch veld kon Thomson ook de lading en de massa van het elektron bepalen, een feit dat sterk maakt dat het hier om een deeltje gaat met welbepaalde eigenschappen. Sindsdien denkt de mensheid aan elektronen als hele kleine bolletjes met die eigenschappen, hoewel we de afmeting van het bolletje niet kunnen vaststellen en op zijn best kunnen zeggen dat die kleiner is dan  $10^{-18}$  m.

Denken we aan licht, dan denken we aan de zon of een lamp die lichtgolven uitzenden van een bepaalde kleur. Deze lichtgolven kunnen we afbuigen met bijvoorbeeld glazen lenzen, een zegen voor de ver- en bijzienden onder ons. Het golfkarakter van licht komt buitengewoon goed tot zijn recht als we een kleine lichtbron gebruiken en die op een nauwe spleet laten vallen. Achter de spleet ontstaat een patroon van lichtintensiteiten die we af kunnen beelden op bijvoorbeeld een scherm. Bij bestudering van die patronen kunnen we een goede kwantitatieve beschrijving maken van wat we zien als we aannemen dat licht een golf is, en dat de kleur van het licht correspondeert met een bepaalde golflengte.

Als we een object verwarmen, zoals een metalen draad, dan gaat die op een

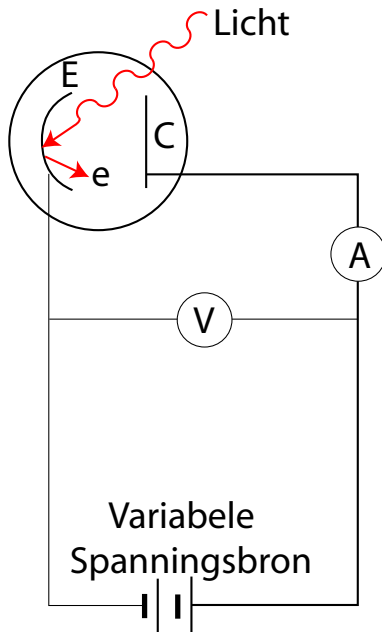


Figuur 4.1: Het golflengtespectrum van een zwarte straler. De curve die onbegrensd is bij lage golflengtes is de klassieke voorspelling van Rayleigh-Jeans. De linker curve die bij alle golflengtes begrensd is volgt uit de hypothese van Planck dat licht in kleine discrete energiepakketjes komt. Deze curve van Planck is in goede overeenstemming met experimentele gegevens.

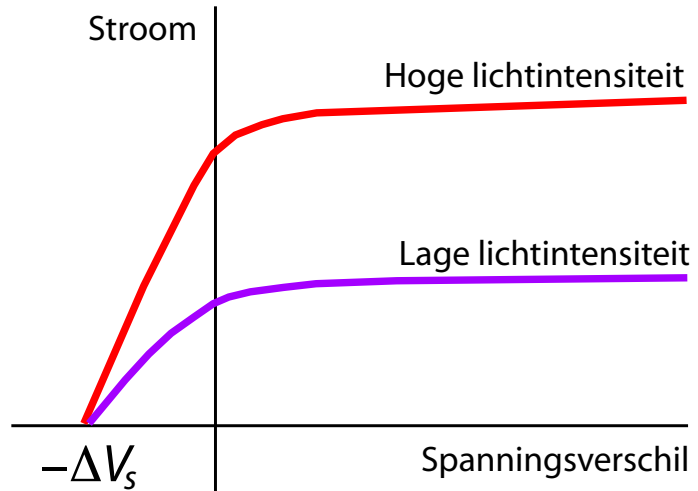
bepaald moment zichtbaar licht uitzenden. We kunnen ook zien dat de draad bij toenemende temperatuur eerst donkerrood gaat gloeien en uiteindelijk witheet wordt. De witte kleur bij hoge temperatuur wijst erop dat alle zichtbaar licht golflengtes in ongeveer gelijke mate worden uitgezonden. Als het golflengtespectrum wordt gemeten als functie van de temperatuur van een lichaam dan blijkt dat spectrum een karakteristieke vorm te hebben: een brede piek rond een golflengte die afhankelijk is van de temperatuur, waarbij de intensiteit zowel bij lage als bij hoge golflengte naar nul gaat. Max Planck lukte het de vorm van het spectrum te verklaren, maar alleen als hij aannam dat de lichtenergie in quanta wordt uitgezonden, pakketjes van welbepaalde energie [6]

$$E = h\nu, \quad (4.1)$$

waarin  $h = 6.626 \times 10^{-34}$  Js de constante van Planck is en  $\nu$  de frequentie van het licht. Een eerdere klassieke verklaring van het spectrum met de theorie van Rayleigh-Jeans werkt met name bij lage golflengte helemaal niet (zie Fig. 4.1). Hoewel Planck daar zelf niet aan wilde is het een sterke aanwijzing dat licht niet bestaat uit continue golven, maar uit een stroom van energiequanta, die ook als lichtdeeltjes kunnen worden gezien. De definitieve bevestiging van deze hypothese kwam in 1905 toen Albert Einstein het foto-elektrisch effect verklaarde [7]. Het foto-elektrisch effect ontstaat als een lichtbundel op een metalen oppervlak wordt geschenen, waarbij zich in de buurt van dat metalen vlak een ander stuk metaal



Figuur 4.2: Schematische voorstelling van een opstelling om het foto-elektrisch effect te meten. De negatieve elektrode staat met  $E$  aangegeven en de positieve elektrode met  $C$ . De spanningsmeter heeft het symbool  $V$  en de stroommeter is  $A$ .



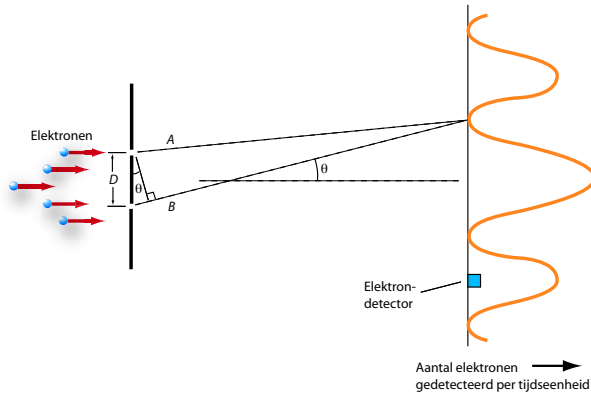
Figuur 4.3: Resultaat van de stroom meting in de opstelling hiernaast. Op de horizontale as staat het spanningsverschil tussen de elektroden. Positief is dat  $C$  een hogere spanning heeft dan  $E$  in de figuur hiernaast. Op de verticale as staat de gemeten stroom uit. De bovenste curve correspondeert met een lichtbron van dubbele intensiteit vergeleken met de onderste curve.

bevindt dat op een positieve spanning wordt gezet. Een mogelijke opstelling staat geschetst in Fig. 4.2. Als de lichtbundel licht van een bepaalde frequentie bevat dan gaat er een stroom lopen. Bij frequenties onder een bepaalde grens loopt er geen stroom meer. Als de intensiteit van de lichtbundel wordt opgevoerd gebeurt er onder de grensfrequentie nog steeds niets, terwijl boven de grensfrequentie de stroom recht evenredig toeneemt met de intensiteit. Wordt de frequentie verder opgevoerd dan verandert de stroom niet. De verklaring is kinderlijk eenvoudig als je hem eenmaal hebt gehoord, maar het nam het genie van Einstein om erop te komen [7]. Als licht bestaat uit lichtdeeltjes die elk een energie bevatten die evenredig is met de frequentie van het licht, dan hebben die deeltjes onder een bepaalde energie niet het vermogen om een elektron uit het metaal te schieten.

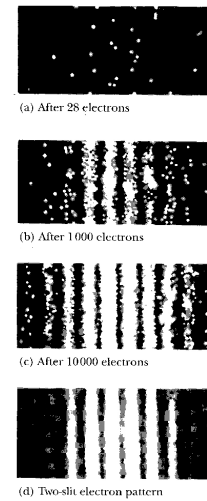
Onder de drempelenergie gebeurt er dus niets ook niet als er heel veel lichtdeeltjes zijn die elk geen elektron los kunnen maken uit het metaal, er gebeurt dan heel veel niets. Boven de grenswaarde van de energie zorgt elk lichtdeeltje ervoor dat er een elektron uit het metaal wordt geschoten. Hoe meer lichtdeeltjes, dus hoe hoger de intensiteit van het licht, hoe meer elektronen en dus hoe groter de stroom. Hoeveel energie elk lichtdeeltje boven de grenswaarde ligt maakt wel uit voor de energie waarmee de elektronen het metaal kunnen verlaten, maar niet voor het aantal elektronen dat uit het metaal komt. Dus de stroom hangt niet af van de energie van de lichtdeeltjes als die boven de grenswaarde is. De resultaten van een experiment met de opstelling geschetst in Fig. 4.2 is weergegeven in de grafiek van Fig. 4.3. In deze grafiek is het potentiaalverschil op de horizontale as uitgezet tegen de gemeten stroom op de verticale as. In dit geval gaat het om licht met een frequentie boven de drempelfrequentie om stroom te induceren. Er blijkt stroom te lopen, zelfs als er een negatieve potentiaal over de elektroden wordt aangelegd. Dat komt omdat de energie van de betreffende fotonen zo hoog is dat de elektronen niet alleen uit het metaalrooster worden bevrijd, maar dat ze eenmaal uit het metaal nog een hoeveelheid energie over hebben die in bewegingsenergie zit. Door deze bewegingsenergie hebben ze een snelheid en kunnen ze ondanks dat ze worden afgeremd door de negatieve potentiaal soms toch nog de overkant halen. De richting van de snelheden van de elektronen is natuurlijk tamelijk willekeurig als ze uit het metaal komen en bij toenemende negatieve spanning zullen uiteindelijk alleen de elektronen die recht tegen de stroom in roeien de overkant nog halen. Daarom loopt de stroom terug bij toenemende negatieve spanning.

Nu we hebben gezien dat licht, waarvan we in eerste instantie misschien dachten dat het golven zijn, ten minste in bepaalde situaties ook als deeltjesstroom moet worden opgevat kunnen we ons afvragen of deeltjes zich dan misschien soms ook onder bepaalde omstandigheden als golven kunnen gedragen. Dat blijkt inderdaad het geval te zijn. Een experiment dat met licht eenvoudig is uit te voeren en waarvan de beschrijving gebruik maakt van het golfkarakter van het licht is ook met deeltjes uit te voeren, en met een verrassend resultaat. Het lichtexperiment gebruikt een puntbron, dat is een bron die klein genoeg is in verhouding tot de overige afstanden in het experiment, een scherm met twee dunne spleten dat voor de lichtbron wordt gehouden op een bepaalde afstand, en een scherm om het licht dat van de bron door de spleten valt af te beelden weer op enige afstand van het scherm met de spleten. Het blijkt nu dat er op het afbeeldingsscherm een patroon zichtbaar is van lichtstrepen. Dat patroon is vrij makkelijk te verklaren als we aannemen dat het licht in fase op de spleten valt en er uit elk van de spleten weer een bolvormige (feitelijk cilindervormige) golf wordt uitgezonden. De verschillende plaatsen op het afbeeldingsscherm hebben verschillende afstanden





Figuur 4.4: Schematische voorstelling van een twee spleten experiment met elektronen. De afstand tussen de spleten is groot in verhouding tot de breedte van de spleten. De afstand tot het detectievlak (waar de intensiteit aan elektronen aan de rechterkant staan afgebeeld) is groot in verhouding tot de afstand tussen de spleten. De elektronenbron levert een homogene flux op de twee spleten.



Figuur 4.5: Resultaat van de inslag van elektronen op een fotografische plaat nadat respectievelijk 28, 1000, 10000 en veel meer elektronen op twee spleten zijn afgevuurd. De eerste drie plaatjes zijn computer simulaties. Het laatste plaatje het resultaat van een daadwerkelijk experiment [8].

tot de twee spleten. Het afstandsverschil zorgt voor een faseverschil, zodat soms de twee golven in fase zijn en er een lichte streep ontstaat en soms de golven in tegenfase zijn zodat ze elkaar uitdoven. Dit experiment kan ook worden uitgevoerd met deeltjes, bijvoorbeeld met elektronen. De afmetingen van de spleten en de afstanden van de schermen moeten dan zorgvuldiger worden gekozen dan bij het experiment met licht, maar mits goed gekozen krijgen we ook een afbeelding met plaatsen waar veel elektronen terechtkomen en plaatsen daartussenin waar geen elektronen terechtkomen. Dit is geïllustreerd in Fig. 4.4 en een resultaat van een daadwerkelijk experiment is te zien in Fig. 4.5, tezamen met simulaties voor zeer lage aantallen afgeschoten elektronen. Dit maakt ook duidelijk dat we in de quantummechanica de uitkomst, die een verdeling is, alleen kunnen meten door een experiment vaak genoeg te herhalen.

Het is onmogelijk om dat te verklaren met klassieke mechanica, maar makkelijk als we een beschrijving in termen van golven aannemen. Als deeltjes zich

ook als golven kunnen gedragen ligt het voor de hand ze ook een golflengte toe te kennen. Deze is afhankelijk van de energie van het deeltje, net zoals de energie van een lichtdeeltje afhangt van de frequentie (en dus de golflengte.) Prince Louis de Broglie was de eerste die de relatie tussen de golflengte van een deeltje en de bijbehorende impuls goed voorspelde als [9]:

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \quad (4.2)$$

waarbij  $\lambda$  de golflengte van het deeltje is,  $h = 6.626 \times 10^{-34}$  Js de constante van Planck en  $mv$  de impuls van het deeltje is. De impuls hangt voor elk deeltje eenduidig van de energie af. Voor de frequentie van de golf die met het deeltje samenhangt geldt dan dat:<sup>1</sup>

$$\nu = \frac{E}{h}, \quad (4.3)$$

hetgeen precies dezelfde formule is als door Planck voor licht werd gepostuleerd (zie vergelijking 4.1.) Dit maakt de cirkel rond die laat zien dat licht en materiedeeltjes zich in wezen hetzelfde gedragen en dat beiden een deeltjes- en een golfkarakter hebben.

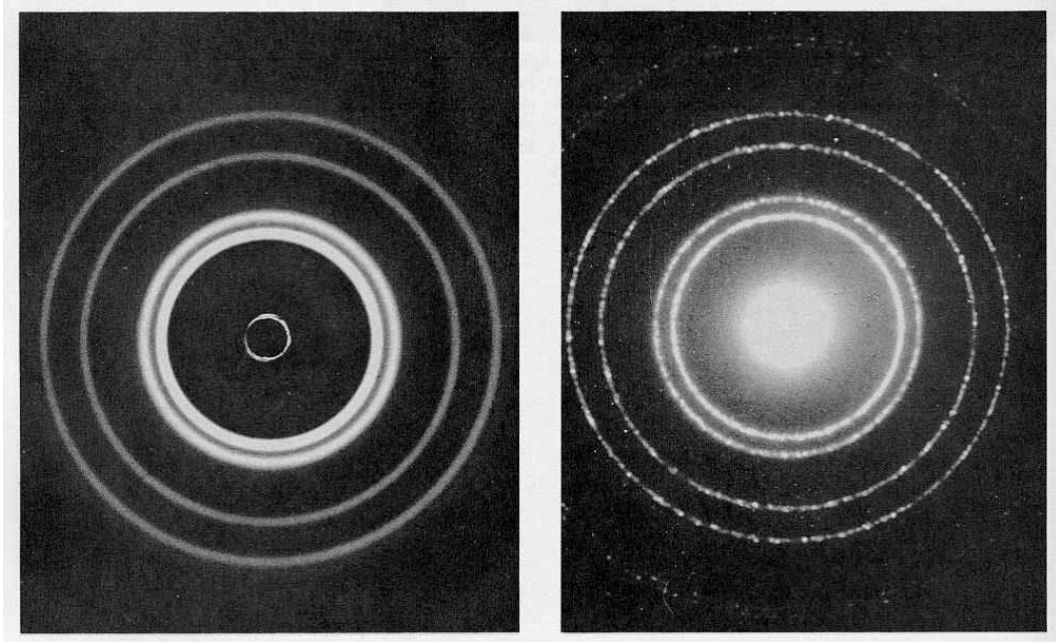
Nu klopt dit theoretisch heel mooi, maar is het ook natuurkunde. Kunnen we het zien en reproduceerbaar meten? Het eerste bewijs daarvoor kwam van een experiment van Davisson en Germer in 1926 [10]. Zij schoten elektronen van ongeveer 54 eV op een nikkel plaatje.<sup>2</sup> De ontdekking was min of meer toeval, zoals dat wel vaker het geval is.<sup>3</sup> Door een verontreiniging van het nikkel oppervlak zagen de heren zich genoodzaakt het nikkel te verhitten om weer een mooi oppervlak te krijgen. Door die verhitting is het nikkel kennelijk van een meer polymorfe structuur, waarin de atoomkernen wat willekeurig van elkaar liggen, naar een éénkristal veranderd. In een éénkristal liggen de atoomkernen op zeer regelmatige afstanden van elkaar. Het geluk wil nu dat de roosterafstand in een nikkel éénkristal ( $2.15 \times 10^{-10}$  m) van dezelfde orde is als de De Broglie golflengte van een elektron van 54 eV ( $1.67 \times 10^{-10}$  m). Hierdoor ontstaan interferentieëffecten precies zoals dat bij licht gebeurt dat door een regelmatig tralie valt. In dit geval wordt een piek in de intensiteit verwacht als de geprojecteerde

---

<sup>1</sup>Neem  $E = (1/2)mv^2$  voor de energie en  $p = mv$  voor de impuls. De fasesnelheid van de golf wordt gegeven door  $v_f = E/p = v/2$ . Verder geldt  $\lambda\nu = v_f = v/2$ . Substitutie geeft dan  $\nu = v/(2\lambda) = v/((2h)/(mv)) = (1/2)mv^2/h = E/h$ .

<sup>2</sup>De eV is een energiemaat die correspondeert met een kinetische energie die een elektron krijgt als die een potentiaalverschil van 1 Volt doorloopt. Een 54 eV elektron kun je dus krijgen door een elektron vanuit rust tussen twee elektroden te versnellen waar een potentiaalverschil tussen staat van 54 V.

<sup>3</sup>In de huidige manier van wetenschapsfinanciering is de ruimte voor dergelijke toevallige ontdekkingen inmiddels wel erg afgenomen.



Figuur 4.6: *Diffractiepatroon van Röntgen straling op een Aluminium folie (links) en elektronen op hetzelfde folie (rechts). De energie van de elektronen was zo afgeregeld dat ze dezelfde De Broglie golflengte hadden als de golflengte van de Röntgen straling. Deze figuur is overgenomen uit [11].*

roosterafstand voor die hoek gelijk is aan de golflengte van de elektronen. Dat is zo voor een hoek van  $50^\circ$  ( $(2.15 \times 10^{-10} \text{ m}) \times \sin 50^\circ = 1.65 \times 10^{-10} \text{ m.}$ ) Inderdaad was dit de hoek waarbij de verstrooiingspiek werd waargenomen, precies in overeenstemming met de voorspelling van De Broglie. Een meer recent voorbeeld van een diffractiepatroon is te zien in Fig. 4.6 [11]. In 1929 kreeg De Broglie de Nobelprijs voor zijn gedurfde, maar wel gefundeerde aanname.

## Golvende deeltjes: de Schrödingervergelijking

Gaan we er nu vanuit dat elk deeltje ook een golfkarakter heeft dan kunnen we niet meer eenduidig over de plaats van een deeltje praten. Als we alleen naar het golfkarakter van een deeltje kijken dan heeft die golf maxima, waar als het ware “veel” van het deeltje is en minima, waar als het ware “weinig” van het deeltje is. We kunnen dat, net als bij licht beschrijven met een verdeling in de ruimte die aangeeft dat ergens “veel” deeltje is en op andere plaatsen zich “weinig” deeltje bevindt. Als we die verdeling nu opvatten als de “plaats” van een deeltje dan dringt zich natuurlijk de vraag op wat de bewegingsvergelijking dan is voor die

nieuwe plaatsverdeling. Deze vraag is voor het eerst beantwoord door Erwin Schrödinger die een bewegingsvergelijking opstelde voor de plaats als verdeling. Als we nu een deeltje niet meer opvatten als iets met op ieder tijdstip een vaste plaats  $\vec{x}(t)$ , maar als een verdeling over de ruimte die op elk tijdstip  $t$  aangeeft “hoeveel” er van het deeltje op plaats  $\vec{x}$  zit dan kunnen we dat vatten in een functie die bekend staat als de golffunctie:

$$\Psi(\vec{x}, t). \quad (4.4)$$

Beweging is dan niet meer de verandering van de plaats  $\vec{x}$  van het deeltje, maar de verandering van de hoeveelheid van het deeltje op die plaats  $\Psi(\vec{x}, t)$ . De vergelijking die Schrödinger opschreef voor de evolutie in de tijd van de golffunctie is:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + U(\vec{x}, t)\Psi. \quad (4.5)$$

Voor het gemak hebben we als nieuw symbool de gereduceerde constante van Planck,  $\hbar$  (spreek uit: “h bar”), ingevoerd

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054 \times 10^{-34} \text{ Js} \quad (4.6)$$

De kromme d’s,  $\partial$ , in deze vergelijking staan voor partiële afgeleiden. Deze kunnen worden opgevat als een gewone afgeleide waarbij de andere parameters en variabelen waarvan de functie die wordt afgeleid constant worden gehouden. Het symbool  $U(\vec{x}, t)$  staat voor de potentiële energie, die in het algemeen van de plaats afhangt en ook nog van de tijd kan afhangen. De potentiële energie hangt weer nauw samen met de kracht, precies volgens de klassieke formule 1.4. Een niet triviale verandering in de baan van een deeltje, ook als die als golffunctie wordt voorgesteld, is dan ook altijd het gevolg van een variatie van de potentiële energie. Als de potentiële energie niet van de plaats en de tijd afhangt, dan zal een deeltje, in overeenstemming met de eerste wet van Newton, een baan in rechte lijn en met constante snelheid volgen. Aan de golffunctie is dat te zien doordat de vorm niet verandert, maar de locatie in de ruimte als functie van de tijd wel.

Om nu naar de implicaties te kijken van de Schrödinger vergelijking kunnen we kijken naar het geval waarin er geen krachten werken op het deeltje dat we beschouwen en nemen we de in dat geval constante potentiaal overal gelijk aan nul. We verwachten dan een simpel gedrag in de tijd (het deeltje gaat rechtdoor met dezelfde snelheid.) Dit komt tot uitdrukking in de aanname dat het gedrag van het deeltje kan worden beschreven door de golffunctie:<sup>4</sup>

$$\Psi(\vec{x}, t) = e^{-(i/\hbar)(\omega t - p_x x - p_y y - p_z z)}. \quad (4.7)$$

---

<sup>4</sup>Op dit moment is de functionele vorm van de golffunctie gewoon een aanname, “Ansatz” in goed Engels. Dat het een gelukkige aanname blijkt zullen we maar de hand van de meester noemen.

Als we dit invullen in de Schrödinger vergelijking 4.5 dan krijgen we voor  $\Psi$  de vergelijking:

$$\omega \Psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \Psi(\vec{x}, t). \quad (4.8)$$

We zien nu dat  $\Psi$  helemaal uit de vergelijking kan worden gedeeld, en dat de vergelijking waar is als geldt:

$$\omega = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2). \quad (4.9)$$

De oplossing in 4.7 is een vlakke golfoplossing. Het reële deel van de oplossing heeft steeds een maximum op

$$\omega t = p_x x + p_y y + p_z z, \quad (4.10)$$

terwijl het imaginaire deel steeds een maximum heeft bij

$$\omega t = p_x x + p_y y + p_z z + \pi/2. \quad (4.11)$$

Verder blijkt uit vergelijking 4.9 dat  $\omega$  vast ligt als we  $p_x$ ,  $p_y$  en  $p_z$  hebben gekozen. Als we nu kijken naar de groepssnelheid van de golf functie dan zien we dat die wordt gegeven door

$$\vec{v}_g = d\omega/d\vec{p} = \vec{p}/m \quad (4.12)$$

Omdat informatie overdracht met de groepssnelheid plaatsvindt, zien we hieruit dat  $\vec{p}/m$  kennelijk is op te vatten als de snelheid van het eenparig rechtlijnig bewegend deeltje. Dus dan kunnen we  $\vec{p}$  opvatten als de impuls van dat deeltje. Voor  $\omega$  krijgen we dan de uitdrukking:

$$\omega = \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2m} = \frac{1}{2}mv^2, \quad (4.13)$$

de kinetische energie van het deeltje, en, omdat het een vrij deeltje is, ook de totale energie van het deeltje.<sup>5</sup> In retrospectief kunnen we zien dat de Schrödinger-vergelijking niets anders is dan de vergelijking:

$$E = \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2m}, \quad (4.14)$$

---

<sup>5</sup>Alternatief kunnen we zien dat  $\omega$  met de energie te maken moet hebben, omdat het in de formule voor  $\psi$  de coëfficiënt is voor de variabele  $t$  die de tijd aangeeft. De coëfficiënt voor de tijd in een golf is de frequentie van de golf. Maar de frequentie is in de quantummechanica gerelateerd aan de energie door  $E = h\nu$ , waarin  $\nu$  de frequentie is en  $h$  de constante van Planck. De vector  $(p_x, p_y, p_z)$  die we al zo suggestief met een  $p$  van impuls hebben aangeduid zijn de coëfficiënten voor de plaats in de golf. Die coëfficiënten zijn precies één gedeeld door de golflengte,  $\lambda$ . In de quantummechanica hebben we gezien dat de impuls van een deeltje omgekeerd evenredig gaat met de golflengte (De Broglie),  $p = h/\lambda$  en zo valt alles precies op zijn plaats. (Nou ja, dat is natuurlijk zo, omdat het zo is geconstrueerd.)

waarbij de substituties

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{x}}, \quad (4.15)$$

zijn uitgevoerd. Verder zijn beide kanten van de vergelijking werkend op de golffunctie gemaakt door van rechts met de golffunctie te vermenigvuldigen.<sup>6</sup>

*Het principe van formule 4.15 om de quantummechanische bewegingsvergelijking te maken uit de klassieke bewegingsvergelijking is algemeen en zal ons later van nut zijn.*

## Niet precies, toch exact

Als we proberen de oplossingen van de Schrödingervergelijking direct te interpreteren als de waarschijnlijkheid dat een deeltje zich op een bepaalde plaats bevindt, dan lopen we meteen tegen het probleem op dat de oplossingen van de Schrödingervergelijking zowel negatieve als positieve waarden op kunnen leveren als functie van de plaats (of nog erger in deze context, dat de golffunctie niet reëeltallig is.) De oplossing van dit schijnbare probleem is analoog aan wat er met licht aan de hand is. Wat we waarnemen van licht is een lichtintensiteit en lichtintensiteit is het kwadraat van de golf die we met het licht associëren. Door het kwadraat te nemen van de golffunctie worden de waarden altijd positief. Als generalisatie voor complexe getallen nemen we het kwadraat van de absolute waarde van het complexe getal:

$$I(\vec{x}, t) = |\Psi(\vec{x}, t)|^2 = \Psi(\vec{x}, t)\Psi^*(\vec{x}, t), \quad (4.16)$$

waarbij  $\Psi^*$  staat voor de complex geconjugeerde van  $\Psi$ .<sup>7</sup> Dit heet de Born waarschijnlijkheidsinterpretatie van de golffuncties, naar degene die voor het eerst met het voorstel voor deze interpretatie kwam: Max Born. Om de waarschijnlijkheidsinterpretatie te laten werken moet natuurlijk wel de totale kans om het deeltje ergens in de ruimte aan te treffen op elk moment gelijk zijn aan 1. Wiskundig is de conditie daarvoor:

$$\int_{\text{hele ruimte}} I(\vec{x}, t) d^3\vec{x} = 1. \quad (4.17)$$

Als we dit proberen toe te passen op een vlakke golfoplossing dan zien we dat de uitkomst van de integraal oneindig is en dat er dus niet makkelijk een vermenigvuldigingsfactor voor kan worden gezet die de waarschijnlijkheid op 1 normeert.

---

<sup>6</sup>Dat de golffunctie aan beide kanten van het =-teken rechts wordt gezet is belangrijk. De afgeleiden moeten op de golffunctie “werken” en er dus voor staan.

<sup>7</sup>Bij complexe conjugatie veranderen alle factoren  $i$  in  $-i$ , dus  $(a + bi)^* = (a - bi)$  als  $a$  en  $b$  reëel zijn.

Dit is een gevolg van het feit dat een vlakke golfoplossing een oneindig scherp bepaalde impuls heeft. Een manifestatie van de quantummechanica is dan dat de plaats oneindig slecht is bepaald en dat het deeltje in feite een even grote kans heeft om waar dan ook te zijn in de ruimte. Een dergelijke verdeling is niet te normeren. In de praktijk betekent dat dat een deeltje met oneindig scherp bepaalde impuls niet voor kan komen. Dit wordt precies gemaakt in de onzekerheidsrelaties van Heisenberg:

$$\Delta p \times \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta E \times \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (4.18)$$

De vlakke golfoplossing is wel een nuttige limietsituatie voor vrije deeltjes met een goed bepaalde impuls en we zullen deze oplossing dan ook nog vaak gebruiken, in weerwil van de matige wiskundige fundering.<sup>8</sup>

## Golffunctie plus golffunctie is golffunctie

Omdat de afgeleide van de som van twee functies hetzelfde is als de som nemen van de afgeleide van de functies:

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{d(f)}{dx} + \frac{d(g)}{dx}, \quad (4.19)$$

zijn lineaire combinaties van oplossingen van de Schrödingervergelijking ook weer oplossingen van die vergelijking. Dit staat bekend als het superpositiebeginsel. Golffuncties die aan dezelfde Schrödingervergelijking voldoen, dat wil zeggen aan de Schrödingervergelijking met dezelfde potentiaal  $U$ , mogen bij elkaar worden opgeteld en zijn dan weer een mogelijke oplossing van die Schrödingervergelijking.

De intensiteiten kunnen niet bij elkaar worden opgeteld, maar ontstaan pas uit de golffunctie of lineaire combinatie van golffuncties door kwadrateren. Hieruit volgt het begrip interferentie dat plaats vindt als twee of meer oplossingen worden opgeteld en vervolgens gekwadraterd. Als bijvoorbeeld de golffuncties  $\Psi_1$  en  $\Psi_2$  oplossingen zijn van de Schrödinger vergelijking dan is  $\Psi_1 + \Psi_2$  dat ook en geeft aanleiding tot de plaatswaarschijnlijkheid:

$$\begin{aligned} I(\vec{x}, t) &= |\Psi_1(\vec{x}, t) + \Psi_2(\vec{x}, t)|^2 \\ &= |\Psi_1(\vec{x}, t)|^2 + |\Psi_2(\vec{x}, t)|^2 + 2\text{Re} [\Psi_1(\vec{x}, t)\Psi_2(\vec{x}, t)]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

De eerste twee termen aan de rechterkant van de vergelijking zijn de intensiteiten van de afzonderlijke golffuncties. De laatste term stelt de interferentieterm voor

---

<sup>8</sup>Aan die wiskundige fundering is wel wat te doen als we normeerbare functie als verzameling nemen en de afsluiting van die verzameling bekijken. Net niet normeerbare functie als die van de vlakke golf vallen dan op de rand van die afsluiting en kunnen als limietgeval voor normeerbare functie wiskundig streng worden behandeld.

en is twee maal het reële deel van het product van de twee golffuncties. Deze term kan zowel nul zijn, geen interferentie, als positief, constructieve interferentie, als negatief, destructieve interferentie.

Een (minimale) verzameling van oplossingen van de Schrödinger vergelijking, waaruit alle mogelijke oplossingen door lineaire combinaties zijn te reconstrueren heet een basis van oplossingen. Een voorbeeld van een basis van periodieke oplossingen voor de vrije stationaire Schrödingervergelijking, dus met potentiaal  $U = 0$  en tijdafgeleide  $\partial\Psi/\partial t = 0$ , wordt gegeven door:

$$\cos(nx) \text{ en } \sin(nx) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.21)$$

Elke oplossing van de vrije stationaire Schrödingervergelijking is te schrijven als

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \quad (4.22)$$

Als voorbeeld geven we de periodieke functie:<sup>9</sup>

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 < (x|2) < 1 \\ -1 & \text{als } 1 < (x|2) < 2 \end{cases} \quad (4.23)$$

De functie kan ook worden geschreven als:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin(\pi(2n+1)x) \quad (4.24)$$

Dit voorbeeld is geïllustreerd in Fig. 4.7, waarin de benadering van de blokfunctie 4.23 tot op verschillende orden van  $n$  zijn getekend. Een dergelijke benadering met sin en cos functies heet een Fourierreeks.

We kunnen het begrip Fourierreeks uitbreiden tot het beschrijven van niet periodieke functies. De som moet dan door een integraal worden vervangen:

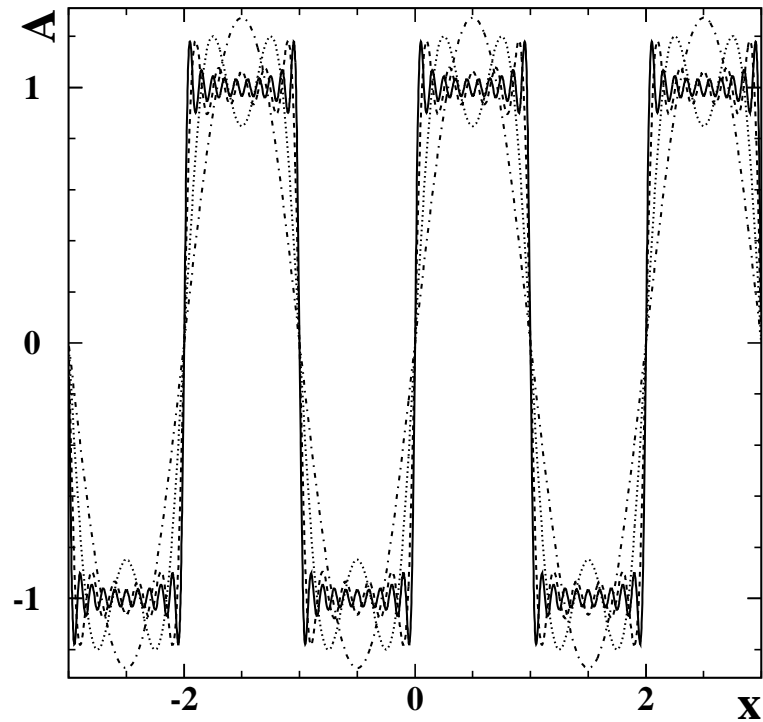
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(p)e^{ipx} dp. \quad (4.25)$$

De coëfficiënten,  $a(p)$ , vormen nu zelf een functie van de integratievariabele  $p$ . De integraal heet een Fouriertransformatie en  $a(p)$  en  $f(x)$  heten elkaars Fouriergetransformeerden. De vrije Schrödinger vergelijking 4.5 met  $U = 0$  kan nu worden opgevat als de Fouriergetransformeerde van de klassiek bewegingsvergelijking 4.13 (en vice versa.)

---

<sup>9</sup> $x|2$ ,  $x$  module 2, betekent het getal dat wordt gevonden door net zo lang 2 bij  $x$  op te tellen of af te trekken zodat het resultaat tussen 0 en 2 ligt. Bijvoorbeeld  $1.5|2 = 1.5$ ,  $5.5|2 = 1.5$  en  $-2.5|2 = 1.5$ .





Figuur 4.7: Benadering van de blokfunctie gedefinieerd in formule 4.23 met functies  $\sin(\pi(2n + 1)x)$  van toenemende orde in  $n = 1, 2, 5, 10$  en geschikt gekozen coëfficiënten.



## Hoofdstuk 5

# Relativistische quantummechanica

Gaan we nu uit van de relatie tussen energie en impuls zoals gegeven in formule 2.27 en passen we de substitutie toe zoals in formule 4.15 dan krijgen we

$$\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = (\hbar c)^2 \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - m^2 c^4 \Psi. \quad (5.1)$$

Deze vergelijking staat bekend als de Klein-Gordon vergelijking. In dit geval is  $\Psi$  ook op te lossen als vlakke golven:

$$\Psi(\vec{x}, t) = e^{-i\hbar(\omega t - \vec{p} \cdot \vec{x})}. \quad (5.2)$$

Alleen, hier heeft  $\omega$  twee geldige oplossingen:

$$\omega = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p} c^2 + m^2 c^4} \quad \text{of} \quad \omega = -\sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p} c^2 + m^2 c^4}, \quad (5.3)$$

die bekend staan als positieve en negatieve frequentie oplossingen. Het is à priori niet duidelijk wat we aan moeten met een oplossing waarin  $\omega$  negatief is als we  $\omega$  als de energie opvatten, zoals in het klassieke geval. De correcte interpretatie blijkt dat we de twee oplossingen kunnen zien als die voor een deeltje (positieve  $\omega$ ) en anti-deeltje (negatieve  $\omega$ ). We vatten het anti-deeltje dan op als terugreizend in de tijd. In dat geval keert het teken van de impuls om. Dat heeft in de golffunctie  $\Psi$  het gevolg dat het relatieve teken tussen  $\omega$  en  $\vec{p}$  omkeert. We kunnen dan  $-\omega$  opvatten als de energie van de oplossing en die is dan positief.

*Dus elke oplossing van de relativistische golfvergelijking heeft een positieve frequentie oplossing met positieve energie die we met een deeltje associëren en een negatieve frequentie oplossing met positieve energie, maar tegengestelde impuls, die we met anti-deeltjes associëren.*

Deze interpretatie voor de oplossingen van de Klein-Gordon vergelijking is gegeven door Weisskopf en Pauli [12].

De Klein-Gordon vergelijking is die voor een vrij deeltje. Nu zijn vrije deeltjes oninteressant, je kunt ze niet maken, je kunt ze niet waarnemen, ze zijn helemaal van de rest van de wereld ontkoppeld. Net als de potentiële energieterm  $U$  in de Schrödinger kunnen we ook een extra term aan de Klein-Gordon vergelijking toevoegen om interacties met de omgeving te modelleren:

$$\left[ \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\hbar c)^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + m^2 c^4 \right] \Psi(t, x, y, z) = J(t, x, y, z). \quad (5.4)$$

In dit geval wordt  $J(t, x, y, z)$  de bron-term genoemd. Anders dan bij de potentiële energie  $U$  in de Schrödinger vergelijking wordt in dit geval  $J$  *niet* met de golf functie  $\Psi$  vermenigvuldigd (terwijl aan de linkerkant alles wel van rechts met  $\Psi$  worden vermenigvuldigd.)

Zoals we aan het eind van het vorige hoofdstuk gaven kunnen alle golf functies worden geschreven als een som van vlakke golven door de coëfficiënten voor de individuele bijdragen van de verschillende vlakke golven goed te kiezen. Dit kan worden geschreven als:<sup>1</sup>

$$\Psi(t, x, y, z) = \int d\omega dp_x dp_y dp_z e^{-i(\omega t - p_x x - p_y y - p_z z)} \Psi(\omega, p_x, p_y, p_z) \quad (5.5)$$

waarbij  $\Psi(\omega, p_x, p_y, p_z)$  de slim gekozen coëfficiënten zijn van de vlakke golf bijdragen die door de parameters  $\omega, p_x, p_y$  en  $p_z$  worden gegeven.

Vullen we de voorstelling van  $\Psi(t, \vec{x})$  uit formule 5.5 in de Klein-Gordon vergelijking met bron-term (5.4) in dan krijgen we:

$$\begin{aligned} \int d\omega dp_x dp_y dp_z (\omega^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 - m^2) e^{-i(\omega t - p_x x - p_y y - p_z z)} \Psi(\omega, p_x, p_y, p_z) \\ = J(t, x, y, z). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Nu is het zo dat  $\Psi(\omega, p_x, p_y, p_z)$  met een Fouriertransformatie in  $\Psi(t, x, y, z)$  transformeert, maar dat andersom ook kan met een inverse Fouriertransformatie die er net zo uit ziet:

$$\Psi(\omega, p_x, p_y, p_z) = \int dt dx dy dz e^{+i(\omega t - p_x x - p_y y - p_z z)} \Psi(t, x, y, z). \quad (5.7)$$

Passen we die inverse transformatie toe op vergelijking 5.6 dan:

$$\begin{aligned} (\omega^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 - m^2) \Psi(\omega, p_x, p_y, p_z) = \\ \int d\omega dp_x dp_y dp_z e^{+i(\omega t - p_x x - p_y y - p_z z)} J(t, x, y, z). \end{aligned} \quad (5.8)$$

---

<sup>1</sup>De gegeven uitdrukking heet een Fourier transformatie.  $\Psi(t, x, y, z)$  en  $\Psi(\omega, p_x, p_y, p_z)$  bevatten in feite dezelfde informatie, maar de ene in de  $(t, \vec{x})$ -ruimte en de andere in de  $(\omega, p_x, p_y, p_z)$ -ruimte.  $\Psi(t, x, y, z)$  en  $\Psi(\omega, p_x, p_y, p_z)$  worden elkaars Fourier getransformeerden genoemd.

Delen we links en rechts door  $(\omega^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 - m^2)$ , dan krijgen we:

$$\Psi(\omega, p_x, p_y, p_z) = \frac{\int dt dx dy dz e^{+i(\omega t - p_x x - p_y y - p_z z)} J(t, x, y, z)}{\omega^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 - m^2}. \quad (5.9)$$

Dit is iets dat lijkt op een propagator:

$$\Psi(\omega, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{\omega^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 - m^2}, \quad (5.10)$$

een formule die aangeeft hoe een deeltje op de ene plaats door de bron-term wordt gecreëerd, naar een andere plaats beweegt en daar door de bron-term wordt geannihileerd (dat moet een hele specifieke vorm voor de bron-term zijn en is een ingewikkelde berekening om echt te doen met integralen in het vlak van de complexe getallen, die we de lezer hier besparen.)

Voordat de interpretatie van Pauli en Weisskopf voor de oplossingen van de Klein-Gordon vergelijking aanvaard werd heeft men ook nog geëxperimenteerd met het lineair maken van de golfvergelijking. Het idee is dat de negatieve energie oplossingen het gevolg zijn van de kwadratische energieterm in vergelijking 2.27. Dit probleem is gekraakt door Dirac. De eerste stap die nodig is, is een formulering van energie en impuls in één object:

$$p^\mu = \begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Vervolgens schreef Dirac de vergelijking 2.27 als:

$$0 = E^2/c^2 - \vec{p}^2 - m^2 c^2 = p^\mu p_\mu - m^2 c^2 = (p^\mu - mc)(p_\mu + mc). \quad (5.12)$$

Het product  $p^\mu p_\mu$  moet hier worden gelezen als:

$$p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = (E/c)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2. \quad (5.13)$$

Maar hier wordt stevig gesmokkeld in de wiskunde. Een object met vier componenten,  $p^\mu$ , wordt opgeteld bij een scalar,  $mc$ . De interpretatie daarvan is

volkomen duister. Om dat te repareren voeren we een object  $\gamma^\mu$  in dat ook vier componenten heeft, net zoals  $p^\mu$ , en vermenigvuldigen  $\gamma^\mu$  met  $p^\mu$  waar dat zo te pas komt. We krijgen dan:

$$0 = (\gamma_\mu p^\mu - mc)(\gamma^\mu p_\mu + mc), \quad (5.14)$$

waarbij we voor de producten  $\gamma_\mu p^\mu$  dezelfde regel volgen als in formule 5.13:

$$\gamma^\mu p_\mu = \gamma_\mu p^\mu = (\gamma^0 p^0) - (\gamma^1 p^1) - (\gamma^2 p^2) - (\gamma^3 p^3). \quad (5.15)$$

Dat product is dan weer een getal zodat de kwadraatafsplitsing van formule 5.14 werkt. Door invullen in de oorspronkelijke vergelijking 5.12 krijgen we vergelijkingen voor de verschillende  $\gamma$ 's:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \begin{cases} 2 & \text{als } \mu = \nu = 0, \\ -2 & \text{als } \mu = \nu = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{als } \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (5.16)$$

Het is niet moeilijk na te gaan dat gewone getallen voor de verschillende  $\gamma$ 's nooit kunnen voldoen, ook complexe getallen niet. De kleinste objecten die aan deze rekenregels kunnen voldoen blijken  $4 \times 4$  matrices te zijn. In dat geval moeten de 2,  $-2$  en 0 aan de rechterkant van vergelijking 5.16 ook opgevat worden als  $4 \times 4$  matrices:

$$2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad -2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Een mogelijke oplossing wordt gegeven door de matrices:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Dit is lang niet de enige oplossing en in feite maakt de precieze presentatie van de oplossing niet uit. Het blijkt nu dat we één van de twee lineaire factoren in  $E$

uit vergelijking 5.14 kunnen nemen en gelijk stellen aan nul. Passen we weer het voorschrift uit 4.15 toe dan volgt de Dirac vergelijking:

$$i\hbar \left( \gamma^0 \frac{\partial \Psi}{\partial ct} - \gamma^1 \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \gamma^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \gamma^3 \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - mc \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Psi = 0. \quad (5.19)$$

De nul aan de rechterkant van het = teken moet hier als  $4 \times 4$  matrix worden gelezen met allemaal nullen als elementen (zie formule 5.17.) Het blijkt dat de totale verzameling van oplossingen voor deze vergelijking precies hetzelfde is als wanneer we een + teken hadden gekozen voor de  $mc$  term. De golffunctie  $\Psi$  kan hier worden opgevat als een vector met 4 componenten, in totaal beschrijft de Dirac vergelijking dan vier simultane vergelijkingen voor de vier componenten van  $\Psi$ . Het blijkt dat  $\Psi$  niet precies de transformatie eigenschappen heeft van een vector, maar andere transformatie eigenschappen. De oplossingen  $\Psi$  van de Diracvergelijking worden *spinoren* genoemd. De spinoren bevatten vier onafhankelijke componenten. Hiervan worden er telkens twee paar-aan-paar beschouwd als corresponderend deeltje en anti-deeltje. Verder worden de paren beschouwd als deeltjes met halfvallige spin, een intern quantumgetal. De twee oplossingen voor een deeltje corresponderen dan met spin  $+1/2$  en spin  $-1/2$  en voor de anti-deeltjes idem dito.<sup>2</sup> De oplossing van Dirac leidt dus niet tot eliminatie van anti-deeltjes uit het probleem, maar juist tot nog meer vrijheidsgraden. Achteraf is dat heel gelukkig, want het blijkt dat we alle elementaire materie deeltjes met de Dirac vergelijking moeten beschrijven, omdat ze spin  $1/2$  hebben.

Een belangrijk zij-effect van de Klein-Gordon en Dirac beschrijvingen van een relativistisch quantumdeeltje is dat de deeltjesdichtheid niet meer behouden is. In plaats daarvan is de dichtheid van alle deeltjes min alle anti-deeltjes behouden. Dit is een belangrijke observatie die in de praktijk blijkt te kloppen. We kunnen deeltje-anti-deeltje paren maken. In dat geval veranderen zowel de deeltjesdichtheid als de anti-deeltjesdichtheid. De dichtheid aan deeltjes min anti-deeltjes verandert in dat geval echter niet.

## Stilstaande deeltjes

Ironisch genoeg is een stilstaand deeltje quantummechanisch het makkelijkst te beschrijven met de relativistische quantumvergelijking. Als voorbeeld nemen we

---

<sup>2</sup>Elementaire spin wordt gemeten in eenheden van  $\hbar$ . Korteheidshalve zullen we deze eenheid weglaten als we over spin en draai-impuls van elementaire deeltjes spreken. Voor onze doeleinden is het alleen interessant of de spin heel- of halfvallige is en doet de absolute grootte er niet toe.

de Klein-Gordon vergelijking, maar wat hier volgt geldt ook voor de Dirac vergelijking met dien verstande dat daar de golffuncties met een spinor moeten worden vermenigvuldigd.

De algemene oplossing van de Klein-Gordon vergelijking is:

$$\phi(\vec{x}, t) = Ne^{-i\hbar(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}, \quad (5.20)$$

met  $N$  een goed gekozen normeringsfactor en:

$$E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (5.21)$$

Beschouwen we een deeltje in rust dan geldt:

$$E = mc^2 \quad \Rightarrow \quad \phi(\vec{x}, t) = Ne^{-i\hbar c^2 m t}. \quad (5.22)$$

Ook de golffunctie van een stilstaand deeltje verandert dus in de tijd. Voor de deeltjesdichtheid heeft dit geen effect:

$$|\phi|^2 = \phi^* \phi = N^2, \quad (5.23)$$

dus dit ‘‘dansen’’ van het deeltje in de tijd is niet observabel.

Beschouwen we echter twee deeltjes met verschillende massa:

$$\phi_1(\vec{x}, t) = Ne^{-i\hbar c^2 m_1 t} \quad \phi_2(\vec{x}, t) = Ne^{-i\hbar c^2 m_2 t}, \quad (5.24)$$

en nemen we aan dat alle andere quantumgetallen van de deeltjes identiek zijn dan mogen we de toestand beschouwen die de som is van de twee golffuncties:<sup>3</sup>

$$\phi_{\text{som}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \phi_1(\vec{x}, t) = Ne^{-i\hbar c^2 m_1 t} + \phi_2(\vec{x}, t) = Ne^{-i\hbar c^2 m_2 t} \right), \quad (5.25)$$

die dan ook weer een geldige oplossing is van de Klein-Gordon vergelijking. De factor  $1/\sqrt{2}$  zorgt dat  $\phi_{\text{som}}$  ook weer goed genormeerd is. Als we van deze nieuwe toestand de tijdevolutie van de deeltjesdichtheid bekijken, dan wacht ons een verrassing:

$$|\phi_{\text{som}}|^2 = \frac{N}{2} \left( 1 + e^{-i\hbar c^2 (m_2 - m_1)t} + e^{-i\hbar c^2 (m_1 - m_2)t} + 1 \right). \quad (5.26)$$

De dubbelproducten kunnen samen met:

$$e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha + \cos -\alpha + i \sin -\alpha = 2 \cos \alpha, \quad (5.27)$$

---

<sup>3</sup>We kunnen ook het verschil van de twee golffuncties beschouwen, die is onafhankelijk van de som-golffunctie. In feite hebben de som- en verschilgolffunctie samen precies dezelfde informatieinhoud als de twee golffuncties waaruit ze zijn opgebouwd samen.



zodat:

$$|\phi_{\text{som}}|^2 = N \left( 1 + \cos \left( \hbar c^2 (m_2 - m_1) t \right) \right). \quad (5.28)$$

Hier is duidelijk wel een effect van de tijd te zien. Wat er in feite gebeurt is dat de totale toestand fluctueert tussen de twee massatoestanden. Dit effect bestaat alleen als er twee (of meer) deeltjes zijn met dezelfde quantumgetallen, maar verschillende massa.



# Hoofdstuk 6

## Het Standaard Model

### Deeltjesinventaris

Het Standaard Model van de elementaire deeltjesfysica beschrijft alle elementaire deeltjes die we kennen en drie van de vier interacties die deze deeltjes kunnen ondergaan: de elektromagnetische kracht, de zwakke kernkracht en de sterke kernkracht. De vierde interactie, de zwaartekracht, wordt niet door het Standaard Model beschreven. In theorie is het tot nu toe onmogelijk gebleken een goede beschrijving van alle vier de krachten tegelijk in één theorie te geven. In de praktijk maakt dat niet veel uit, omdat in alle experimenten waarin de elektromagnetische kracht, zwakke en sterke kernkracht een rol spelen, de zwaartekracht juist helemaal geen rol speelt.

De elementaire deeltjes die we nu kennen vallen uiteen in twee groepen naar gelang de spin die ze hebben. Er zijn spin  $1/2$  deeltjes, de materiedeeltjes, die door de Diracvergelijking worden beschreven, en er zijn spin 1 deeltjes, krachtdeeltjes, die door een ietwat gemodificeerde vorm van de Klein-Gordonvergelijking worden beschreven. Een apart geval is nog één spin 0 deeltje in het Standaard Model, het Higgs boson. Het Higgs boson is verantwoordelijk voor de beschrijving van de massa van deeltjes in het Standaard Model. We komen hier later uitvoerig op terug.

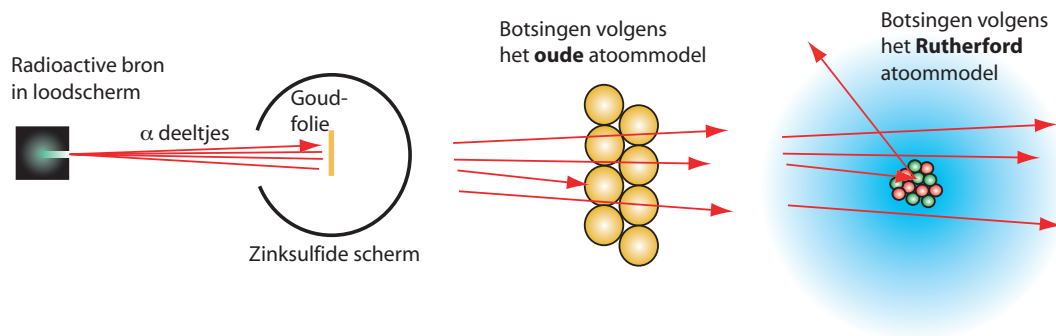
In tabel 6.1 zijn alle bekende fermionen gegeven. De fermionen vallen weer uiteen in twee klassen. De quarks ondergaan de sterke kernkracht, en de leptonen ondergaan de sterke kernkracht niet. Alle fermionen van het Standaard Model ondergaan de zwakke kernkracht. Bijna alle Standaard Model fermionen ondergaan ook de elektromagnetische kracht. De uitzonderingen zijn de neutrino's die elektrisch neutraal zijn. Neutrino's zijn leptonen en ondergaan dus alleen de zwakke kernkracht. Over de krachten zullen we het later hebben, nu gaan we eerst de materiedeeltjes inventariseren.

				$Q$	$T_3$	$C$
quarks	$u_r$	$c_r$	$t_r$	$+2/3$	$+1/2$	$r$
	$u_g$	$c_g$	$t_g$	$+2/3$	$+1/2$	$g$
	$u_b$	$c_b$	$t_b$	$+2/3$	$+1/2$	$b$
	$m \approx 4 \text{ MeV}$	$m \approx 1.4 \text{ GeV}$	$m \approx 177 \text{ GeV}$			
	$d_r$	$s_r$	$b_r$	$-1/3$	$-1/2$	$r$
	$d_g$	$s_g$	$b_g$	$-1/3$	$-1/2$	$g$
	$d_b$	$s_b$	$b_b$	$-1/3$	$-1/2$	$b$
	$m \approx 8 \text{ MeV}$	$m \approx 150 \text{ MeV}$	$m \approx 4.5 \text{ GeV}$			
leptonen	$\nu_e$	$\nu_\mu$	$\nu_\tau$	$0$	$+1/2$	$0$
	$m < 3 \text{ eV}$	$m < 0.19 \text{ MeV}$	$m < 18 \text{ MeV}$			
	$e$	$\mu$	$\tau$	$-1$	$-1/2$	$0$
	$m = 511 \text{ keV}$	$m = 106 \text{ MeV}$	$m = 1.78 \text{ GeV}$			

Tabel 6.1: *Fermionen in het Standaard Model.*  $Q$  is de elektrische lading, die de sterkte bepaalt van de elektromagnetische interactie.  $T_3$  is de derde component van de zwakke isospin, die het gedrag onder de zwakke wisselwerking regelt. Onder elk fermion staat ook de massa (bij benadering) gegeven. Intussen is ontdekt dat de neutrinomassa's groter dan nul zijn, terwijl hier alleen de bovengrens staat gegeven. Al deze fermionen hebben een corresponderend anti-fermion, met dezelfde massa, maar met alle quantumgetallen  $Q$ ,  $T_3$  en  $C$  tegengesteld (Voor  $Q$  en  $T_3$  klappt het teken om in dat geval terwijl de tegengestelden van de quantumgetallen  $r$ ,  $g$ , en  $b$  worden gegeven door  $\bar{r}$  (anti- $r$ ),  $\bar{g}$  (anti- $g$ ) en  $\bar{b}$  (anti- $b$ .) De massa's staan uitgedrukt in energie-eenheden, waarbij  $1 \text{ eV}$  gelijk is aan  $1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$  en de gebruikelijke SI voorvoegsels voor kilo ( $k$ ), Mega ( $M$ , een miljoen) en Giga ( $G$ , een miljard) worden gebruikt.

In de tabel staan de elektrische lading  $Q$ , de zwakke lading  $T_3$  en de sterke lading  $C$  vermeld, tezamen met de massa van de verschillende fermionen. Wat zou moeten opvallen in de tabel is de regelmaat van het patroon van  $Q$ ,  $T_3$  en  $C$  in verticale richting. Deze regelmaat geeft de structuur van de elektromagnetische, de zwakke en de sterke kernkracht weer. Er is ook een grote regelmaat in de horizontale richting. In feite herhaalt het patroon van quarks en leptonen zich drie keer.

De ontdekking van het elektron staat op naam van J. J. Thomson [5] en is hiervoor al besproken. De ontdekking van de kerndeeltjes proton en neutron staat op naam van Rutherford. Twee van zijn medewerkers, Geiger en Marsden [13] schoten in 1909 met alfa deeltjes (dat zijn Helium kernen, maar dat wisten zij nog niet) op een metalen trefplaatje en ontdekten dat de meeste alfa deeltjes rechtdoor vliegen, alsof het materiaal grotendeels uit niets bestaat, maar dat soms deeltjes



Figuur 6.1: *Rutherford verstrooiingsexperiment.* In de linker afbeelding is geïllustreerd hoe een bundel van alfa deeltjes uit een radioactieve bron op een trefplaatje wordt geschoten. Rond het trefplaatje staat een scherm van zinksulfide dat oplicht als er een alfa deeltje op botst. Door te kijken waar het scherm oplicht kan de verstrooiingshoek worden gemeten. In de middelste afbeelding staat een illustratie van het idee hoe goudatomen in het folie zijn gestapeld volgens het oude atoommodel. Omdat de meeste alfa deeltjes rechtdoor gaan heeft ieder goudatoom kennelijk een hele luchtige (in dit geval is vacuüm-achtige een beter woord) structuur. In de rechter afbeelding staat schematisch een atoom in de visie van Rutherford. Af en toe botst er een alfa deeltje op een atoomkern en verstrooit dan onder een grote hoek. De meeste alfa deeltjes vliegen door de elektronenwolk rond de kern en worden niet of nauwelijks afgebogen.

over een hele grote hoek worden afgebogen, alsof er harde pitjes in het verder vrijwel afwezige materiaal zitten. Rutherford verklaarde dit gedrag door atomen voor te stellen als een kleine kern die positief is geladen met daaromheen op een luchtige manier de elektronen [14]. Een illustratie van het befaamde “Rutherford experiment” is gegeven in figuur 6.1. In 1919 laat Rutherford door verstrooiing aan waterstof atomen het bestaan van het proton zien [15].

Het neutron werd kort daarna door Rutherford in 1920 voorspeld [16], maar pas in 1932 door Chadwick ontdekt [17]. Chadwick was op het idee van zijn experiment gekomen door een observatie van Bothe en het echtpaar Joliot-Curie, die beiden vreemde effecten zagen als een Beryllium trefplaatje door alfa straling werd gebombardeerd. Chadwick deed zijn eigen experiment dat bestond uit het bombarderen van Beryllium met alfa deeltjes, waarna hij neutrale straling zag. Vervolgens plaatste hij verschillende tweede doelen na het trefplaatje gevolgd door een ionisatie teller. Op die manier vond hij dat de neutrale straling in het tweede doel protonen uit het materiaal sloeg. Zijn redenering was dat de neutrale deeltjes die uit het Beryllium plaatje komen geen fotonen kunnen zijn, maar een massa moeten hebben die vergelijkbaar is met die van het proton.

Het bestaan van het neutrino is gededuceerd uit radioactief bèta verval. Een mogelijke reactie in bèta verval is een neutron dat in een proton en een elektron vervalt. Dat wil zeggen dat als eindproducten van dit verval alleen het proton en het elektron worden gezien. Hier zijn twee problemen mee. Als het neutron, het proton en het elektron allen spin  $1/2$  deeltjes zijn kan in deze reactie de draai-impuls of de spin niet behouden zijn. Draai-impuls van deeltjes om elkaar kan wel het verdwijnen of verschijnen van spin compenseren, maar die ruimtelijke draai-impuls bestaat alleen maar in eenheden van 1. In het bèta verval is duidelijk een spin  $1/2$  verschil. Een tweede observatie is dat het energiespectrum van het elektron uit bèta verval niet scherp is bepaald zoals uit een twee deeltjesreactie verwacht kan worden, maar een verdeling volgt met een moeilijk te bepalen eindpunt waar de verdeling uitdooft. In 1930 stelde Pauli een extra elektrisch neutraal deeltje voor dat in het bèta verval wordt geproduceerd. Dit moet dan een spin  $1/2$  deeltje zijn, elektrisch neutraal zijn, en het moet bijna geen interactie met materiaal hebben, anders was het wel waargenomen. In 1933 formaliseerde Fermi het bèta verval als het verval van een neutron in een proton, een elektron en een neutrino, zoals hij het nieuwe deeltje voor de eerste keer noemde. Het neutrino<sup>1</sup> werd uiteindelijk door detectie aangetoond in 1955 door Reines en Cowan en medewerkers in een experiment bij de kernreactor van Savannah River [18]. Zij toonden de inverse bèta vervalsreactie aan, waarbij een anti-neutrino op een proton botst en daarbij een neutron en een positron maakt.

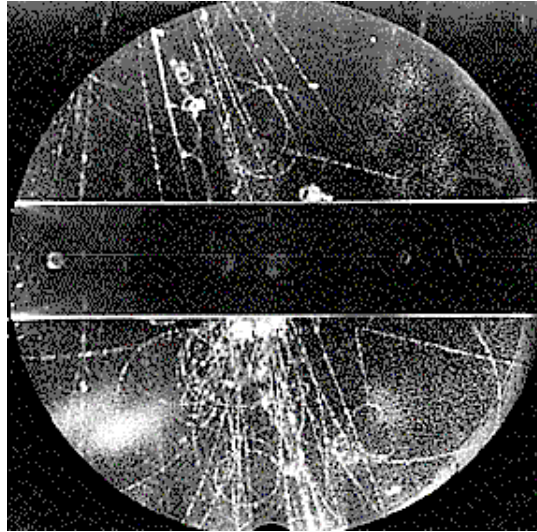
Het proton, neutron en elektron zijn in feite alles wat nodig is om de samenstelling van het periodiek systeem der elementen te verklaren. De toevoeging van het neutrino was alleen maar nodig om het zwakke radioactieve bètaverval te kunnen beschrijven.

De andere twee kolommen van deeltjes zijn dan ook een verrassing, zeker op het moment dat die deeltjes werden ontdekt. Het eerste deeltje dat is ontdekt uit de tweede kolom is het muon in kosmische stralingsexperimenten door Street en Stevenson [19]. Dit gebeurde in de analyse van nevelkamer foto's.

Later werd het tweede deeltje uit de tweede kolom ontdekt, het s-quark. Deeltjes die een s-quark bevatten vielen op in experimenten doordat er kennelijk deeltjes waren die makkelijk te produceren waren (wat duidt op productie met de sterke kernkracht) en die heel langzaam vervallen (wat duidt op verval door middel van de zwakke kernkracht.) Deze deeltjes, ontdekt door Rochester en Butler werden in het begin "V particles" genoemd [20] en later "vreemd", in het Engels "strange", vandaar het symbool s voor deze quarks. In het volgende hoofdstuk zullen we uitgebreid terugkomen op deze vreemde deeltjes, waarvan kaonen voorbeelden zijn. Een van de platen die aanleiding gaf tot de ontdekking van vreemde

---

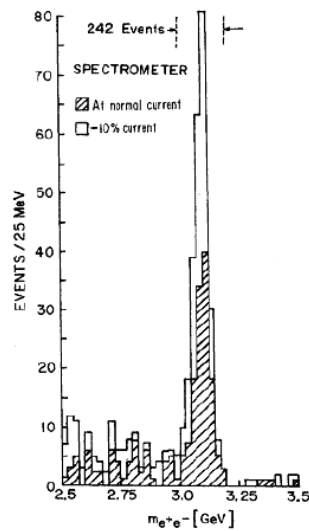
<sup>1</sup>Door sommigen wordt het neutrino ook wel vampierdeeltje genoemd. Het neutrino heeft namelijk geen spiegelbeeld.



Figuur 6.2: Afbeelding van de detectie van een vreemd meson. Dit deeltje is rechts onder de middenplaat in de detector te zien als een grote omgekeerde V. Het neutrale deeltje dat in twee geladen deeltjes vervalst is kennelijk een stuk boven de plaat geproduceerd in de interactie waaruit meerdere sporen komen. De vervalslengte is dus aanzienlijk.

deeltjes, deeltjes met  $s$  quarks, is te zien in Fig. 6.2. Het vreemde gedrag van deze deeltjes, die kennelijk makkelijk worden geproduceerd en slechts moeizaam vervallen is in 1952/1953 verklaard door Pais [21] en Gell-MannMurray Gell-Mann, die de hypothese van de paarproductie opperde. Hierbij worden vreemde deeltjes in paren van deeltje en anti-deeltje in de sterke interactie gemaakt, terwijl ze, eenmaal uit elkaar gevlogen, alleen maar via de zwakke wisselwerking in lichtere hadronen kunnen vervallen.

Het muon neutrino is ontdekt, of in ieder geval voor het eerst waargenomen, in 1962 door Lederman, Steinberger en Schwartz [22]. Dit gebeurde in een experiment aan de Brookhaven Alternate Gradient Synchrotron, een versneller die protonen versnelde tot 15 GeV. De protonen werden vervolgens op een Beryllium trefplaatje geschoten. In de botsing van een proton op een Beryllium kern worden onder andere pionen en kaonen gevormd. De pionen vervallen dominant in een muon en een muon-neutrino. De vervals producten werden op een ijzeren muur van 13.5 m gestuurd, met achter de muur het eigenlijke experiment. De ijzeren muur absorbeerde alle deeltjes die werden geproduceerd, behalve de neutrino's. Om vervolgens een beetje kans te hebben dat er af en toe een neutrino in het experiment een reactie aangaat is een detector nodig met veel materiaal. In dit geval was dat een 10 ton aluminium vonkenvat. In een vonkenvat veroorzaken



Figuur 6.3: *Invariant mass spectrum van muon paren van tegengestelde lading in het experiment van Ting et al. De scherpe piek bij 3.1 GeV wijst op een nieuw deeltje, de  $J/\psi$ .*

geladen deeltjes vonken als ze door het gas gaan tussen de metalen platen, omdat de metalen platen op een dusdanig hoge spanning ten opzichte van elkaar staan dat ze net geen elektrische doorslag geven. Vliegt er een geladen deeltje door het gas die het gas een beetje ioniseert dan is het meteen raak met een flinke doorslag en een vonk. Af en toe gaat een muon-neutrino in de detector een reactie aan waarbij een muon wordt gevormd. Dit muon heeft dan weer de speciale eigenschap dat het in de zware detector een lang spoor maakt en niet snel door het materiaal wordt gestopt. Alle andere geladen deeltjes worden al na korte afstand door de zware detector geabsorbeerd. Het verschijnen van de muonen toonde aan dat het in dit geval om muon-neutrino's ging en niet om andere zwak wisselwerkende neutrale deeltjes.

De tweede kolom wordt gecompleteerd door de ontdekking van het c-quark. Het c-quark is ontdekt door de detectie van het  $J/\psi$  deeltje, onafhankelijk in twee verschillende experimenten door Richter [23] en Ting [24] in 1974. Het  $J/\psi$  deeltje bevat een c- en een  $\bar{c}$ -quark en vervalt relatief langzaam in bijvoorbeeld elektron-positron paren en muon paren van tegengestelde lading. In Fig. 6.3 is de invariante massa te zien van muon paren met tegengestelde lading in het experiment met botsende hadronen van Ting. Aan de andere kant is de productie in botsingen tussen elektronen en positronen zeer abundant, als die precies botsen met de energie die nodig is om een  $J/\psi$  te maken. Het c-quark werd al voorspeld door Glashow, Iliopoulos en Maiani. Deze voorspelling staat bekend als het GIM

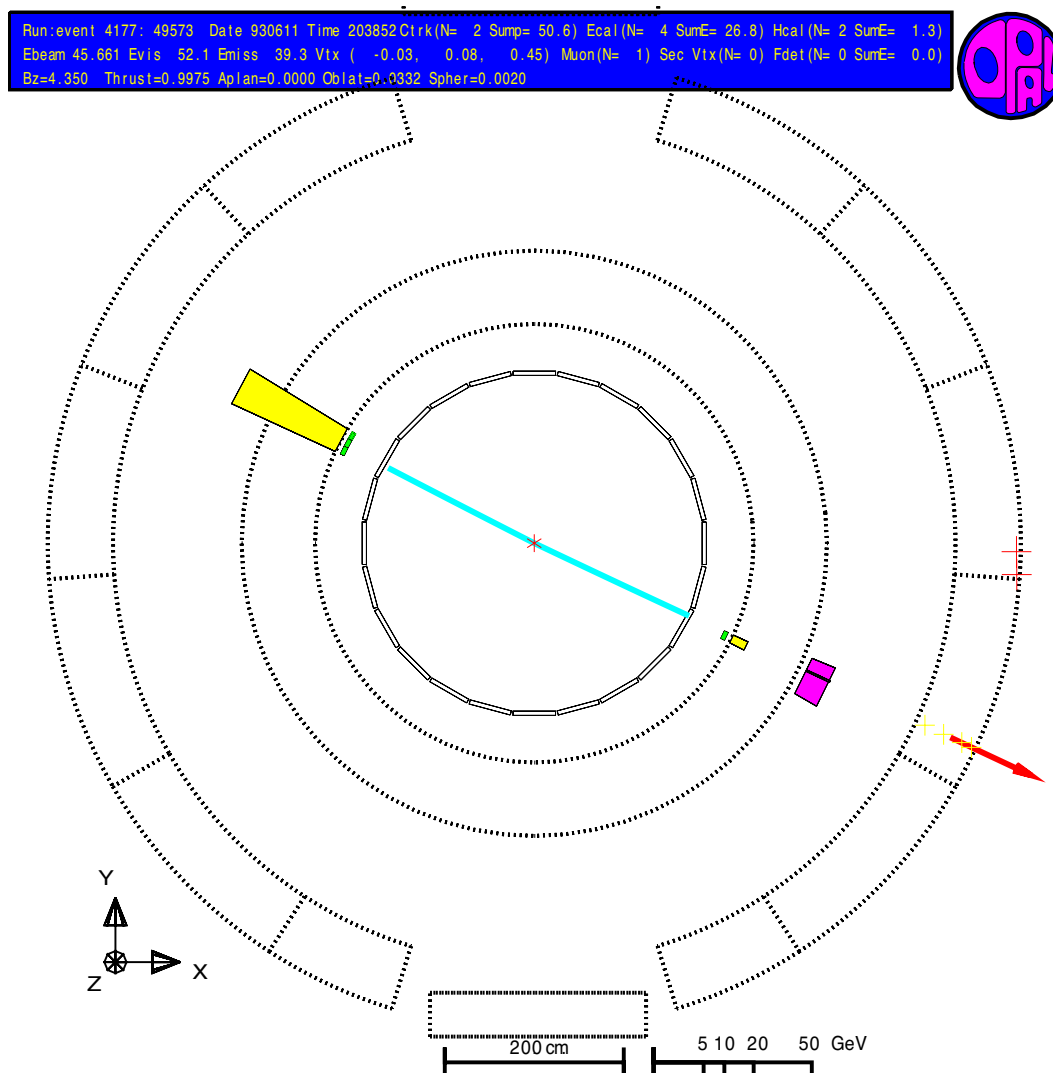


mechanisme [25]. De voorspelling komt erop neer dat op dat moment de structuur van de zwakke wisselwerking werd doorzien en dat in het schema van tabel 6.1 er dan een lege plek is boven het s-quark die ingevuld moet worden om de tabel mooi symmetrisch te maken.

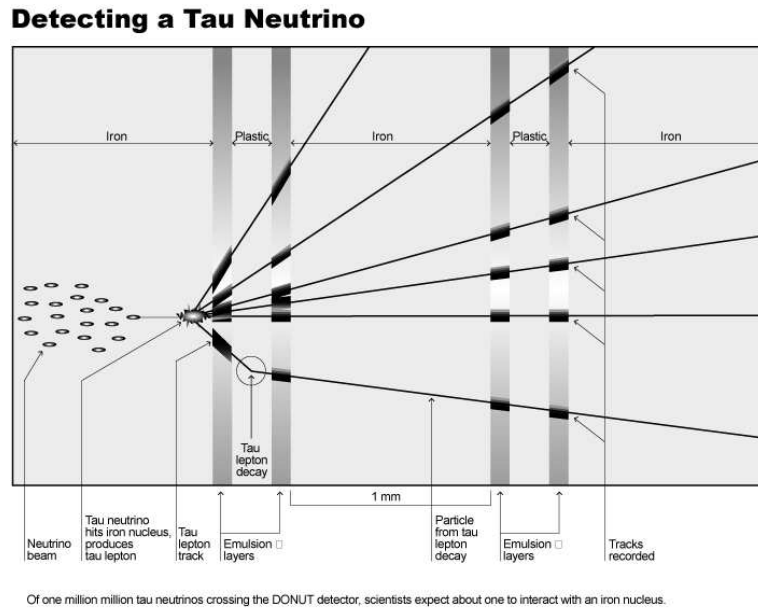
Het vinden van deeltjes in de derde kolom in tabel 6.1 was wederom een verrassing. Het begon weer met het geladen lepton, in dit geval het  $\tau$ -lepton. Dat is in 1974 ontdekt door Perl in hetzelfde experiment waarin ook door Richter het  $J/\psi$  deeltje was ontdekt [26]. In dit geval waren er paren van een elektron (of positron) en een muon van tegengestelde lading in de eindtoestand. Omdat een elektron en een muon niet in een paar kunnen worden geproduceerd duidde dat op de productie van een deeltjespaar dat zowel in een elektron als in een muon kan vervallen. Omdat bekend was dat een muon in een elektron kan vervallen (zij het na een relatief lange levensduur, zodat dat vrijwel altijd buiten de detector gebeurt) lag het voor de hand om een nieuw, zwaarder lepton in te voeren dat zowel naar een muon als naar een elektron kan vervallen. Dit lepton werd het  $\tau$ -lepton genoemd. Het  $\tau$ -lepton heeft een massa die niet te veel verschilt van die van het c-quark, hetgeen verklaart dat hetzelfde experiment deze twee formidabele ontdekkingen kon doen in een zeer korte tijdspanne. Een voorbeeld van zo'n spectaculair geval met alleen een elektron en een muon in de eindtoestand bij een van de LEP experimenten is gegeven in Fig. 6.4.

Tegen die tijd had men wel in de gaten dat bij elk lepton zijn eigen neutrino hoort. Het heeft echter tot 2001 geduurd voordat het tau-neutrino ook daadwerkelijk is gedetecteerd door de DONUT collaboratie [27]. Het principe van de detectie van het tau neutrino is weergegeven in Fig. 6.5. In een neutrino bundel zitten over het algemeen ook een aantal tau-neutrino's (omdat er ook tau-leptonen worden gemaakt in hoge energie botsingen.) Een tau-neutrino heeft slechts zelden een interactie met materiaal. Als het een reactie heeft is de kans groot dat er een geladen tau-lepton wordt gevormd. Tau-neutrino's zijn de enige bron voor de vorming van tau-leptonen in neutrino bundels, dus als er een tau-lepton wordt gevonden wijst dat met een zekerheid grenzende waarschijnlijkheid op een inkomend tau-neutrino. De geladen tau-leptonen worden herkend aan het feit dat ze binnen enkele millimeters vervallen, normaal gesproken in één geladen spoor (en twee onzichtbare neutrino's.) Door nu te zoeken naar sporen met de voor dit verval karakteristieke knik, zoals te zien is in het onderste spoor van Fig. 6.5, kunnen geladen tau-leptonen worden opgespoord. Het DONUT experiment is het eerste (en tot nu toe enige) geweest dat dit soort gevallen heeft geregistreerd.

Op dezelfde manier als waarop het  $J/\psi$  deeltje is ontdekt is een zwaardere resonantie met vergelijkbare eigenschappen ontdekt die bekend staat als de  $\Upsilon$  [28]. Dit deeltje, ontdekt in een experiment geleid door Lederman op Fermilab, bleek te bestaan uit een  $b\bar{b}$  toestand, precies zoals een  $J/\psi$  uit een  $c\bar{c}$  toestand bestaat.



Figuur 6.4: *Productie van een tau paar in elektron-positron annihilatie. In dit geval is de invariante massa zo hoog dat een Z boson wordt gevormd dat in een tau paar vervalt. De tau's vervallen vervolgens de ene in een elektron en neutrino's en de andere in een muon plus neutrino's. Het elektron is herkenbaar aan de grote blob aan de linkerkant, een representatie van een grote elektromagnetische energie depositie in de calorimeter. Het spoor ernaar toe zegt dat het om een geladen deeltje gaat. Het muon is herkenbaar aan het feit dat het zowel in de binnenste detector een spoor vormt als in de buitenste detectoren aan de rechterkant, aangegeven met de pijl. Dit duidt op een deeltje dat moeiteloos door veel materie gaat maar wel geladen is, ergo het muon. Dit geval is opgenomen met de OPAL detector bij LEP.*



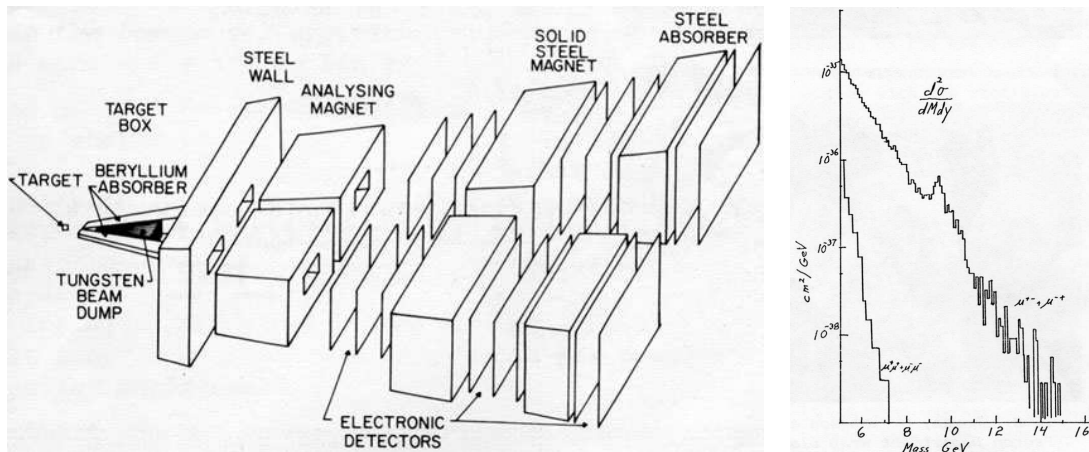
Figuur 6.5: *Het principe van detectie van het tau neutrino in de DONUT detector op Fermilab. Let op het onderste spoor door de detector. Dit heeft een “knik” na de eerste detectie laag. Dit wijst op een tau-lepton verval.*

Het experiment waarin dat gebeurde staat schematisch weergegeven in Fig. 6.6.

Ook was na de ontdekking van het b-quark, gebruikmakend van het GIM argument, duidelijk dat er een t-quark moest zijn. Dit quark blijkt echter onwaarschijnlijk zwaar en had een hele hoge energie versneller nodig, het Tevatron, om het te produceren. Uiteindelijk is het top quark ontdekt door de CDF en DØ experimenten bij het Tevatron [29].

Kortom we hebben alle fermionen van het Standaard Model zoals ze vermeld staan in tabel 6.1 daadwerkelijk waargenomen.

Maar wat zou erop tegen zijn om nog meer kolommen toe te voegen met meer herhalingen van deeltjes bij hogere massa's? Daar zijn twee argumenten op tegen. De neutrino's zijn allemaal erg licht. Het ligt dan ook voor de hand te veronderstellen dat een volgende generatie fermionen ook een relatief licht neutrino zou hebben. Een extra neutrino is echter experimenteel uitgesloten door het zeer nauwkeurig gemeten verval van het Z-boson (we komen zo dadelijk op het Z-boson terug.) Deze meting sluit een extra neutrino met een massa van minder dan 45 GeV uit. Een tweede argument gaat juist om het zwaarste deeltje. Een volgende generatie fermionen zou dan ook redelijkerwijs een quark analoog aan het top-quark moeten hebben dat een grotere massa heeft dan het top quark.



Figuur 6.6: Links het experiment E288 op Fermilab dat het  $\Upsilon$  deeltje heeft ontdekt en daarmee het  $b$ -quark. Rechts de originele grafiek waarop de piek is te zien in het invariante massaspectrum van muon-paren van tegengestelde lading bij ongeveer 9.5 GeV, de massa van de  $\Upsilon$ .

Echter een fermion met een hogere massa dan het top quark stuit op theoretische bezwaren. De koppeling aan het Higgs boson wordt dan zo sterk (omdat die massa-afhankelijk is) dat behoud van waarschijnlijkheid wordt geschonden in de theorie van het Standaard Model. We komen hier op terug. Het lijkt er dus heel sterk op dat we precies drie generaties fermionen, ook wel families genoemd, als elementaire deeltjes hebben.

## Wisselwerkingen

Wisselwerking, of kracht tussen de deeltjes wordt veroorzaakt door uitwisseling van zogenaamde ijkbosonen. In de volgende hoofdstukken volgt een uiteenzetting over ijktheorie en wordt de relatie gelegd tussen symmetrie tussen elementaire deeltjes en krachten. Voor de volledigheid noemen we hier de verschillende krachtdeeltjes en zeggen we iets over de experimentele ontdekking er van. De verschillende

$\gamma$  Het foton. dit is het quantum dat hoort bij de elektromagnetische kracht. Het foton koppelt aan deeltjes met een elektrische lading en wel met een sterkte proportioneel aan die lading.

$Z^0$  Een veel zwaardere versie van het foton. Dit deeltje heeft een massa van 91 GeV. Het gedraagt zich in een aantal opzichten net als het foton. Maar er zijn ook verschillen. Zo koppelt het  $Z^0$  wel aan het neutrino en het foton

niet. Het  $Z^0$  deeltje is het elektrisch neutrale quantum van de zwakke kernkracht. Het koppelt met een sterkte die afhangt van zowel het quantumgetal  $T_3$  uit Tabel 6.1 als van de elektrische lading van de fermionen waaraan het koppelt. Er zijn ook geladen quanta van de zwakke kernkracht, de  $W^\pm$  deeltjes.

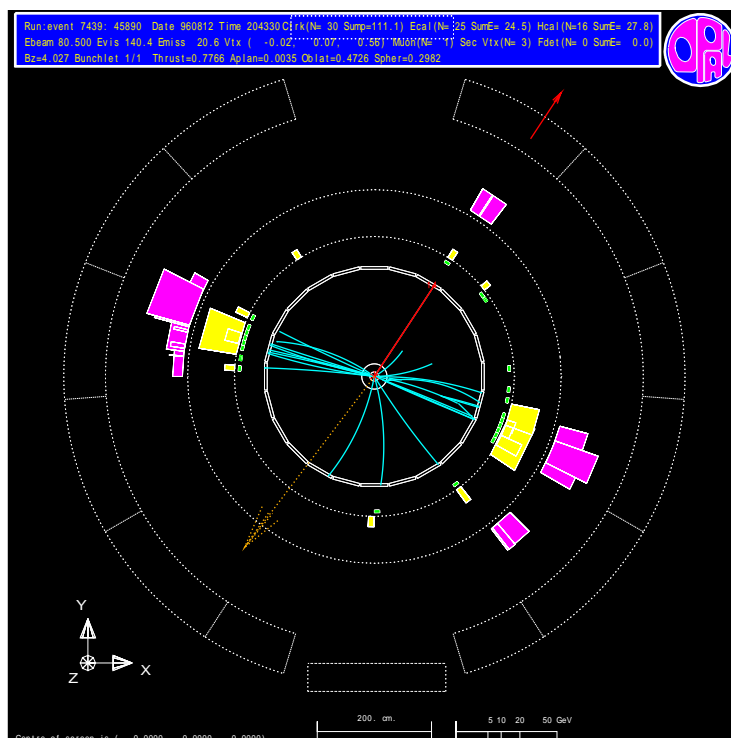
$W^\pm$  De W-bosonen. Hiervan is een positief en een negatief geladen exemplaar. Deze bosonen zorgen ervoor dat u-quarks in d-quarks kunnen veranderen, elektronen in elektron-neutrino's en ook omgekeerd. Dit quantum wordt bijvoorbeeld uitgewisseld in het geval van een radioactief bèta verval. Het W-boson koppelt aan alle elementaire fermionen met dezelfde sterkte. Het W-boson heeft ook een grote massa van ongeveer 80 GeV.

g Het gluon is het quantum van de sterke kernkracht, de kracht die quarks opgesloten houdt in mesonen en baryonen en die in afgeleide vorm ook de protonen en neutronen in atoomkernen bij elkaar houdt. Het gluon koppelt aan alle quarks even sterk en het gluon koppelt ook aan andere gluonen en dat zelfs sterker dan aan quarks. Gluonen komen voor in acht verschillende soorten (kleurencombinaties).

Zoals te zien is hebben de W-bosonen ook elektrische lading. Dat betekent dat ze ook aan het foton koppelen, ze hebben immers elektromagnetische interactie. Het blijkt dat de W- en Z-bosonen ook aan elkaar koppelen. Omdat de W- en Z-bosonen zo'n grote massa hebben, is het effect van die koppelingen onderling bij de energieën waarbij we nu experimenteren nog gering. Het Z-boson kan makkelijk worden gemaakt in  $e^+e^-$  botsingen bij hoge energie. Als de invariante massa van de botsing precies de massa van het Z-boson is, wordt het resonant geproduceerd met een grote werkzame doorsnede. De meting van de werkzame doorsnede voor elektron-positron botsingen is te zien in Fig. 6.8. W-bosonen zijn in  $e^+e^-$  annihilatie bij nog hogere energieën te produceren. Een voorbeeld van een geval waarin twee W-bosonen zijn geproduceerd staat in Fig. 6.7.

Het bestaan van gluonen is aangetoond in elektron-positron verstrooiing, waarbij drie deeltjes-jets in de eindtoestand worden geproduceerd. Een voorbeeld van een drie-jet geval wordt gegeven in Fig. 6.9. Deze gevallen zijn niet te verklaren met een eindtoestand met alleen maar quarks, omdat de begintoestand geen quarks bevat en de eindtoestand dus noodzakelijk een even aantal quarks plus anti-quark moet bevatten. Het derde deeltje dat dan een jet veroorzaakt, en dus kennelijk sterke interacties heeft maar geen quark is, moet dan wel het gluon zijn. Vergelijkingen van hoekverdelingen en differentiële werkzame doorsnede bevestigen deze verklaring.

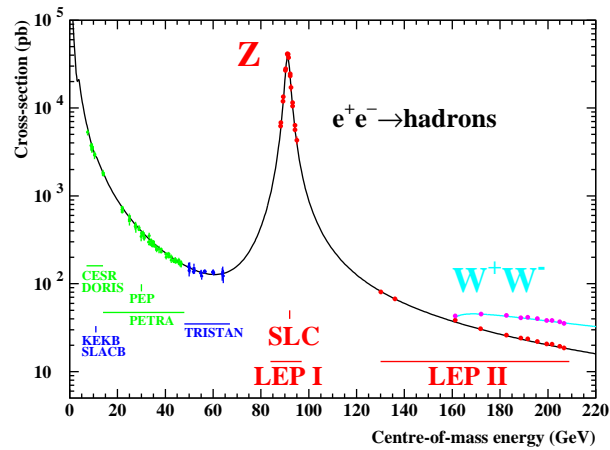
De ijkbosonen (krachtdeeltjes) van het Standaard Model zijn samengevat in tabel 6.2.



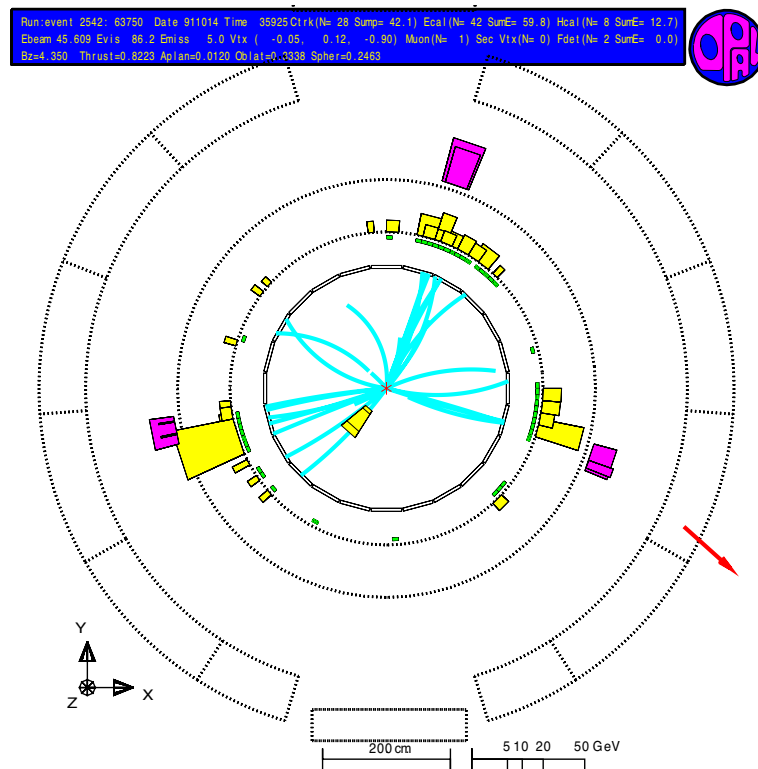
Figuur 6.7: Detectie van een  $W^+W^-$  paar. Het ene  $W$ -boson vervalt in een muon (te zien als de rode pijl rechts boven) en een neutrino (gedetecteerd door de missende impuls die met de stippellijn links onder staat aangegeven.) Het andere  $W$ -boson vervalt in een quark-anti-quark paar die zichtbaar worden als twee stromen deeltjes naar links en naar rechts in de figuur. Uit de invariante massa van het quark paar is de massa van het  $W$ -boson te meten, die ongeveer 80 GeV blijkt te zijn. Dit geval is geregistreerd door de OPAL detector bij LEP.

$\gamma$	Electromagnetische kracht	} Electrozwakke kracht
$Z^0$ $W^\pm$	} Zwakke kernkracht	
$g^a (a = 1..8)$		} Sterke kernkracht

Tabel 6.2: De krachtdeeltjes (ijkbosonen) van het Standaard Model.



Figuur 6.8: *Werkzame doorsnede van elektron-positron botsingen als functie van de invariante massa. Duidelijk is de grote piek te zien bij 91 GeV, de productie van Z-bosonen.*



Figuur 6.9: *Productie van een eindtoestand met drie jets in  $e^+e^-$  verstrooiing, zoals gezien in de OPAL detector bij LEP. De enige mogelijke verklaring van zo'n geval is dat ten minste één van de jets door een gluon is veroorzaakt.*

Om de massa's correct te krijgen in het Standaard Model is het Higgs mechanisme nodig, waaruit nog een extra deeltje tevoorschijn komt, het Higgs boson, een spin 0 deeltje dat aan alle deeltjes met massa koppelt. We gaan hier niet verder op in.

## Mesonen, baryonen en andere sterke verhalen

Zoals we hierboven hebben gezien heeft de sterke interactie maar liefst acht ijk-bosonen die kunnen worden uitgewisseld. De sterke interactie heet bovendien “sterk” omdat de koppeling tussen quarks en gluonen sterk is, dat wil zeggen dat de waarschijnlijkheid van een interactie groot is. Daar komt nog bovenop dat de gluonen ook zelf kleurlading hebben en dus interactie met elkaar hebben. Het gevolg van dit alles is dat de kracht tussen quarks zeer groot is. Door de zelfinteractie van de gluonen neemt de kracht tussen twee objecten (bijvoorbeeld quarks, gluonen of groepjes van quarks en gluonen) zelfs lineair toe als de afstand tussen de kleurladingen groter wordt gemaakt. Het gevolg is dat quarks niet vrij in de natuur voorkomen, maar slechts in groepjes die samen kleur neutraal zijn. Kleur neutraal, of in vakjargon kleursinglet, zijn bijvoorbeeld een kleur samen met dezelfde anti-kleur. Een ander voorbeeld van een kleur neutraal object is het voorkomen van alle kleuren of alle anti-kleuren in gelijke hoeveelheid. Dus bijvoorbeeld drie quarks in een groepje, waarvan één rood is, één groen en één blauw. Vergelijk dit effect met een televisie waarbij als de kleuren rood, groen en blauw in gelijke mate voorkomen wit wordt gevormd.

Uit het feit dat er in de natuur alleen stabiele kleur neutrale combinaties voor kunnen komen is te verklaren dat we twee soorten hadronische deeltjes hebben, dat wil zeggen deeltjes die uit quarks zijn opgebouwd.<sup>2</sup> Mesonen bestaan uit een quark en een anti-quark. Voorbeelden van mesonen zijn pionen, die bestaan uit een  $u\bar{d}$  voor een  $\pi^+$ , en een  $\bar{u}d$  voor een  $\pi^-$ . Het neutrale pion bestaat uit een lineaire combinatie van  $u\bar{u}$  en  $d\bar{d}$ , namelijk  $\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} - u\bar{u})$ . Dit laatste is het gevolg van het feit dat combinaties als  $u\bar{u}$  en  $d\bar{d}$  dezelfde quantumgetallen hebben en dus interfereren. Natuurlijk is ook de andere onafhankelijke lineaire combinatie te maken,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} + u\bar{u})$ , en dit is het  $\eta$  deeltje.

Het tweede soort hadronen dat we hebben zijn combinaties van drie quarks, zoals bijvoorbeeld het proton dat bestaat uit  $uud$ , of het neutron dat bestaat uit  $udd$ . Deze combinaties worden baryonen genoemd.

Natuurlijk zijn er met de quarks uit de andere families c,s,b,t nog veel meer combinaties te maken. Zoals bijvoorbeeld het vreemde meson  $K^+$ , dat bestaat

---

<sup>2</sup>Dat wil zeggen tot op eerste orde. Inmiddels zijn er ook combinaties gevonden van vier quarks en een anti-quark, samen ook weer kleur neutraal, de zogenaamde penta-quarks.



uit  $u\bar{s}$  en zijn antideeltje  $K^-$  dat bestaat uit  $\bar{u}s$ .

Daarnaast kunnen de mesonen en baryonen, omdat het samengestelde deeltjes zijn, nog in allerlei aangeslagen toestanden voorkomen. Deeltjes die corresponderen met dergelijke aangeslagen toestanden worden vaak aangegeven met een ster, bijvoorbeeld  $K^*$ . In moderne notatie wordt vaak de naam van het deeltjes in de grondtoestand gebruikt met daarachter een massa in MeV. Hogere aangeslagen toestanden impliceren grotere massa's.

Het feit dat we in het voorgaande jets, of stromen van deeltjes, in gevallen zagen waarin quarks en gluonen worden gemaakt is ook te verklaren uit het gedrag van de sterke wisselwerking. Een succesvol model daarvoor is het zogenaamde Lund model. Dit model gaat uit van een lineaire toename van de energie die is opgeslagen in het kleurveld tussen twee quarks als de afstand tussen de quarks groter wordt. Als de quarks nu uit elkaar bewegen zal die energie zo groot worden dat het voordeliger is een deel van die energie te laten materialiseren in nieuwe quarks. Daarbij wordt ervoor gezorgd dat de afstand tussen quark paren weer kleiner wordt. Door dit patroon iteratief te herhalen totdat de beschikbare energie niet meer genoeg is om nog meer nieuwe deeltjes te creëren ontstaat een stroom van quarks. Deze zullen dan combineren tot kleur neutrale sets van quark en anti-quark of quark triplets. De aldus ontstane combinaties van quarks zijn de hadronen die we in de detector zien.



# Hoofdstuk 7

## IJktheorie: electromagnetisme

### Het Euler Lagrange formalisme

In het voorgaande hebben we gezien dat we deeltjes kunnen beschrijven met golffuncties, die aan bewegingsvergelijkingen voldoen. In het bijzonder hebben we gezien dat we fermionen, spin 1/2 deeltjes, in relativistische quantummechanica kunnen beschrijven met oplossingen van de Dirac vergelijking:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \quad (7.1)$$

In deze beschrijving hebben deze fermionen geen interactie en zijn dus vrije deeltjes.

Nu blijkt dat we deze vergelijking op een hoger abstratieniveau kunnen herformuleren. Daartoe voeren we een functie in die de Lagrangiaan heet, naar Lagrange die deze theorie voor het eerst op de klassieke mechanica toepaste. De Lagrangiaan is een functie van de golffuncties, of preciezer de velden,<sup>1</sup> van de theorie, en geeft een energiedichtheid, dus een hoeveelheid energie als functie van de plaats. De Lagrangiaan kan ook afhangen van de afgeleiden van de velden naar de tijd en de plaats, dus:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi). \quad (7.2)$$

De integraal van de Lagrangiaan over de ruimte geeft dan een totale energie die nodig is om van het ene punt in de tijd-ruimte,  $A$ , naar het andere,  $B$ , te komen, die we de actie noemen:

$$I = \int_A^B \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) d^4x. \quad (7.3)$$

---

<sup>1</sup>Een veld is per definitie een functie van ruimte en tijd die op elk punt in de tijd-ruimte een waarde aanneemt. Voor een scalar veld is dat een getalsmatige waarde, maar voor bijvoorbeeld een vectorveld wordt in elk punt van de ruimte-tijd een vector met meer componenten gedefinieerd.

Het principe om de evolutie van het systeem van velden te vinden is nu dat de actie stationair moet zijn, dat wil zeggen dat de actie tot op eerste orde niet moet veranderen als de velden een heel klein beetje veranderen. Als de velden veranderen met een beetje  $\delta\psi$ ,<sup>2</sup> dan verandert de actie als:

$$\delta I = \int_A^B \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} \delta \psi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \psi} \delta(\partial_\mu \psi) \right) d^4x. \quad (7.4)$$

Met partiële integratie van de tweede term is dat te schrijven als:

$$\delta I = \int_A^B \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} \delta \psi - \partial_\mu \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \psi} \right) \delta \psi \right) d^4x. \quad (7.5)$$

Als dit voor alle veranderingen van het veld  $\delta\psi$  nul moet opleveren dan kan dat alleen als geldt:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} - \partial_\mu \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \psi} \right) = 0 \quad (7.6)$$

Deze vergelijking heet de Euler-Lagrange vergelijking. Als de Lagrangiaan afhangt van meerdere velden, dan kunnen we voor elk veld afzonderlijk de redenering van de stationaire actie ophangen en dus voor elk veld afzonderlijk de Euler-Lagrange vergelijkingen afleiden.

Om nu heel praktisch te worden kunnen we de volgende Lagrangiaan kiezen:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (7.7)$$

Als we de Euler-Lagrange vergelijkingen toepassen op het veld  $\bar{\psi}$  dan krijgen we:

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0. \quad (7.8)$$

Dit is precies de Dirac vergelijking. Dus in plaats van de Dirac vergelijking op te schrijven kunnen we ook de bijbehorende Lagrangiaan opschrijven en eisen dat de actie stationair is. Een equivalente formulering dus.<sup>3</sup>

---

<sup>2</sup>Het symbool  $\delta$  wordt hier gebruikt om een klein beetje van een veld aan te geven. Het veld hangt op zijn beurt af van de coördinaten van de ruimte, maar we variëren hier alleen het veld zelf en niet de afhankelijkheid van de tijd- en plaatscoördinaten. De Lagrangiaan hangt dus af van functies van tijd en ruimte en wordt ook wel functionaal genoemd. Het symbool  $\delta$  wordt raditiegetrouw gebruikt voor de functionele afgeleide, dus de afgeleide van een functionaal naar een van de functies waar die vanaf hangt.

<sup>3</sup>In het Lagrange formalisme zoals hier beschreven is er over het algemeen precies één pad dat met een stationaire oplossing voor het pad van  $A$  naar  $B$  leidt. Het Lagrange formalisme is nu uit te breiden door alle paden van  $A$  naar  $B$  te beschouwen, allemaal gewogen met een fase. Dit formalisme heet het pad-integraal formalisme en staat beschreven, zonder formules, in het boek QED van Feynman.

De vraag dringt zich nu op wat we er mee opschieten om de theorie als een Lagrangiaan te formuleren. Behalve een aantal principiële voordelen, waar ik hier niet op in ga, heeft deze benadering ook aan aantal praktische voordelen. Een belangrijk praktische voordeel is dat we heel algemeen theoriën kunnen opschrijven en dan ontdekken dat de mogelijkheden in feite heel beperkt zijn. De actie moet een reeel getal zijn. Daaruit volgt dat de Lagrangiaan ook reeelwaardig moet zijn. Omdat de actie ook geen dimensie heeft, moet de dimensie van de Lagrangiaan wel de dimensie van het tijd-ruimte volume in de integraal compenseren. Dat kan alleen maar als de Lagrangiaan een energiedimensie van 4 heeft. De velden voor een fermion hebben als energiedimensie anderhalf ( $1^{1/2}$ ). De velden voor bosonen hebben energiedimensie 1. Verder blijkt het zo te zijn dat de theorie alleen renormaliseerbaar is als de energiedimensie van de constanten die voor de velden kunnen worden opgeschreven voor elke term in de Lagrangiaan groter of gelijk is aan nul. Dit geeft behoorlijk wat beperkingen op wat in een Lagrangiaan kan worden gezet. Nemen we bijvoorbeeld het fermionveld  $\psi$ , dan heeft  $\psi$  een spinorstructuur (heeft vier componenten) en om die op te heffen kunnen alleen maar termen voorkomen met een structuur  $\bar{\psi}\psi$ . Maar een term  $(\bar{\psi}\psi)^n$  met een macht  $n$  groter dan 1 kan niet, want dan wordt de energiedimensie van de term te groot. We mogen ook afgeleiden in de Lagrangiaan zetten, maar die moeten weer van de vorm  $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$  zijn, want  $\psi$  moet worden gecompenseerd door  $\bar{\psi}$  en de Lorentz-index van  $\partial_\mu$  door een ander object met een Lorentz-index waarmee wordt gecontraheerd. Omdat de afgeleide  $\partial_\mu$  energiedimensie 1 heeft kan de voorgestelde term nog net. Met andere woorden, voor spinoren is er weinig andere keuze dan:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (7.9)$$

waarbij  $m$  dan energiedimensie 1 moet hebben en inderdaad een massa blijkt te zijn. Laten we de tweede term weg dan krijgen we fermion zonder massa ( $m = 0$  kiezen heeft hetzelfde effect.)

Voor een boson veld  $\phi$  kunnen we dezelfde redenering volgen en de meest algemene Lagrangiaan die we voor een dergelijk veld kunnen opschrijven is:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^*\phi + \frac{1}{4}\lambda(\phi^*\phi)^2 \quad (7.10)$$

Als we nu  $\lambda = 0$  kiezen, dan krijgen we na toepassing van de Euler-Lagrange vergelijking op bijvoorbeeld  $\phi^*$ :

$$\partial^\mu\partial_\mu\phi + m^2\phi = 0, \quad (7.11)$$

precies de Klein-Gordon vergelijking voor een scalar deeltje. De term met  $\lambda$  zal ons later nog uitstekende diensten bewijzen.

## De stelling van Noether

De golffuncties, of velden, die met de deeltje corresponderen kunnen allerlei interne symmetrieën vertonen. De makkelijkste is de vermenigvuldiging met een complexe fase,  $e^{-ie\alpha}$ . Als we de golffunctie met een complexe fase vermenigvuldigen dan blijft de absolute waarde, de norm, van de golffunctie onveranderd en daarmee ook alle observabele gevolgen van de golffunctie. Dus een dergelijke complexe fase vermenigvuldiging is voor ons niet waar te nemen en de natuur moet dus invariant zijn voor een dergelijke transformatie. Het blijkt nu dat bij een dergelijke symmetrietransformatie altijd een behouden stroom hoort. Dit staat bekend als het theorema van Noether.

In het algemeen geldt dat als een veld onder een symmetrietransformatie verandert als:

$$\phi \rightarrow \hat{\phi} = \phi + \delta\alpha(x)T\phi(x), \quad (7.12)$$

waarbij  $T$  een symmetrie operator is op  $\phi$  en  $\delta\alpha$  de sterkte van de transformatie vertegenwoordigt. De Lagrangiaan verandert dan als:

$$\mathcal{L} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}(\hat{\phi}). \quad (7.13)$$

Als de actie stationair was voor  $\mathcal{L}$  dan moet die natuurlijk ook weer stationair zijn voor  $\hat{\mathcal{L}}$  als de natuur invariant is onder al dit gedoe. Dat geldt voor willekeurige  $\alpha$  als:

$$\delta I = \int_A^B \left( \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial(\delta\alpha)} - \partial_\mu \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu \delta\alpha)} \right) \delta\alpha \, d^4x = 0. \quad (7.14)$$

Vervolgens gaan we ervan uit dat de getransformeerde Lagrangiaan niet expliciet van  $\alpha$  af hangt. Dan moet gelden:

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial(\delta\alpha)} = 0 \quad (7.15)$$

Definiëren we een stroom  $j^\mu$  als:

$$j^\mu = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu \delta\alpha)}, \quad (7.16)$$

dan geldt vervolgens automatisch dat:

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (7.17)$$

Als we nu  $j^0$  als een ladingsdichtheid beschouwen en  $\vec{j} = (j^1, j^2, j^3)$  als een vectorstroom, dan zien we dat:

$$\frac{\partial j^0}{\partial ct} = \frac{\partial j^1}{\partial x} + \frac{\partial j^2}{\partial y} + \frac{\partial j^3}{\partial z}. \quad (7.18)$$

Dit kan worden gelezen als: een verandering van de ladingsdichtheid in de tijd voor een bepaald volumetje is gelijk aan de stroom die door het oppervlak van het volumetje stroomt. Dus deze lading kan wel verdwijnen of verschijnen, maar alleen door te gaan of te komen. Nemen we als volume de hele ruimte en nemen we aan dat er geen stroom loopt over het oneindige heen, dan geldt dat de totale lading in de hele ruimte niet van de tijd afhangt en dus constant is.

Als voorbeeld kunnen we kijken naar de Lagrangiaan voor het fermionveld en de complexe fase-transformatie. De complexe fase-transformatie op de golf-functie is:

$$\psi \rightarrow e^{-ie\alpha}\psi \quad \bar{\psi} \rightarrow e^{+ie\alpha}\bar{\psi}. \quad (7.19)$$

In dit geval wordt de getransformeerde Lagrangiaan gegeven door:

$$\hat{\mathcal{L}} = ie^{ie\alpha}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu(e^{-ie\alpha}\psi) - me^{ie\alpha}\bar{\psi}e^{-ie\alpha}\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha. \quad (7.20)$$

De behouden stroom wordt dan:

$$j^\mu = \frac{\partial\hat{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\mu\delta\alpha)} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (7.21)$$

De ladingsdichtheid correspondeert dan met  $j^0$ :

$$j^0 = e\bar{\psi}\gamma^0\psi = \begin{pmatrix} e (\bar{\psi}_{\text{deeltje}}\psi_{\text{deeltje}}) \\ -e (\bar{\psi}_{\text{anti-deeltje}}\psi_{\text{anti-deeltje}}) \end{pmatrix}, \quad (7.22)$$

waarbij de eerste twee componenten van de spinor met een deeltje (met mogelijk spin up of spin down) wordt geïdentificeerd en de onderste twee componenten van de spinor met het anti-deeltje. Het deeltje hebben we bij constructie een lading  $e$  gegeven, en het anti-deeltje krijgt dan noodzakelijk een lading  $-e$ . Als we  $e$  de elektrische lading nemen, dan volgt hier het behoud van elektrische stroom uit als die gedragen wordt door fermionen.

## Lokale U(1) invariantie

We kunnen nu de invariantie van de Lagrangiaan nog versterken door te eisen dat onder de transformatie uit het voorgaande stuk niet alleen de actie invariant blijft, maar zelfs de Lagrangiaan zelf. In dat geval moeten we van het extra stuk  $e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha$  in de getransformeerde Lagrangiaan af zien te komen.

Dit extra stuk komt voort uit het feit dat we de afgeleide nemen van het veld en de vermenigvuldiging van het veld met de  $e$ -macht een extra term in de afgeleide geeft. Dit kunnen we compenseren door de afgeleide te vervangen door de covariante afgeleide:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu. \quad (7.23)$$

In dat geval vervangen we de “gewone” afgeleide van het veld door de covariante afgeleide en kijken wat er gebeurt als we de golf functie transformeren volgens:

$$\psi \rightarrow \hat{\psi}(x) = e^{-ie\alpha(x)}\psi(x). \quad (7.24)$$

We krijgen dan:

$$\hat{D}_\mu \hat{\psi} = \partial_\mu (e^{-ie\alpha(x)}\psi(x)) + ie\hat{A}_\mu (e^{-ie\alpha(x)}\psi(x)) \quad (7.25)$$

$$= e^{-ie\alpha(x)} (\partial_\mu \psi(x) - ie(\partial_\mu \alpha(x))\psi(x) + ie\hat{A}_\mu (e^{-ie\alpha(x)}\psi(x))) \quad (7.26)$$

De globale  $e$ -macht kunnen we nu negeren, want die valt in de Lagrangiaan weg tegen die van  $\bar{\psi}$ . De term  $-ie(\partial_\mu \alpha(x))\psi(x)$  kunnen we weggrijpen als het nieuwe veld  $A$  transformeert als:

$$\hat{A}_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x). \quad (7.27)$$

De methode waarbij een globale symmetrietransformatie lokaal gemaakt wordt en vervolgens de theorie weer invariant gemaakt wordt door een hulpveld in te voeren heet ijktheorie. Het veld  $A$  heet een ijkveld. Het optellen van een volledige divergentie, dat wil zeggen de afgeleide van een scalar veld,  $\partial_\mu \alpha(x)$ , bij het veld  $A$  heet het (her)ijken van het veld  $A$ . De lokale, dus  $x$  afhankelijke, symmetrietransformatie van de golf functie wordt gecompenseerd door de ijktransformatie van het ijkveld. De vraag is nu natuurlijk hoe we dit veld  $A$  moeten interpreteren.

## Het electromagnetisch veld

Alle electromagnetische verschijnselen kunnen worden beschreven met een elektrisch veld  $\vec{E}$  en een magnetisch veld  $\vec{B}$ . Dit zijn vectorvelden, dat wil zeggen ze nemen drie waarden aan in elk punt van de ruimte en we kunnen ze zien als een drie-dimensionaal pijltje dat op elk punt van de ruimte kan worden getekend. De  $\vec{E}$  en  $\vec{B}$  velden moeten voldoen aan de Maxwell vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{x}} = \rho & \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial \vec{x}} = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right) \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} & \quad \left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right) \times \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \end{aligned} \quad (7.28)$$

Hierin zijn kortheidshalve de volgende notaties gebruikt:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial E_y}{\partial t} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (7.29)$$

en wat gecompliceerder is het gebruik van het uitwendig product, “ $\times$ ”:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \vec{x}}\right) \times \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (7.30)$$



De velden  $\vec{E}$  en  $\vec{B}$  kunnen uit deze vergelijkingen worden opgelost als de elektrische lading  $\rho(\vec{x})$  en de elektrische stroom  $\vec{j}(\vec{x})$  als functie van de plaats bekend zijn.<sup>4</sup> Uit de vergelijkingen zien we een zekere asymmetrie. In de linker vergelijkingen staan een elektrische lading en stroom. In de rechter vergelijkingen ontbreken dergelijke termen voor magnetische lading. Dit komt omdat nog nooit een magnetische monopool, dus alleen een geïsoleerde noord- of zuidpool, is gezien.

Het blijkt nu dat het elektrisch en magnetische veld samen maar vier onafhankelijke vrijheidsgraden hebben en dat we deze velden kunnen uitdrukken in een viervectorpotentiaal,  $A_\mu$ :<sup>5</sup>

$$\vec{E} = -\frac{\partial A_0}{\partial \vec{x}} - \frac{\vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \left( \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right) \times \vec{A}. \quad (7.31)$$

Met de verdere notatietruc:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (7.32)$$

en

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (7.33)$$

waarbij de totale anti-symmetrische tensor  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  gegeven wordt door:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \quad \text{als} \quad \text{niet alle indices ongelijk zijn}, \quad (7.34)$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 1 \quad \text{als} \quad \mu\nu\rho\sigma = 0123 \text{ en alle even permutaties hiervan}, \quad (7.35)$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -1 \quad \text{als} \quad \mu\nu\rho\sigma = 1023 \text{ en alle even permutaties hiervan}. \quad (7.36)$$

Een even permutatie van de indices wordt bereikt als de combinatie door een even aantal verwisselingen van naastliggende paren kan worden gemaakt.

Het was even doorbijten, maar de Maxwell vergelijkingen kunnen nu elegant worden geschreven als:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (7.37)$$

waarbij

$$j^\nu = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \quad (7.38)$$

de elektrische viervectorstroom is.

---

<sup>4</sup>in de praktijk kan dat nog een hele klus zijn als de lading en stroom onder invloed van de electromagnetische kracht veranderen. We krijgen dan electrodynamicica.

<sup>5</sup>Jawel, de notatie is zeer suggestief na de vorige sectie.

Het blijkt nu dat de Maxwell vergelijkingen niet veranderen als we bij de viervector potentiaal  $A^\mu$  een totale differentiaal optellen. De transformatie:

$$A^\mu \rightarrow \hat{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \alpha(x) \quad (7.39)$$

verandert niets aan de fysische uitkomst. Dit is buitengewoon suggestief als we het vergelijken met het veld  $A$  uit de vorige sectie.

Als we nu een ruimte beschouwen zonder elektrische lading en stroom, dan kunnen we de Maxwell vergelijkingen oplossen:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial^\mu \partial_\mu A_\nu = 0. \quad (7.40)$$

Deze vergelijking heeft als algemene oplossing:

$$A_\nu = \epsilon_\nu e^{-ip^\mu x_\mu}, \quad (7.41)$$

dus een vlakke golf, de  $e$ -macht, maal een polarisatievector,  $\epsilon_\nu$ . Invullen geeft dat de parameters  $p^\mu$  moeten voldoen aan

$$p^\mu p_\mu = (E/c)^2 - \vec{p}^2 = 0 \Rightarrow E = \pm pc. \quad (7.42)$$

Dit correspondeert met de energie-impuls viervector voor een massaloos deeltje. De polarisatievector blijkt te moeten voldoen aan:

$$\epsilon^\mu p_\mu = 0, \quad (7.43)$$

waaruit twee oplossingen mogelijk zijn, beiden met het ruimtelijk stuk van  $\epsilon$  loodrecht op de voortbewegingsrichting  $\vec{p}$ . Dus de oplossing is een massaloos deeltje met twee mogelijke polarisaties loodrecht op de voortbewegingsrichting van het deeltje.

Deze oplossingen identificeren we met het foton, het electromagnetische quantum. Kennelijk is het viervectorpotentiaalveld  $A^\mu$  als het ware de golf functie van het foton.

Als we nu teruggaan naar het invoeren van de covariante afgeleide voor fermion velden, dan zien we dat het fotonveld goed als de extra term kan optreden. We interpreteren nu dus het ‘‘hulpveld’’ in de covariante afgeleide dan ook als het fotonveld.

## De QED Lagrangiaan en Feynmanregels

We kunnen nu een Lagrangiaan construeren voor een fermionveld, waarbij de Lagrangiaan invariant is onder lokale faseveranderingen van het fermionveld. We

schrijven de Lagrangiaan in drie stukken: het vrije fermionveld, het vrije electromagnetische veld en een interactieterm:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{vrij,fermion}} + \mathcal{L}_{\text{vrij,foton}} + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (7.44)$$

waarbij:

$$\mathcal{L}_{\text{vrij,fermion}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + m\bar{\psi}\psi, \quad (7.45)$$

$$\mathcal{L}_{\text{vrij,foton}} = \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (7.46)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi. \quad (7.47)$$

Nu blijkt dat we de elementen van deze Lagrangiaan grafisch kunnen weergeven en kunnen verbinden met formules om de waarschijnlijkheid van een proces uit te rekenen. De grafische regels die beschrijven wat geldige processen zijn en de vertaling daarvan in een formule die de waarschijnlijkheid geeft voor elk proces heten de *Feynmanregels*. De grafische diagrammen heten *Feynmandiagrammen*.

Voor de bovenstaande Lagrangiaan voor Quantum ElectroDynamica (QED) zijn de Feynmanregels in Fig. 7.1 gegeven.

In het algemeen kunnen de Feynmanregels makkelijk uit de Lagrangiaan worden afgeleid. Uit de Lagrangiaan voor het vrije veld kan de propagator worden gehaald, dat wil zeggen de waarschijnlijkheid voor een deeltje om van  $A$  naar  $B$  te gaan, te propageren. Voor elke afgeleide wordt een vierimpuls ingevuld en de vlakke golfstukken van alle velden worden geschrapt. Vervolgens nemen we de inverse (dus één gedeeld door...) Dit geeft ruwweg de gewenste formule. In het algemeen zal die nog structuur kunnen hebben corresponderend met de structuur waarmee de vlakke golf moet worden vermenigvuldigd voor het vrije deeltje. Het interactie deel van de Lagrangiaan geeft, zoals mag worden vermoed uit de naam, de interacties tussen de verschillende deeltjes. Hierbij komen in één punt, de vertex, deeltjes samen die corresponderen met de velden die in de interactie Lagrangiaan voorkomen. In het geval van QED zijn dat een foton van het  $A^\mu$  veld, een inkomend fermion van het  $\psi$  veld en een inkomend anti-fermion van het  $\bar{\psi}$  veld. De factor die overblijft nadat de velden zijn verwijderd is de vertexfactor en geeft de waarschijnlijkheid voor de vertex. Deze factor moet dan nog met  $i$  worden vermenigvuldigd in het geval van QED.

Samenvattend kunnen we zeggen dat als we vrije fermionen hebben en vervolgens eisen dat die theorie invariant is onder vermenigvuldiging met een complexe fase, iets waarvan je verwacht dat het geen gevolgen heeft voor de observeerbare wereld, je gedwongen wordt fotonen in te voeren en de fotonen interactie hebben met de fermionen. De fermionen zijn dan niet langer vrij, maar hebben interactie. Kennelijk kan een fermion dus lokaal zijn fase veranderen als hij een foton uitzendend als boodschapper deeltje en daarin de faseverandering codeert. Als zijeffect

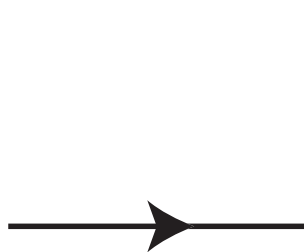
neemt het foton ook energie en impuls mee en ondergaat het fermion dus impuls en energieverandering. Een verandering van impuls is klassiek gezien ten gevolge van een kracht en dus wordt door de uitzending en ontvangst van fotonen een kracht uitgeoefend.

*Kennelijk is een electromagnetische kracht dus de uitwisseling van fotonen.*

QED is een zeldzaam succesvolle theorie. Er zijn QED processen gemeten tot twaalf decimale plaatsen nauwkeurig en er zijn even nauwkeurige voorspellingen gedaan, waarbij de meting en de voorspelling door QED prima overeenstemmen. Het is dus mogelijk om het gedrag van de natuur te beschrijven door een ruimte te kiezen, in ons geval drie ruimte dimensies en een tijddimensie, en voor elk materiedeeltje dat we willen beschrijven een vrij fermionveld. Vervolgens kunnen we de meest algemene Lagrangiaan opschrijven die tot een wiskundig consistente theorie leidt. Als we nu ook nog eisen dat de Lagrangiaan invariant moet zijn onder lokale versies van transformaties waarvan we weten dat ze als globale transformatie de natuur invariant moeten laten worden we op een eenduidige manier gedwongen om hulpvelden in te voeren die de interactie tussen de materiedeeltjes beschrijven. Dit leidt op een min of meer unieke manier tot een theorie die de natuur perfect lijkt te beschrijven.

Verbijsterend eigenlijk...

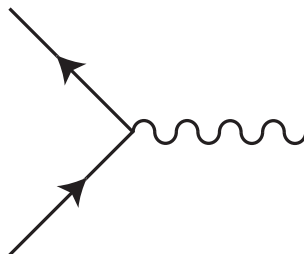
We hebben nu naar een complexe fasetransformatie gekeken als iets waaronder de natuur invariant is. Een interessante vraag is of er nog meer transformaties zijn die de natuur invariant laten. Dat blijkt inderdaad zo te zijn en een voorbeeld dat relevant zal blijken te zijn voor ons begrip van massa wordt in het volgende hoofdstuk behandeld.



*Fermionlijn:* wordt gebruikt voor spin 1/2 deeltjes. Voor inkomende fermionen wordt een factor  $u(p, s)$  gerekend, voor inkomende anti-fermionen een factor  $v(p, s)$ . Uitgaande fermionen zijn hetzelfde als inkomende anti-fermionen en uitgaande anti-fermionen zijn hetzelfde als inkomende fermionen. Voor fermion propagatoren, lijnen tussen twee vertices, wordt een factor  $i(\gamma^\mu p_\mu + m)/(p^2 - m^2)$  of  $i(\gamma^\mu p_\mu - m)/(p^2 - m^2)$  gebruikt al naar gelang het om een fermion of anti-fermion gaat. Hier is telkens  $p$  de vierimpuls,  $m$  de massa en  $s$  de spin van het (anti-)fermion.



*Fotonlijn:* wordt gebruikt voor fotonen. Voor inkomende en uitgaande fotonen wordt een factor  $\epsilon^\mu$  gebruikt, die de polarisatie van het foton aangeeft. Voor foton propagatoren, fotonlijnen tussen twee vertices, wordt een factor  $(g^{\mu\nu})/(p^2 - m^2)$  gebruikt.



*QED vertex:* interactie van een (anti-)fermion en een foton. Voor elke QED vertex wordt een factor  $ie\gamma^\mu$  gerekend, met  $q^2/(4\pi) \approx 1/137$ . De vertex kan worden gelezen als een foton dat splitst in een fermion en anti-fermion (paarproductie, van rechts naar links), een anti-fermion die samen met een fermion combineert tot 1 foton (annihilatie, van links naar rechts), een fermion dat een foton uitzendt en dan doorgaat als fermion (van onder naar boven), of een anti-fermion dat een foton uitzendt en dan doorgaat (van boven naar beneden) als anti-fermion.

Figuur 7.1: Feynmanregels voor quantum elektrodynamica (QED).



# Hoofdstuk 8

## De electrozwakke wisselwerking

### Zwakke isospin

In Tabel 6.1 van de elementaire deeltjes zijn ze op een aparte manier gerangschikt. Zowel de quarks als de leptonen komen in groepjes van twee. Zo horen het u- en het d-quark bij elkaar en het  $\nu_e$  en electron (e) vormen samen ook een koppel. Deze koppels van twee noemen we doublets.

Om te begrijpen waarom ze bij elkaar horen kunnen we kijken naar het verval van het neutron. Een vrij neutron heeft een levensduur van ongeveer een kwartiertje en vervalt dan via:

$$n \rightarrow p^+ e^- \bar{\nu}_e. \quad (8.1)$$

In termen van quarks is het neutron opgebouwd uit udd en het proton uit uud en is dit neutron verval te beschrijven als:

$$d \rightarrow u e^- \bar{\nu}_e. \quad (8.2)$$

We zien dus dat een d-quark in een u-quark kan worden omgezet, waarbij dan ook een electron en een anti-neutrino worden geproduceerd. Kijken we naar de balans voor en na het verval dan zien we 1 quark voor de reactie en 1 quark na de reactie, dus het aantal quarks min anti-quarks is behouden. We zien na de reactie ook een lepton (e) en een anti-lepton ( $\nu_e$ ), dus het totale aantal leptonen min anti-leptonen is ook behouden. Met behoud van quarks min anti-quarks en leptonen min anti-leptonen zouden we dan ook een reactie kunnen maken:

$$d \bar{u} \rightarrow \ell^- \bar{\nu}_\ell, \quad (8.3)$$

waar  $\ell$  een lepton is (zoals bijvoorbeeld een electron). Deze reactie blijkt inderdaad te bestaan. De combinatie ( $d\bar{u}$ ) is een negatief geladen pion,  $\pi^-$ . Het

verval:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu, \quad (8.4)$$

is in grote hoeveelheden geobserveerd. In dit geval is het lepton een muon en het anti-lepton een anti-muon-neutrino.<sup>1</sup>

We zien dus dat hier een quark en anti-quark annihileren en een lepton anti-lepton paar vormen. Maar in dit geval zijn het quark en anti-quark niet van dezelfde soort, en hebben samen zelfs een netto lading. Hetzelfde geldt voor het lepton anti-lepton paar.

Als we denken in termen van een deeltje dat in een dergelijk proces zou moeten worden uitgewisseld dan moet het zowel aan quark koppelen als aan leptonen. Daarnaast moet het ook elektrisch geladen zijn. Inderdaad blijken er dergelijke krachtdeeltjes te bestaan:  $W^+$  en  $W^-$  bosonen. De uitwisseling van  $W^\pm$  bosonen staat bekend als de zwakke kernkracht. We kunnen nu op dezelfde manier aankijken tegen deze interactie als tegen het electromagnetisme, waarin een foton wordt uitgewisseld.

Als we dan de redenering omdraaien zouden we ook kunnen verwachten dat er een symmetrie is, zoals complexe fasedraaiing bij het electromagnetisme, die verantwoordelijk is voor de uitwisseling van deze  $W$  bosonen.

## Lokale $SU(2)$ invariantie

Als we alleen de zwakke wisselwerking, dus de uitwisseling van  $W$  bosonen beschouwen, en met name de electromagnetische wisselwerking even vergeten, dan is er geen verschil meer tussen u- en d-quarks of tussen electron en (electron-)neutrino. We nemen de situatie met u- en d-quarks als voorbeeld. Om te benadrukken dat deze quarks bij elkaar horen schrijven we ze bij elkaar als een doublet:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}. \quad (8.5)$$

We beschouwen vervolgens dit doublet als één toestand. Zo'n toestand kan bestaan uit een u-quark of een d-quark, maar ook uit een lineaire combinatie daarvan, als het totaal aan "quark-inhoud" maar gelijk is aan 1. In andere woorden, we kunnen ook schrijven:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (8.6)$$

---

<sup>1</sup>Het verval van een pion in een electron en neutrino komt veel minder vaak voor dan in een muon. Dit heeft te maken met het behoud van draaiimpuls en de spin van het pion, lepton en anti-neutrino. Met name het feit dat het anti-neutrino maar in één van de in principe twee mogelijke spintoestanden voorkomt leidt tot het dominante verval van het pion in het muon.



waarbij  $u$  en  $d$  de hoeveelheid u- en d-quark aangeeft. Als het totaal aan quarks in het doublet gelijk is aan 1, dan geldt dat:

$$\sqrt{u^2 + d^2} = 1. \quad (8.7)$$

Dat is te bereiken voor een toestand van een puur u-quark ( $u = 1, d = 0$ ) en voor een puur d-quark ( $u = 0, d = 1$ ), maar ook een toestand waarin evenveel u- als d-quark zit ( $u = 1/\sqrt{2}, d = 1/\sqrt{2}$ ) is een mogelijkheid. Als het nu niet uitmaakt of we u- of d-quarks beschouwen voor de zwakke wisselwerking, dan maakt het ook niet uit hoeveel u- en hoeveel d-quarks er in zo'n doublet toestand zitten. Als we dus beginnen met een doublet toestand:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

dan ziet die er voor de zwakke wisselwerking net zo uit als een andere doublet toestand:

$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{d} \end{pmatrix}, \quad (8.9)$$

zolang maar geldt dat:

$$\sqrt{u^2 + d^2} = \sqrt{\hat{u}^2 + \hat{d}^2}. \quad (8.10)$$

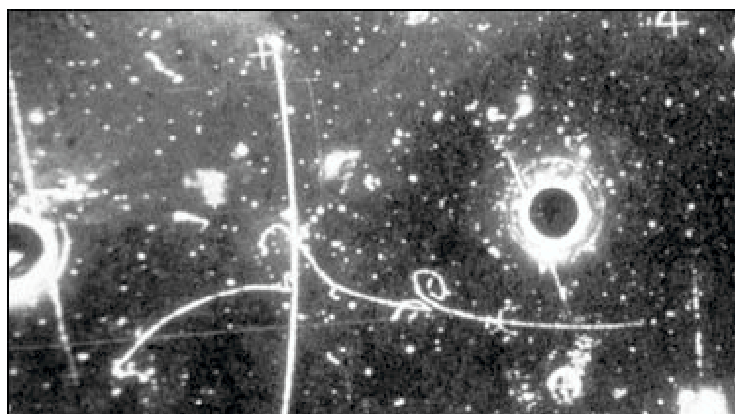
Met andere woorden we kunnen de twee componentige vector roteren in de twee dimensionale ruimte. In dat geval verandert de lengte van de vector niet. Wetenschappelijk schrijven we dat als:

$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{d} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad (8.11)$$

waarin  $U$  een  $2 \times 2$  matrix is, zoals aangegeven. De elementen van deze matrix zijn complexe getallen. In totaal zijn er dus 4 elementen maal 2 reële getallen die kunnen worden gekozen. Als we vervolgens eisen dat de lengte van de vectoren voor en na de vermenigvuldiging met de matrix hetzelfde zijn, dan blijkt dat we uiteindelijk drie getallen vrij kunnen kiezen. We kunnen dan elke willekeurige matrix die doet wat we willen ontbinden in drie onafhankelijke generatoren. We identificeren die met de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.12)$$

We zien dat de laatste twee matrices precies een u-quark in een d-quark en andersom transformeren. In deze matrices herkennen we het gedrag van de  $W^+$  en  $W^-$  bosonen. De eerste matrix laat de absolute waarde van de hoeveelheid u-



Figuur 8.1: *Neutrale stroom gebeurtenis in het Gargamelle experiment. Vanaf de rechterkant op de foto komt een neutrino in de linker richting die een electron van de vloeistof in het bellenvat raakt. Vervolgens is een electronspoor dat naar links gaat te zien, alsof het uit het niets ontstaat. De enige manier om dit te verklaren is doordat er een neutraal deeltje tussen het neutrino en het electron wordt uitgewisseld.*

en d-quark invariant. Als we de andere matrices met deeltjes die we uitwisselen identificeren, dan worden we natuurlijk gedwongen om dat ook met deze matrix te doen. Omdat de quarks hier hetzelfde blijven moet dat wel een neutraal deeltje zijn. We noemen dit het  $Z^0$  boson.<sup>2</sup>

Hierboven hebben we het steeds over u- en d-quarks gehad, maar we hadden het ook kunnen hebben over elk van de volgende doubletten:

$$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}. \quad (8.13)$$

Voor de rest van de redenering maakt dit helemaal geen verschil.

Een belangrijk detail waarin het  $Z^0$  deeltje verschilt van het ook neutrale foton, is dat het  $Z^0$  ook koppelt aan het neutrino, een elektrisch neutraal deeltje. Dat er ook neutrale deeltjes zijn die aan neutrino's koppelen is ontdekt bij het Gargamelle experiment. In Fig. 8.1 is een gebeurtenis te zien die alleen te verklaren is met de uitwisseling van een  $Z^0$  boson.

---

<sup>2</sup>in werkelijkheid ligt de situatie gecompliceerder en mengt de neutrale component van de zwakke wisselwerking met de uitwisseling van fotonen.

## De natuur is linkshandig

In processen zoals  $n \rightarrow p^+ e \nu_e$  wordt de hoekverdeling van de vervalsproducten bepaald door de spin van de deeltjes. In dit geval zijn alle deeltjes fermionen en hebben een spin met een absolute grootte van een halve eenheid ( $S = 1/2$ ). Deze spin is voor te stellen als de richting van een magnetische dipool, vergelijk dit met een staafmagneet. Als de grootte, dat wil zeggen de sterkte, van de spin is vastgelegd, kan de richting nog variëren. Als we het over een enkel deeltje hebben is er nog maar één voorkeursrichting en dat is de bewegingsrichting van het deeltje. Het blijkt nu dat de spin zich kan richten met de bewegingsrichting mee, dat noemen we rechtshandig, en tegen de bewegingsrichting in, dat noemen we linkshandig. Voor deeltjes met massa hangt de projectie van de spin langs de bewegingsrichting af van de waarnemer. Immers als voor een bepaalde waarnemer de spin van een deeltje rechtshandig is, dan kan een andere waarnemer sneller gaan dan het deeltje ten opzichte van de eerste waarnemer. De tweede waarnemer ziet de spinprojectie dan als linkshandig. Voor massaloze deeltjes is dit anders. Een linkshandig massaloos deeltje voor één waarnemer is linkshandig voor alle waarnemers.

Het blijkt dat het neutrino een hele kleine massa heeft.<sup>3</sup> In praktische zin kunnen we neutrino's als massaloos beschouwen.

Het blijkt uit de hoekverdeling van vervallen waarbij een neutrino is betrokken dat alleen de linkshandige variant wordt geobserveerd. Een rechtshandig neutrino is nog nooit gezien, ondanks dat er uitgebreid naar is gezocht.

De enige kracht die op neutrino's werkt is de zwakke wisselwerking. En kenmerkend werkt de zwakke wisselwerking alleen op linkshandige neutrino's. De electromagnetische kracht werkt op zowel linkshandige als rechtshandige fermionen (quarks en elektrisch geladen leptonen.)

We geven dit aan door te zeggen dat linkshandige fermionen in doublets voorkomen, waarop de zwakke wisselwerking werkt, terwijl rechtshandige fermionen alleen los, in singlets, voorkomen en de zwakke wisselwerking daar niet op werkt.

We geven dat aan voor de linkshandige doublets als:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L. \quad (8.14)$$

en voor de rechtshandige singlets als:

$$u_R, d_R, c_R, s_R, t_R, b_R, u_R, e_R, \mu_R, \tau_R. \quad (8.15)$$

De rechtshandige neutrino's ontbreken hier.

---

<sup>3</sup>in feite is pas sinds een paar jaar bekend dat het neutrino niet massaloos is en ene precieze massameting is er zelfs nog niet. We kennen alleen de massaverschillen tussen de verschillende typen neutrino's.

## De Lagrangiaan voor de zwakke wisselwerking

De Lagrangiaan voor de electrozwakke wisselwerking voor bijvoorbeeld het electron en electron-neutrino wordt in principe gegeven door:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{vrij,ferm}} + \mathcal{L}_{\text{vrij,WZ}} + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (8.16)$$

waarbij:

$$\mathcal{L}_{\text{vrij,ferm}} = i(\bar{e} \ \bar{\nu}_e)_L (\gamma^\mu \partial_\mu + m_L) \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}_L + i\bar{e}_R (\gamma^\mu \partial_\mu + m_R) e_R, \quad (8.17)$$

$$\mathcal{L}_{\text{vrij,WZ}} = \frac{1}{4} (W^{+\mu\nu} W_{\mu\nu}^+ + W^{-\mu\nu} W_{\mu\nu}^- + Z^{0\mu\nu} Z_{\mu\nu}^0) \quad (8.18)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{g_w}{2\sqrt{2}} [\bar{e}_L \gamma^\mu W_\mu^- \nu_{eL} + \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu W_\mu^+ e_L] + \quad (8.19)$$

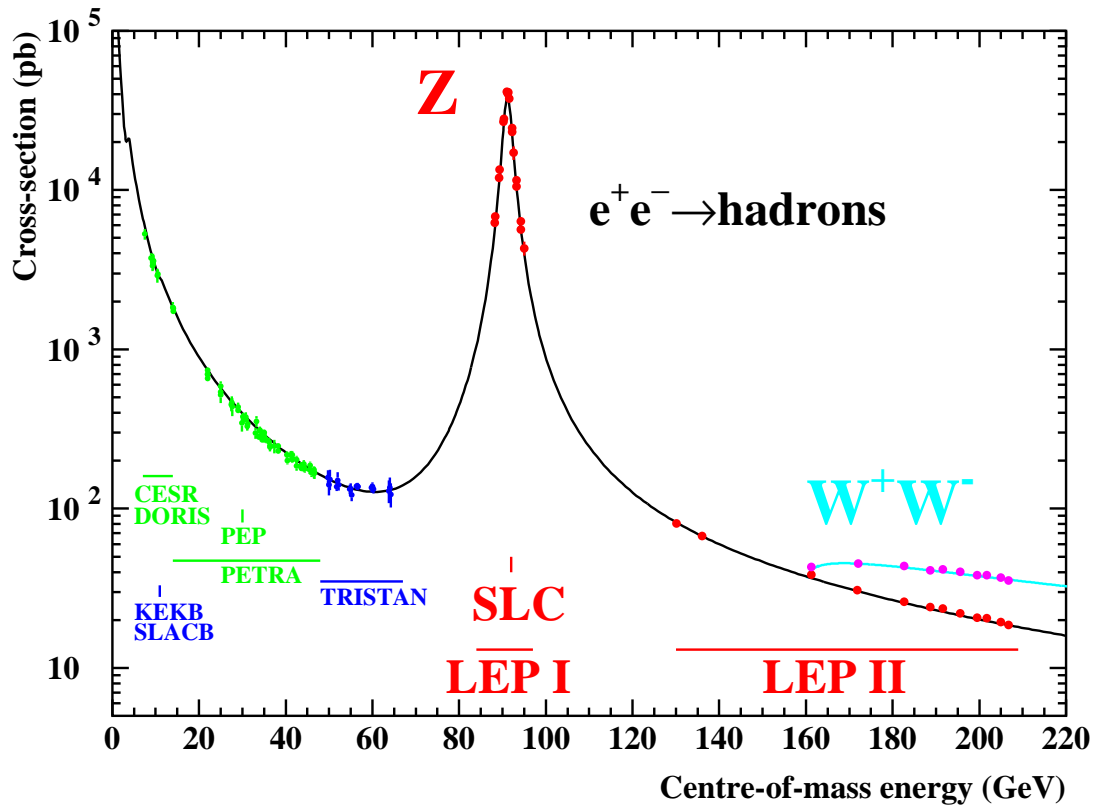
$$-\frac{g_w}{2 \cos \theta_w} \left[ (\bar{e} \ \bar{\nu}_e)_L (g_V - g_A \gamma^5) \gamma^\mu Z_\mu^0 \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}_L + \right. \quad (8.20)$$

$$\left. \bar{e}_R (g_V - g_A \gamma^5) \gamma^\mu Z_\mu^0 e_R \right]. \quad (8.21)$$

Dit is de Lagrangiaan die we krijgen als we de rotatie van de zwakke doublets als lokale ijk-invariantie eisen. Een probleem dat onmiddellijk opvalt aan deze Lagrangiaan is dat er twee massa's in voorkomen  $m_L$  en  $m_R$ . Als linkshandige en rechtshandige electronen dezelfde massa hebben, en dat hebben ze, dan moeten we  $m_L = m_R = m_e$  kiezen. Echter, het linkshandige neutrino krijgt dan ook automatisch de massa  $m_e$ , in tegenspraak met wat we experimenteel vinden, namelijk dat het electron en positron dezelfde massa hebben, maar dat er een groot massaverschil is tussen het electron en het neutrino. Verder is er geen massaterm voor de ijk-bosonen,  $W^\pm$  en  $Z$ , dus die zouden in deze theorie massaloos moeten zijn, net als het foton.

## De zwakke wisselwerkingsbosonen

Behalve dat  $W$  en  $Z$  bosonen indirect zijn ontdekt, zoals in het Gargamelle experiment, zijn ze intussen ook in grote getalen geproduceerd en bestudeerd in hoge energiefysica experimenten. Met name bij de LEP versneller zijn miljoenen  $Z$  deeltjes gemaakt en tienduizenden  $W$  deeltjes. Het blijkt dat  $W$  en  $Z$  deeltjes een massa hebben die niet alleen niet nul is, maar juist ontzettend groot. De massa van het  $W$  boson is ongeveer 80.5 GeV, en die van het  $Z$  boson 91.19 GeV, respectievelijk meer dan 80 en 90 keer de massa van het proton (en dus die van het waterstofatoom).



Figuur 8.2: Werkzame doorsnede, dit is een maat voor de waarschijnlijkheid dat de botsing gebeurt, als functie van de invariante massa voor  $e^+e^-$  botsingen. De piek bij 91 GeV duidt op de resonante formatie van een deeltje. De eigenschappen van dat deeltje blijken die van het  $Z^0$  boson te zijn zoals dat door de theorie van de zwakke wisselwerking wordt voorspeld.

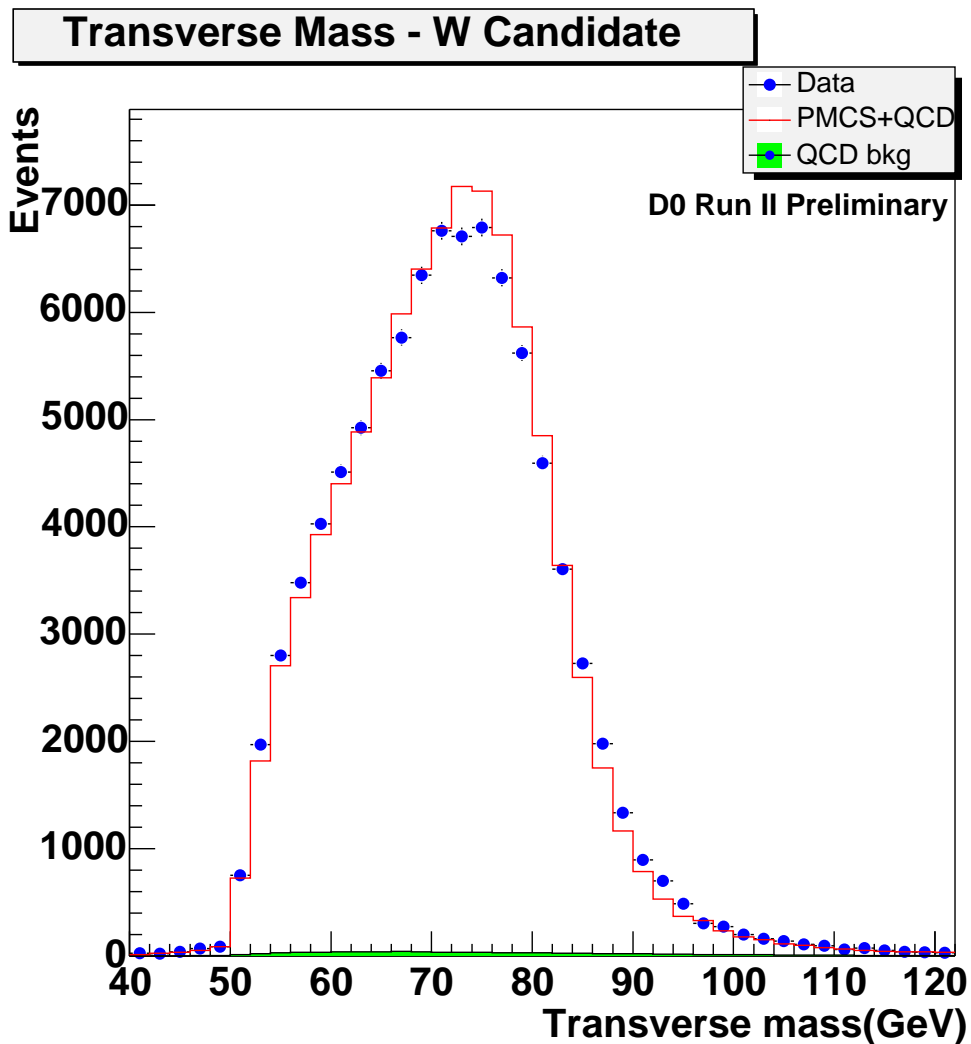
Bij de LEP versneller zijn electronen op positronen gebotst bij verschillende energieën. De invariante massa van het electron positron is de hoeveelheid energie die kan worden omgezet in nieuwe deeltjes. Dit is in het geval van de LEP versneller, waar de bundelenergie van de electronen hetzelfde is als van de positronen en de twee frontaal op elkaar botsen, twee maal de bundelenergie van de electronen (of positronen, dat is hetzelfde.) Op het moment dat het electron en positron kunnen annihilieren in een nieuw deeltje stijgt de werkzame doorsnede scherp. We noemen dit resonante productie. De werkzame doorsnede is een maat voor de waarschijnlijkheid dat twee deeltjes botsen, een groot doel is nu eenmaal makkelijker te raken dan een klein doel. In het plaatje van Fig. 8.2 met de werkzame doorsnede is te zien dat die stijl naar beneden gaat vanaf een invariante massa van nul, en dat er vervolgens een hoge piek rond 91 GeV zit. De

piek bij nul wordt veroorzaakt doordat een electron-positron paar in een foton met massa nul kan annihilieren. De piek bij 91 GeV is die waarbij het electron en positron samen een  $Z^0$  boson vormen. Het Z boson vervalst vervolgens in alle mogelijke quark-anti-quark en lepton-anti-lepton paren, waarbij alleen het verval in het top-anti-top quark niet gaat vanwege het feit dat het top quark een te grote massa heeft. De waarschijnlijkheid waarmee het Z boson in de verschillende fermion-anti-fermion paren vervalst wordt bepaald door de koppelingsconstanten die gegeven zijn in formule 8.21.

In Fig. 8.3 staat de invariante massa aangegeven van paren van hadron jets die bij de Tevatron versneller zijn gezien door de Dzero detector. Bij het Tevatron worden protonen op anti-protonen gebotst. Omdat protonen en anti-protonen samengesteld zijn uit quarks en de quarks uiteindelijk de interactie hebben die de W bosonen produceren kan niet worden achterhaald wat de impuls van de W bosonen langs de richting van de inkomende bundels is. In het vlak loodrecht op de inkomende bundels moet de total impuls tot nul optellen. Daarom is het bij proton (anti-proton) botsers makkelijker om met alleen de transversale impuls te werken. Uit de transversale impuls wordt dan een invariante massa gemaakt die de transversale invariante massa heet. Deze transversale invariante massa is de projectie van de invariante massa op het vlak loodrecht op de bundel richting. De onbekendheid van de projectiehoek wordt dan zichtbaar als we de resultaten van veel gebeurtenissen over elkaar heen tekenen als een brede piek die als eindpunt de massa van het W boson heeft die in de twee quark jets vervalst. Dit is uiteraard ook te simuleren en de massa van het W boson wordt het nauwkeurigst bepaald door in de simulatie de massa van het W boson te variëren en dan te kijken bij welke massa de simulatie met de meting het best overeenkomt.

## Massa in de zwakke wisselwerking als probleem

Er zijn nu twee problemen met de zwakke wisselwerking, beiden verbonden met massa: de ijkbosonen van een lokale ijktheorie kunnen alleen maar massaloos zijn en de W en Z bosonen zijn dat evident niet; het massaverschil tussen de partners in de fermion-doubletten, zoals bijvoorbeeld het massaverschil tussen electron en  $\nu_e$ , vernietigt de invariantie onder rotaties van die doublets. In het volgende hoofdstuk zal voor beide problemen een oplossing worden aangereikt, die zowel de kool als de geit spaart: verschillende massa's toestaat voor allerlei deeltjes, terwijl de rotatie-invariantie van de zwakke doubletstructuur van de theorie als geheel wordt gerespecteerd.



Figuur 8.3: Invariante massa zoals gereconstrueerd uit twee hadron “jets”. Deze hadron jets, gecollimeerde stromen van deeltje, ontstaan als quarks in een verval ontstaan. Losse quarks kunnen niet voorkomen en kleden zich aan met andere quarks die uit het vacuüm worden getrokken. Er ontstaan dan meerdere hadronen die ongeveer dezelfde kant op gaan. In dit geval is de invariante massa van de transversale impulsen berekend, dat wil zeggen de impulsfractie loodrecht op de inkomende bundel. In plaats van een symmetrische piek wordt dan een getoonde piek verkregen, waarbij het eindpunt van de piek gelijk is aan de massa van de resonantie die in de twee quarks vervalst, in dit geval het  $W$  boson.





# Hoofdstuk 9

## Het Higgs mechanisme

### Snel Tom Poes, verzin een list

Zoals we in de vorige hoofdstukken hebben gezien moeten de fermionen, de materiedeeltjes quarks en leptonen, in tweetallen bij elkaar worden genomen voor de zwakke wisselwerking. De zwakke wisselwerking ziet dan bijvoorbeeld een electron en een electron-neutrino als twee gedaantes van hetzelfde deeltje. Net zoals een electron en een electron met een fase-draaiing twee gedaantes van hetzelfde deeltje zijn voor de electromagnetische wisselwerking en een rood en een groen quark twee gedaantes zijn van hetzelfde quark voor de sterke wisselwerking.

Er doemt nu wel een groot verschil op. Voor de electromagnetische en de sterke wisselwerking gaat het om symmetrietransformaties van hetzelfde deeltje. Het deeltje voor en na de symmetrietransformatie heeft dezelfde massa. In de zwakke wisselwerking heeft het deeltje voor en na de transformatie een andere massa. Bijvoorbeeld de massa van een electron en electron-neutrino zijn erg verschillend.

Deze redenering kan worden omgedraaid. De zwakke wisselwerking kan niet op een symmetrie zijn gebaseerd, want bijvoorbeeld electronen en electron-neutrino's zijn niet in elkaar over te voeren omdat de massa verschillend is.

Als we zowel willen dat de theorie symmetrisch is onder het roteren van de zwakke doublets alsook dat we de deeltjes in die doublets met een verschillende massa kunnen nemen is een list nodig. De list is dat de theorie massaloos wordt geformuleerd en dat massa wordt geïntroduceerd als een dynamische eigenschap, die kan veranderen op een manier die de theorie symmetrisch houdt onder een rotatie van de zwakke doublets. Het kiezen van verschillende massa's voor de deeltjes gebeurt dan door één uit vele mogelijkheden te kiezen voor de laagste energietoestand. De laagste energietoestand correspondeert dan automatisch met het vacuüm, de toestand waarin “zo weinig mogelijk” zit.

Het principe zal eerste worden gedemonstreerd door aan het nominaal massaloze foton een massa te geven.

## Het gewicht van nat licht

Het foton is in vacuüm een massaloos deeltje. We hadden al gezien in de speciale relativiteitstheorie dat een massaloos deeltje automatisch met de lichtsnelheid beweegt ten opzichte van alle waarnemers. Omgekeerd kan een deeltje dat met de lichtsnelheid beweegt ten opzichte van één waarnemer dat alleen maar doen ten opzichte van alle waarnemers, en dan ook alleen maar als het deeltje massaloos is.

Deze situatie voor het foton verandert drastisch als licht door een medium gaat. Als licht van vacuüm naar een medium zoals water gaat treedt er breking van het licht op aan het oppervlak tussen het vacuüm en het water. De breking van licht als het van het ene naar het andere medium gaat is te verklaren doordat de snelheid van het licht niet in alle media even groot is. Neem een lichtpad van een punt A in medium 1 naar punt B in medium 2. De lichtsnelheid in medium 1 is  $v_1$  en in medium 2  $v_2$ . We nemen verder de afstand van punt A tot de grens van het media  $d_1$ , en de afstand van punt B tot de grens van de media  $d_2$ . De afstand tussen A en B in de richting langs het grensvlak tussen de media noemen we  $z$ . De afstand in die richting tussen A en waar het lichtdeeltje de grens tussen de media bereikt noemen we  $x$  en de afstand tussen punt B en dat punt waar het lichtdeeltje de grens tussen de media passeert noemen we  $y$ , waarbij  $z = x + y$ . We beschouwen nu een lichtdeeltje dat van A naar B gaat en vragen dat het de kortste weg aflegt, dat wil zeggen de weg met de minste reistijd. De reistijd wordt gegeven door de rechte wegen in de media 1 en 2 bij elkaar op te tellen:

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + d_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{y^2 + d_2^2}}{v_2}. \quad (9.1)$$

De minimum reistijd vinden we door het punt te variëren waar het lichtdeeltje de grens tussen de media kruist. We doen dat door  $x$  te variëren en daarmee ook  $y = z - x$ , want  $z$  ligt vast. Het minimum vinden we door de afgeleide te nemen van  $t$  naar  $x$  en te eisen dat de afgeleide nul is.<sup>1</sup>

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{v_1 \sqrt{x^2 + d_1^2}} - \frac{2y}{v_2 \sqrt{y^2 + d_2^2}} = 0. \quad (9.2)$$

---

<sup>1</sup>Een minimum in een één-dimensionale functie is een punt waarop de waarde van de functie daalt als we van links komen en weer stijgt nadat we door het minimum zijn gegaan. De richtingcoëfficiënt moet dan door nul zijn gegaan precies in het minimum.

We hebben hierbij  $y$  doorgedifferentieerd naar  $x$  met de kettingregel. Voor het minimum volgt dan:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{x/\sqrt{x^2 + d_2^2}}{y/\sqrt{y^2 + d_1^2}} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n, \quad (9.3)$$

waarbij  $n$  de brekingsindex is van medium 1 naar medium 2. Dit is de wet van Snellius.

Als de lichtsnelheid in vacuüm  $v_1 = c$  is en de brekingsindex van vacuüm naar water is  $n = 1.333$ . Dus de snelheid van een lichtdeeltje in water is  $v_2 = v_1/1.333 = (3/4)c$ . Maar als de snelheid van het (licht)deeltje minder is dan  $c$ , dan heeft het volgens de speciale relativiteitstheorie een massa. Als we er verder over nadenken dan zien we dat het foton in het water geen energie verliest en dus dezelfde energie houdt. De impuls moet dan echter wel veranderen. We krijgen dan met  $p = \beta\gamma mc$ :

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 = (\beta^2\gamma^2 + 1) m^2c^4. \quad (9.4)$$

We kunnen met de snelheid die we voor licht in water hebben uitrekenen dat:

$$\beta^2\gamma^2 + 1 = \frac{16}{7}, \quad (9.5)$$

zodat volgt voor de effective massa  $m$  van het foton:

$$mc^2 = \frac{\sqrt{7}}{4}E = 0.66E. \quad (9.6)$$

We zien dus dat voor een foton in water 66% van de energie in massa zit en dus maar 34% in kinetische energie, terwijl voor een foton in vacuüm alle energie kinetisch is.

We kunnen hier op de volgende manier tegen aan kijken. Het foton heeft interactie in materie met de electronen en atoomkernen. Het foton vliegt van de ene interactie naar de andere met de lichtsnelheid, maar wordt telkens door de interactie, bijvoorbeeld absorptie gevolgd door emissie, opgehouden. Hierdoor wordt de effectieve snelheid minder. Zelfs als we de materie als een homogeen geheel denken, hebben we nog steeds de interactie van het foton met die homogene materie. Quantummechanisch moeten we de sterkte van de interactie opvatten als de waarschijnlijkheid dat een interactie plaats vindt. Als de interactiesterkte groot is vinden er meer interacties plaats. Weer veronderstellen we dat het foton in elk van die interacties “even wordt opgehouden”.

We zien dus dat we een massaloos deeltje, die geheel massaloos in de theorie zit van QED een effectieve massa kunnen geven door het door materie te laten

gaan. De eigenschappen van de QED theorie worden niet aangetast doordat we bijvoorbeeld onder water zitten. Als nu ons hele heelal met water gevuld was, en dat met water gevulde heelal de laagste en dus stabiele toestand er van, we kunnen dit dan vacuüm noemen, dan zouden fotonen een massa hebben.

## Het Higgs veld

Voor de doublets uit de zwakke theorie ligt de zaak gecompliceerder dan in het geval van een foton in water. We willen namelijk niet alleen bijvoorbeeld het electron en het electron-neutrino een verschillende massa geven, maar ook het linkshandig en rechtshandig electron dezelfde massa op een natuurlijke manier. Voor de doorzichtigheid nemen we de neutrino massa's gelijk aan nul. Later zullen we misschien nog kijken naar de complicatie van een neutrino massa die niet nul is. Overigens verandert dat niet de kern van het volgende betoog.

In de Lagrangiaan van de theorie zou dat zijn te bereiken met een massa term:

$$m e_R e_L, \quad (9.7)$$

waarin  $e_R$  en  $e_L$  de linkshandige en rechtshandige electron velden voorstellen. Er is geen term voor het neutrino, want dat nemen we massaloos. Bovenstaande term is duidelijk niet invariant onder een draaiing van het linkshandige doublet. Om dat te bereiken moeten we voor de linkshandige deeltjes steeds het hele doublet nemen. Met een linkshandig doublet en een rechtshandig singlet kunnen we de massaterm

$$m e_R e_L = m e_R (0 \ 1) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \quad (9.8)$$

vormen. Nu hebben we expliciet de vector  $(0 \ 1)$  in de formule gezet. Deze maakt dat de term nog steeds niet echt goed transformeert onder een transformatie van het linkshandige doublet. Verander bijvoorbeeld eens een puur linkshandig electron in een neutrino, dan staat er heel wat anders. Als we nu echter in plaats van de vector  $(0 \ 1)$  een doublet veld nemen  $(\bar{\phi}^+ \ \overline{phi}^0)$  dat hetzelfde transformeert als het linkshandige doublet (maar dan natuurlijk op de manier van de corresponderende anti-deeltjes) dan is de term wel invariant onder een draaiing van het linkshandige doublet. Zo'n draaiing wordt immers precies teniet gedaan door de bijbehorende draaiing van het anti-doublet met de velden  $\phi$ . De term wordt dan:

$$\hat{m} e_R (\bar{\phi}^+ \ \overline{phi}^0) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L. \quad (9.9)$$

Nu moeten we nog zorgen dat het effect van het nieuwe veld is dat het in de grondtoestand evenredig aan  $(0 \ 1)$  is.

Als we een nieuw doublet veld invoeren dan hoort daar ook een kinetische energie bij. Het nieuwe veld moet wel een scalar veld zijn, want het moet energie-dimensie 1 hebben om de theorie renormaliseerbaar te houden. In dat geval wordt de koppelingsconstante  $\hat{m}$  een dimensieloos getal. In het meest algemene geval van een scalar veld hebben we een complex scalar veld, een veld dat complexe waarden aan kan nemen dus. Voor een vrij complexe doublet scalarveld kunnen we als meest algemene renormaliseerbare Lagrangiaan opstellen:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \bar{\phi} \partial_\mu \phi - \mu^2 \bar{\phi} \phi - \lambda (\bar{\phi} \phi)^2. \quad (9.10)$$

Als we dit lezen als een bewegingsstuk  $\partial^\mu \bar{\phi} \partial_\mu \phi$  en de rest als een potentiële energie stuk:

$$\mathcal{V} = \mu^2 \bar{\phi} \phi + \lambda (\bar{\phi} \phi)^2 \quad (9.11)$$

dan kunnen we kijken naar het gedrag van de potentiële energie. Het systeem zal er naar neigen om de potentiële energie te minimaliseren, dus de grondtoestand is bij de laagste potentiële energie. Als we dit hebben gerealiseerd dan zien we dat  $\lambda$  niet alle waarden aan kan nemen. Als  $\lambda < 0$  dan gaat de waarde van de potentiële energie steeds verder naar beneden als het veld grotere waarden aanneemt en bereiken we nooit een stabiel minimum. We nemen dus  $\lambda > 0$ . Als nu  $\mu^2 > 0$  dan krijgen we precies één enkel minimum van de potentiële energie voor de veldwaarde  $|\phi| = 0$ . Dit levert dus niet het gezochte (0 1) karakter op. Als we echter  $\mu^2 < 0$  nemen dan krijgen we een interessante vorm van de potentiaal. Deze potentiaal heeft dan minima voor de veldwaarden:

$$\frac{d\mathcal{V}}{d|\phi|} = 2\mu^2|\phi| + 4\lambda|\phi|^3. \quad (9.12)$$

Hier zijn twee oplossingen voor  $|\phi| = 0$  is weer weinig spannend en blijkt bovendien een lokaal maximum te zijn, dus geen absoluut minimum. De andere oplossing geeft:

$$|\phi| = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}} = v, \quad (9.13)$$

waarbij we de vacuümverwachtingswaarde van het veld  $\phi$  als  $v$  hebben gedefinieerd. Nu hebben we voor  $\phi$  een complex doublet scalarveld, dus uitgeschreven in reële componenten:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^- \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bi \\ c + di \end{pmatrix}. \quad (9.14)$$

Nemen we de lengte van deze complexe vector in het kwadraat, dan moet daarvoor gelden in de grondtoestand:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = v^2. \quad (9.15)$$

Dit geeft een heleboel mogelijkheden om  $a$ ,  $b$ ,  $c$  en  $d$  te kiezen. Dit geeft precies het principe van spontane symmetriebreking weer. A priori zijn alle mogelijkheden gelijk, maar voor het vacuüm is er precies één keuze gemaakt. Als we in dit geval kiezen:

$$a = 0, \quad (9.16)$$

$$b = 0, \quad (9.17)$$

$$c = v, \text{ en} \quad (9.18)$$

$$d = 0, \quad (9.19)$$

dan bereiken we effectief dat in de grondtoestand geldt:

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (9.20)$$

Als we dus als koppelingsconstante in dit geval kiezen:

$$\hat{m} = \frac{m}{v}, \quad (9.21)$$

dan bereiken we precies de massaterm die nodig is, terwijl de theorie netjes invariant is onder draaiing van de linkshandige doublets.

We hebben nu de zaak net even iets te veel vereenvoudigd. In plaats van de kinetische term:

$$\partial^\mu \bar{\phi} \partial_\mu \phi \quad (9.22)$$

hadden we natuurlijk de covariante afgeleide van de zwakke wisselwerking moeten nemen:

$$D^\mu \bar{\phi} D_\mu \phi. \quad (9.23)$$

In dat geval komen er extra termen met producten van de ijkvelden  $W$  en  $Z$  met het Higgs veld  $\phi$ . Het blijkt dat na de nodige algebra dat precies massa-termen oplevert voor de  $W$  en  $Z$  bosonen in termen van de zwakke koppelingsconstanten en de vacuümverwachtingswaarde van het Higgs veld. Doordat de koppelingsconstanten van de zwakke wisselwerking uit zwakke interacties zijn te meten en de massa van het  $W$  en  $Z$  boson ook zijn gemeten is hieruit de vacuümverwachtingswaarde  $v$  te berekenen. Die blijkt te zijn:

$$v = 256 \text{ GeV}. \quad (9.24)$$

Met  $v$  bekend blijft er nog maar één onbekende over, naar keuze  $\mu$  of  $\lambda$ . We kunnen daar ook anders naar kijken door het gedrag van het Higgs veld  $\phi$  rond

het minimum van de potentiaal, het vacuüm, te bestuderen. We schrijven het Higgs veld daartoe als:

$$\phi = \begin{pmatrix} a + bi \\ v + H + di \end{pmatrix}. \quad (9.25)$$

Het blijkt dat de termen evenredig aan  $a$  en  $b$  worden gebruikt om het W deeltje massa te geven en in het W veld worden geabsorbeerd. De termen evenredig aan  $d$  zorgen dat dat het Z deeltje massa krijgt en worden daardoor geabsorbeerd. Alleen het veld  $H$  blijft over als vrij veld en kan worden gezien als kleine verstoring op de vacuümverwachtingswaarde  $v$ . Als we nu de Lagrangiaan ontwikkelen in  $H$ , dan krijgen we voor het stuk van het Higgs veld als we  $a = b = d = 0$  nemen:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu H \partial_\mu H + 2\mu^2 H^2 + \frac{2\mu^2}{v} H^3 + \frac{\mu^2}{2v^2} H^4 - \frac{\mu^2}{2} v^2. \quad (9.26)$$

De laatste term hierin is constant en doet er niet toe voor het fysisch gedrag van de theorie. In de rest zien we behalve de kinetische term met de afgeleide termen staan die evenredig zijn aan  $H^2$ ,  $H^3$  en  $H^4$ . Voor de vrije propagator doet alleen het stuk kwadratisch in  $H$  er toe. Dat is de term  $+2\mu^2 H^2$ . De constante die hiervoor staat is de massa van het deeltje dat bij het  $H$  veld behoort. Dat deeltje heet het Higgs boson. Het heeft massa:

$$m_H = \sqrt{-2\mu^2}. \quad (9.27)$$

En dat komt goed uit, want we waren gedwongen om  $\mu^2 < 0$  te kiezen om de theorie te krijgen die we wilden. Dus is  $m_H$  positief en reëelwaardig. We kunnen echter  $m_H$  niet uit de theorie te weten komen, noch uit de metingen van alle andere effecten in de zwakke wisselwerking, of enige andere wisselwerking. Uiteindelijk kunnen we  $m_H$  alleen maar echt te weten komen door het Higgs deeltje te maken en de massa er van direct te meten. Door effecten van virtuele correcties kunnen we wel indirect ook een meting van de Higgs massa krijgen. We komen hier in het laatste hoofdstuk op terug.

Het Higgs deeltje, H, heeft heel aparte eigenschappen. Omdat het steeds naast de vacuümverwachtingswaarde  $v$  voorkomt, koppelt het aan andere deeltjes net als  $v$ , dus met een koppelingsconstante die wordt bepaald door de massa van het deeltje waaraan het Higgs deeltje koppelt. Er is geen enkel ander deeltje dat deze eigenschap heeft. Het ontdekken van een deeltje dat met zware deeltje een grotere wisselwerking heeft dan met lichte deeltjes duidt dus zeker op een Higgs deeltje. Verder is het Higgs deeltje elektrisch neutraal en heeft het geen spin (het is een scalair boson.)





# Hoofdstuk 10

## Zoeken naar het Higgs deeltje

Het Higgs mechanisme is een integraal onderdeel van het Standaard Model, dat wil zeggen van het model dat we in het vorige hoofdstuk hebben geïntroduceerd om de electrozwakke wisselwerking te beschrijven. Zonder het Higgs mechanisme is het model niet consistent. Het Higgs mechanisme heeft als onderdeel het bestaan van een Higgs boson die een aantal specifieke eigenschappen heeft, met name een koppeling aan andere deeltjes met massa, waarbij de koppelingsconstante evenredig is met de massa van het deeltje waaraan wordt gekoppeld.

In het bestaan van het Higgs deeltje ligt de sleutel tot de bevestiging van dit model. Als we een Higgs boson vinden met de in het model bepaalde eigenschappen wordt ons beeld van hoe massa ontstaat bevestigd en wordt tevens bevestigd dat het vacuüm een niet triviale structuur heeft en de laagste energietoestand niet een lege ruimte is, maar een die gevuld is met een achtergrondveld.

Aan het vinden van het Higgs boson wordt dus veel aandacht besteed en in de elementaire deeltjesfysica staat het ontdekken van dit deeltje bovenaan het verlanglijstje.

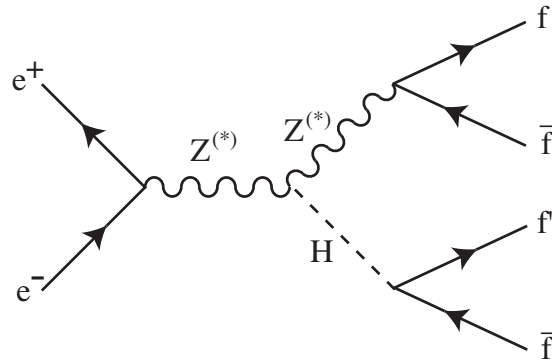
### De directe zoektocht

Van 1989 tot en met 2000 is geëxperimenteerd bij de LEP versneller en opslagring. LEP is de afkorting voor Large Electron Positron Collider, in het Nederlands grote electron positron botser. In de LEP versneller werden electronen en positronen met hoge energie opgeslagen in een ring van 27 kilometer in omtrek. De ring ligt op ongeveer 100 meter onder de grond in een bijna cirkelvormige tunnel van 27 km lengte. In Fig. 10.1 staat een luchtfoto van De electronen en positronen bewogen met gelijke energie, dus met gelijke snelheid tegen elkaar in. In de jaren 1989 tot en met 1996 waren de energie van het electron en positron zo afgesteld dat dominant Z bosonen zijn gevormd. Vanaf het eind van 1996 is de botsingsenergie in stapjes verhoogd tot meer dan twee keer de massa van het Z boson.



Figuur 10.1: Luchtfoto van het CERN laboratorium en omgeving. De grootste versnellertunnel is aangegeven met de grootste witte cirkel. In deze tunnel was de LEP (Large Electron Positron) versneller geplaatst en wordt op het moment de LHC (Large Hadron Collider) opgebouwd. De wat kleinere cirkel die in de grote cirkel ligt is de tunnel van de SPS, het Super Proton Synchrotron. Deze versneller is ook een tijd in gebruik geweest als een proton-anti-proton botser en heette toen het  $Spp\bar{S}$ . Rakend aan de grote cirkels midden onder in het beeld is het hoofdterrein van CERN herkenbaar als een driehoekig stuk bebouwd land. Op het CERN terrein zijn nog verschillende andere versnellers die nu hoofdzakelijk als voorversnellers worden gebruikt voor het SPS, LEP en de LHC. Het hoofdterrein van CERN is midden onder herkenbaar als een driehoekig bebouwd stuk grond. Linksonder is het plaatsje St. Genis-Pouilly te herkennen, linksboven Gex en recht bovenaan Divonne Les Bains. Ook herkenbaar zijn rechtsboven een deel van het meer van Genève, helemaal rechts een deel van het vliegveld Cointrin en linksboven de hoogste bergketen van de Jura.

Vanaf het begin is er de hoop geweest dat LEP het Higgs boson zou kunnen produceren en experimenten bij LEP het dus zouden kunnen detecteren. Het productiemechanisme van het Higgs boson bij LEP wordt gedomineerd door de productie van een Z boson dat vervolgens een Higgs boson afstraalt, het zogenaamde



Figuur 10.2: *Feynman diagram voor het dominante productieproces van Higgs bosonen bij de LEP versneller.*

Higgs-strahlungs diagram, naar analogie van het Bremsstrahlung diagram, waarbij een geladen deeltje een foton uitzendt (zie Fig. 10.2.) De reden dat dit proces het belangrijkste Higgs productieproces is komt omdat het  $Z$  boson zo'n grote massa heeft. Het Higgs boson koppelt dus met een grote koppelingsconstante aan het  $Z$  boson waardoor het proces erg waarschijnlijk wordt. Onderdrukking van het proces treedt op doordat het  $Z$  boson voor en na uitzending van het Higgs boson niet dezelfde invariante massa kan hebben, omdat de massa van het Higgs boson niet nul is. Bij een licht Higgs boson is dit verschil niet zo groot, maar bij een zwaar Higgs boson is het verschil in invariante massa uiteraard aanzienlijk.

Als de invariante massa van het  $Z$  boson afwijkt van de rustmassa van het  $Z$  boson, dan treedt onderdrukking van de waarschijnlijkheid van het proces op met een factor:

$$\frac{1}{s - M_Z^2 + 2iM_Z\Gamma_Z}. \quad (10.1)$$

Hierbij is  $\sqrt{s}$  de invariante massa van het  $Z$  boson in kwestie,  $M_Z$  de massa van het  $Z$  boson en  $\Gamma_Z$  de vervalsbreedte van het  $Z$  boson. De vervalsbreedte is een maat voor de waarschijnlijkheid dat een deeltje vervalst en wordt gekarakteriseerd door de levensduur van het deeltje als:

$$\Gamma = \frac{1}{\tau}, \quad (10.2)$$

waarbij  $\tau$  de gemiddelde levensduur van het deeltje is. Hoe korter de levensduur, hoe groter dus de vervalsbreedte. Omdat niet zowel voor als na het uitzenden van het Higgs boson door het  $Z$  kan gelden dat  $\sqrt{s} = M_Z$  komt er een onderdrukking van de waarschijnlijkheid. Deeltjes waarbij de invariante massa van een deeltje niet gelijk is aan de rustmassa van het deeltjes, worden ook wel *van de massaschil*

genoemd.<sup>1</sup> Deze deeltjes zijn altijd virtueel. Als het verschil tussen rustmassa en invariante massa groter wordt, wordt de levensduur van dit soort deeltjes, dat wil zeggen de tijd dat ze vervallen of door een ander deeltje worden opgenomen, korter. De bovenstaande onderdrukking heet propagatoronderdrukking, omdat die het gevolg is van de propagator van een virtueel deeltje.

Een fundamentele grens voor de productie van het Higgs deeltje wordt verder gevormd door de totale beschikbare invariante massa van het proces. In het geval van LEP, waarbij electronen en positronen met even grote, maar tegengesteld gerichte impuls botsen is de totale impuls van het proces nul en is alle energie beschikbaar om massa te maken. Dit soort botsingen heten ook wel botsingen in het zwaartepuntsstelsel. Het zwaartepunt van het electron-positron paar dat botst beweegt in dit stelsel niet. In ieder geval kunnen in dit geval geen Higgs bosonen worden gemaakt die meer massa hebben dan de beschikbare energie in het zwaartepuntsstelsel. Omdat tot 1996 de botsingsenergie was afgestemd op de massa van het Z boson konden in ieder geval geen Higgs bosonen worden gemaakt met een massa groter dan die van het Z boson zelf. In de praktijk bleek de limiet voor de Higgs boson massa die kon worden geproduceerd aanzienlijk lager te liggen door het effect van de propagatoronderdrukking van het Z boson in de eindtoestand.

Nu we besproken hebben hoe het Higgs boson kan worden geproduceerd moeten we natuurlijk ook nog weten hoe het kan worden gedetecteerd. Zoals gezegd is het dominante proces dat waarin een Z boson al dan niet virtueel of reëel wordt geproduceerd en vervolgens een Higgs boson afstraalt. In de eindtoestand zitten dan een Z boson en een Higgs boson. Beide deeltjes zijn zeer instabiel en vervallen vrijwel onmiddellijk (in minder dan een miljoenste van een miljardste van een miljardste seconde). Het Z boson kan vervallen in alle mogelijke fermion anti-fermion paren, uitgezonderd het die van het top quark, omdat de massa van het top quark meer is dan dat van het Z boson. Uit metingen bij de LEP versneller weten we dat het Z boson voor 70% van de gevallen in een quark-anti-quark paar vervalt, voor 10% in een paar elektrisch geladen leptonen en voor 20% in een neutrino anti-neutrino paar. Van het Higgs boson hebben we gezien dat het een koppelingssterkte aan andere deeltjes heeft die evenredig is aan de massa van het andere deeltje. Het Higgs boson zal daarom bij voorkeur vervallen in het zwaarste deeltje (en bijbehorend anti-deeltje) waarvan twee maal de massa kleiner is dan de massa van het Higgs boson zelf. Voor Higgs bosonen met een massa van minder dan 161 GeV, oftewel twee keer de massa van het W boson en een massa van meer dan 10 GeV zal het vooral vervallen in een b-quark anti-b-quark paar. Het op een-na-zwaarste deeltje waarin het Higgs boson met een massa uit bovenstaand gebied kan vervallen is het geladen tau-lepton en dat

---

<sup>1</sup>In het Engels off-mass-shell of in het kort off-shell.

wordt op de voet gevolgd door het c-quark. Het b-quark is echter circa drie maal zwaarder dan het tau lepton en omdat de koppeling in de werkzame doorsnede, en daarmee in de waarschijnlijkheid, in het kwadraat voorkomt is de kans dat een Higgs boson in een b-quark vervalft circa negen keer zo groot als dat het in een tau lepton vervalft. Preciezer blijkt dat voor een Higgs massa van 100 GeV het Higgs boson voor circa 85% in b-anti-b vervalft, voor 8% in tau leptonen en voor 5% in c-quarks. De precieze percentages variëren wat met de massa van het Higgs boson.<sup>2</sup> Als we nu de vervallen van zowel het Z boson als het Higgs boson in de eindtoestand beschouwen krijgen we de volgende mogelijke topologieën in de eindtoestand:

- Het Z boson vervalft in een quark anti-quark paar en het Higgs boson in een b-quark anti-b-quark paar. Dit kanaal heet het *vier jet kanaal*, omdat elk van de quarks een stroom van deeltjes zal veroorzaken, een jet.
- Het Z boson vervalft in een paar geladen leptonen en het Higgs boson in een b-quark anti-b-quark paar. Dit kanaal het lepton kanaal. Het geval waarin het Z boson naar een  $\tau^+\tau^-$  paar vervalft is wat apart, omdat het tau lepton zelf ook weer vervalft. Dat kan in een electron of muon, maar ook in een eindtoestand van mesonen (deeltjes die uit een quark en anti-quark zijn opgebouwd.) In alle gevallen zijn er ook een of twee neutrino's in de valse eindtoestand die niet worden gedetecteerd en dus zorgen voor missende energie en impuls.
- Het Z boson vervalft in een paar neutrino's en het Higgs boson in een b-quark anti-b-quark paar. Dit kanaal het missende energie kanaal, omdat er ten opzichte van de botsingsenergie aanzienlijk minder energie in de detector wordt gemeten. Over het algemeen zullen ook de twee jets van het Higgs boson verval in impuls niet optellen tot nul, omdat de neutrino's de balans in de impuls maken, maar niet worden geobserveerd.
- Gevallen waarbij het Higgs boson in een paar tau leptonen vervalft kunnen ook worden beschouwd. In de praktijk wordt dit alleen gedaan als het Z boson in een quark anti-quark paar vervalft. De topologie lijkt dan erg op die waarbij het Z boson in een tau paar vervalft en het Higgs boson in een paar b-quarks. Deze twee kanalen worden bij elkaar ook wel het tau kanaal genoemd.

De strategie om gevallen met een Higgs boson te identificeren is nu om naar de bovengenoemde topologieën te zoeken en vervolgens de invariante massa te

---

<sup>2</sup>De rede van deze variatie zijn hogere orde effecten. We komen op hogere orde effecten nog terug in een andere context.

bepalen van de Higgs vervalsproducten. Met name in het vier jet kanaal is het dan belangrijk om b-quarks van andere quarks te kunnen onderscheiden. Dit blijkt met enig succes te kunnen, maar we gaan er hier verder niet op in.

Helaas zijn gevallen met een Higgs boson niet de enige processen die de bovengenoemde topologie kunnen produceren in een detector. Mogelijke achtergronden zijn gevallen waarin het Z boson alleen wordt geproduceerd en dan vervalt in twee quarks, die vervolgens in een hogere orde proces nog eens in totaal twee gluonen afstralen. In dat geval zijn er ook vier hadron jets en hebben we een achtergrond in het vier jet kanaal. Deze gevallen zijn relatief makkelijk te herkennen doordat de jets ten gevolge van gluonen in dit geval meestal van lage energie zijn.

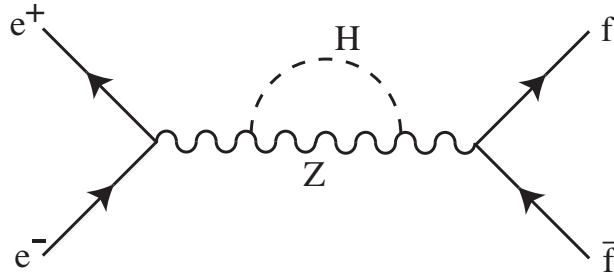
Belangrijkere achtergrond wordt gevormd door zogenaamde vier fermion gevallen. In deze gevallen worden twee Z bosonen gevormd of twee W bosonen. De kans dat dit gebeurt is ongeveer even groot of iets groter aan de kans dat een geval met een Higgs boson wordt geproduceerd. Deze achtergrondgevallen zijn echter zeer moeilijk van het Higgs boson signaal te onderscheiden. Het herkennen van b-quarks speelt hier een cruciale rol om Higgs bosonen te vinden temidden van de achtergrond.

Uiteindelijk gaat het in het experiment om hele lage aantallen te verwachten Higgs boson gevallen en kan de achtergrond ook tot enkele gevallen worden gereduceerd. De vraag is nu of als je drie gevallen ziet in de selectie en twee gevallen uit de achtergrond verwacht, je mag claimen dat je een Higgs boson geval hebt gezien. Dat is niet zo. De productie van de gevallen berust op toeval met een kans dat iets gebeurt. Dat wil zeggen dat je wel kan zeggen dat je gemiddeld twee achtergrond gevallen verwacht, maar dat van meting tot meting dit kan variëren en met ruwweg vergelijkbare kansen, een, twee of drie van die achtergrondgevallen voor kunnen komen. Een dergelijke redenering kunnen we ook opzetten voor het Higgs boson signaal. De exacte behandeling van de interpretatie van resultaten van dit soort selecties is wat gecompliceerd en wordt hier niet behandeld. Het zij wel vermeld dat hier in de laatste jaren grote vooruitgang in de wiskundige statistiek theorie is geboekt door de natuurkundigen die zich met deze metingen bezig houden.

In totaal zijn er vier verschillende experimenten gedaan bij de LEP versneller. De experimenten zijn getooid met de namen ALEPH, DELPHI, L3 en OPAL.<sup>3</sup> Het resultaat van de selecties van de verschillende experimenten zijn gecombineerd in een gezamenlijke waarschijnlijkheidsinterpretatie van de bevindingen van de verschillende experimenten. De uitkomst is dat we niet met enige zekerheid kunnen zeggen dat we een geval met een Higgs boson hebben gezien. Omdat we bij lage Higgs massa een groot aantal gevallen met Higgs bosonen verwachten kunnen we bij lage massa met enige zekerheid zeggen dat het Higgs boson

---

<sup>3</sup>De auteur dezes heeft negen jaar deel uitgemaakt van het OPAL experiment.



Figuur 10.3: *Feynman diagram voor een van de virtuele correcties waarbij het Higgs boson is betrokken.*

niet bestaat. Voor Higgs bosonen met een grote massa kunnen we alleen zeggen dat ze er zouden kunnen zijn. Om het geheel quantitatief te vertalen wordt een massa ingevoerd waaronder we voor elke Higgs boson massa kunnen zeggen dat de kans dat het Higgs boson bestaat minder is dan 5%. Deze limiet heet de 95% waarschijnlijkheids ondergrens voor de Higgs massa. De LEP experimenten hebben gezamenlijk vastgesteld dat met 95% waarschijnlijkheid Higgs boson massa's beneden 115 GeV zijn uitgesloten. Met andere woorden, als het Higgs boson bestaat heeft het zeer waarschijnlijk een massa van meer dan 115 GeV. Dit wordt genoteerd als:

$$M_H \geq 115 \text{ GeV (95\% CL)} \quad (10.3)$$

De afkorting “CL” staat voor *Confidence Level*, waarschijnlijkheid in het Nederlands.

## Indirecte hints

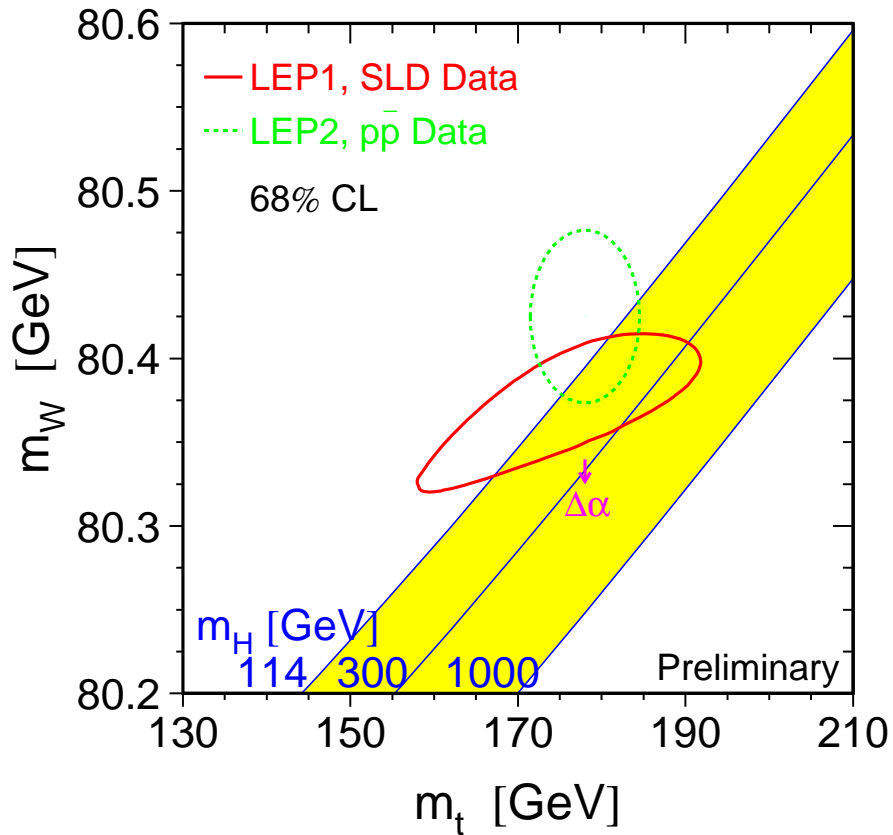
Behalve dat het Higgs boson direct kan worden geproduceerd als er genoeg energie voorhanden is, speelt het Higgs boson ook een rol in allerlei processen waarin het zelf niet wordt geproduceerd. Dit gebeurt door zogenaamde virtuele correcties. In Fig. 10.3 staan de Feynman diagrammen van een aantal van de belangrijkste virtuele correcties waarbij een Higgs boson is betrokken. Links staat de correctie van de Z propagator, rechts staat de correctie van de Z vervalsvertex. De grootte van de correcties ten gevolge van diagrammen met Higgs bosonen hangt af van de massa van het Higgs boson en het blijkt dat de grootte van de correctie bij benadering afhangt van de logaritme van de Higgs massa,  $\ln M_H$ . De typische grootte van de correctie is van de orde van een procent. Als we dus de waarschijnlijkheid van processen met een procent kunnen meten, dan kunnen we indirect de Higgs massa meten.

Door de virtuele correcties in quantummechanische processen blijken alle parameters van het Standaard Model op een zachte manier aan elkaar te hangen. De effectieve koppelingsconstanten, dus de koppelingsconstanten die we meten, hangen af van de massa van alle deeltjes in het Standaard Model door de virtuele vertex correcties. En op deze manier gaan ook de koppelingsconstanten zelf van elkaar afhangen, omdat bijvoorbeeld in een electromagnetisch proces met leptonen in de virtuele correcties ook quarks opduiken en de virtuele correcties daar weer op van de sterke koppelingsconstante afhangen. De massa van deeltjes hangt af van de virtuele correcties van de propagator en hangt daarmee ook af van de massa van alle andere deeltjes en van alle koppelingsconstanten. Gelukkig zijn deze correcties klein, zodat we ze kunnen berekenen in storingstheorie, zonder de gekoppelde differentiaalvergelijkingen helemaal op te lossen.

Twee parameters die relatief nauw gekoppeld blijken te zijn met de Higgs massa zijn de massa van het top quark en die van het W boson. Dit is niet verwonderlijk, omdat het top quark en het W boson zelf een grote massa hebben en daarom makkelijk aan het Higgs boson koppelen. In Fig. 10.4 staat de W massa uit tegen de top quark massa en wordt de meting aangegeven met een ellips.

Uiteindelijk zijn bijna alle metingen van observabele grootheden zoals werkzame doorsnedes en hoekverdelingen al dan niet uitgesplitst naar verschillende eindtoestanden (quarks en leptonen in de eindtoestand) afhankelijk van de massa van de Higgs door hogere orde processen. Deze hogere processen geven over het algemeen maar kleine correcties op het laagste orde proces en de afhankelijkheid van de gemeten grootheden van de Higgs massa is dan ook altijd zwak tot zeer zwak. Door alle metingen simultaan te gebruiken kan de beste schatting van de Higgs massa worden verkregen. Dit gebeurt in een zogenaamde electrozwakke fit van de theorie aan de experimentele data, waarbij de Higgs massa wordt aangepast om de beste overeenstemming tussen de theoretische voorspelling en de experimentele data te vinden. Het resultaat van deze aanpassing wordt gegeven in Fig. 10.5. Het minimum van de parabool in deze figuur geeft de meest waarschijnlijke massa van het Higgs boson aan. De parabool geeft als functie van de massa van de Higgs aan hoe goed de aanpassing is in termen van een parameter  $\Delta\chi^2$ . Het gebied met een waarde  $\Delta\chi^2 < 2$  correspondeert met een 95% waarschijnlijkheidsinterval voor de Higgs massa. De brede band om de parabool geeft de theoretische onzekerheid aan in de berekening. Nemen we deze onzekerheid mee, dan zien we uit deze combinatie van metingen dat de Higgs massa met meer dan 95% zekerheid moet liggen in het interval  $(50 \text{ GeV}) < M_H < (240 \text{ GeV})$ . Op grond van de directe zoektocht naar de Higgs is hiervan het interval  $M_H < (114 \text{ GeV})$  al uitgesloten met meer dan 95% zekerheid, zodat we met een zekerheid van meer dan 95%

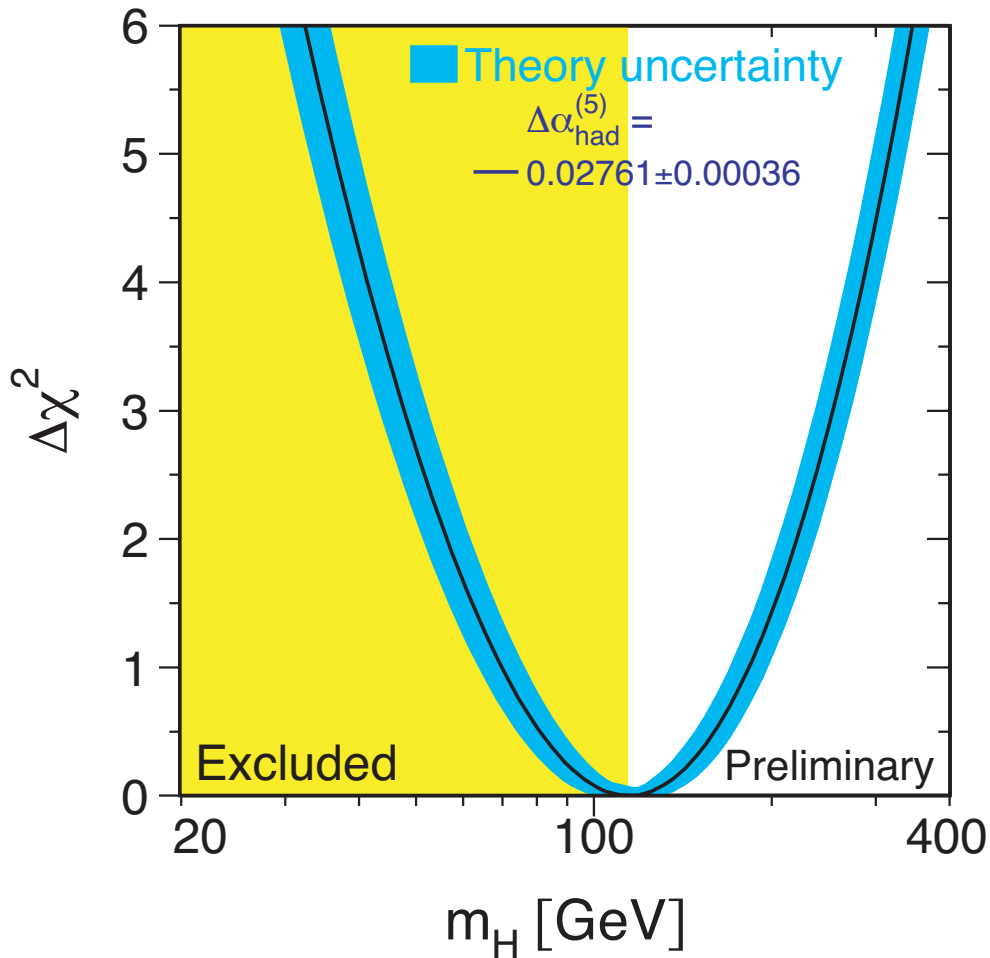




Figuur 10.4: Verticaal staat de  $W$  massa uit tegen horizontaal de top quark massa. De ellips geeft de huidige meting weer, met midden in de ellips de waarde van de  $W$  en top massa die zijn gemeten en de ellips zelf de afwijking daarvan met één standaard deviatie. Het is 67% waarschijnlijk dat de werkelijke waarden van  $W$  en top massa binnen het gebied van één standaard deviatie liggen. De gestippelde ellips is het resultaat van directe onafhankelijke metingen van de  $W$  en top massa. De doorgetrokken lijn ellips is het resultaat van indirecte metingen van de  $W$  en top massa door andere observabelen.

concluderen dat de Standaard Model Higgs een massa moet hebben van

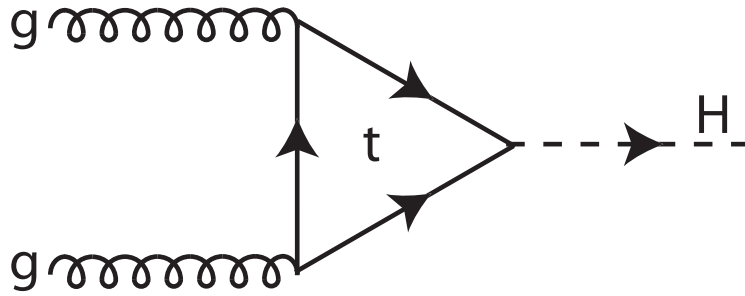
$$(114 \text{ GeV}) < M_H < (240 \text{ GeV}) \quad (10.4)$$



Figuur 10.5: *Indirecte Higgs massa meting.* De parabolen geven de waarschijnlijkheid aan dat een bepaalde Higgs massa overeenkomt met de gemeten virtuele correcties aan alle processen die voor meting voorhanden waren.

## Buigen of barsten bij de LHC

Bij de Large Hadron Collider die in aanbouw is bij CERN en in 2007 in werking moet worden gebracht, worden protonen op protonen gebotst bij een zwaartepuntsenergie van 14 TeV. Deze energie is voldoende om Standaard Model Higgs bosonen te produceren met een massa tot ten minste 1 TeV. Gegeven wat we nu experimenteel al weten moet het Higgs boson dus bij de LHC worden geproduceerd, als het Standaard Model correct is. Bij de LHC is het dus buigen, Higgs produceren en eraan kunnen meten, of barsten, er wordt geen Higgs gevonden en het Standaard Model is niet correct.



Figuur 10.6: *Laagste orde Feynman diagram voor Higgs productie door gluon fusie.*

Zonder daar hier op in te gaan is het bij de LHC mogelijk om aan processen te meten die waarschijnlijkheden van meer dan 100% krijgen om te gebeuren, als het Higgs boson niet bestaat. In dat geval moet er dus een ander mechanisme zijn dat deze waarschijnlijkheid in toom houdt en leren we dus ook wat er in plaats van de Higgs is.

Twee productieprocessen van Higgs bosonen spelen een belangrijke rol bij de LHC. Het belangrijkste kanaal, want met de grootste werkzame doorsnede is het proces waarbij twee gluonen fuseren tot een Higgs. Dit is een contraïntuïtief proces, want gluonen zijn massaloos en koppelen daarom niet direct aan het Higgs boson. Het proces is dan ook een hogere orde proces waarbij de gluonen aan een top quark koppelen en het top quark aan het Higgs boson. Het simpelste diagram (Fig. 10.6) heeft dan drie virtuele top quarks. De onderdrukking van de propagatoren van die top quarks wordt echter ruimschoots gecompenseerd doordat de koppeling van de gluonen aan het top quark met de sterke koppelingsconstante gaat, die relatief groot is, en de koppeling van het top quark aan het Higgs boson zelfs een koppeling heeft die van de orde van 1 is.

Als de Higgs relatief licht is ( $M_H < 135$  GeV) dan vervalt die dominant in b-quarks. Een Higgs productie manifesteert zich dan als twee b-quark jets. De productie van b-quark jets in de sterke wisselwerking is enorm, zelfs bij b-quark energieën als die bij Higgs verval. Het is dan ook praktisch onmogelijk om Higgs productie zo te herkennen in een detector. Een ander belangrijk productiekanal is dan ook de geassocieerde productie van een W- of Z-boson en een Higgs boson. In dit geval is de productie werkzame doorsnede kleiner, maar kan het geval worden herkend door het verval van het W- of Z-boson. Met name vervallen van het W- of Z-boson in leptonen zijn daarvoor zeer geschikt.

Higgs boson productie door fusie van een quark en een anti-quark of de verstrooiing van twee quarks speelt geen rol van betekenis bij het vinden van en meten aan het Higgs boson.

Zoals opgemerkt vervalft een relatief licht Higgs boson dominant in b-quarks en is de productie van b-quarks in sterke wisselwerkingsprocessen overweldigend. Zelfs in het geval van geassocieerde productie met een W- of Z-boson is het experimenteel heel moeilijk om het Higgs boson te herkennen als het in b-quarks vervalft. Een mogelijk detectiekanaal is dan het verval van het Higgs boson in twee fotonen. Ondanks dat fotonen, omdat ze massaloos zijn, niet direct koppelen aan het Higgs boson, kan dit proces op dezelfde manier als de koppeling van gluonen aan het Higgs in hogere orde. Experimenteel weegt de kleine kans dat het Higgs vervalft in twee fotonen op tegen het feit dat het detectiekanaal relatief schoon is en fotonen met goede energieresolutie kunnen worden herkend en gereconstrueerd in de detector.

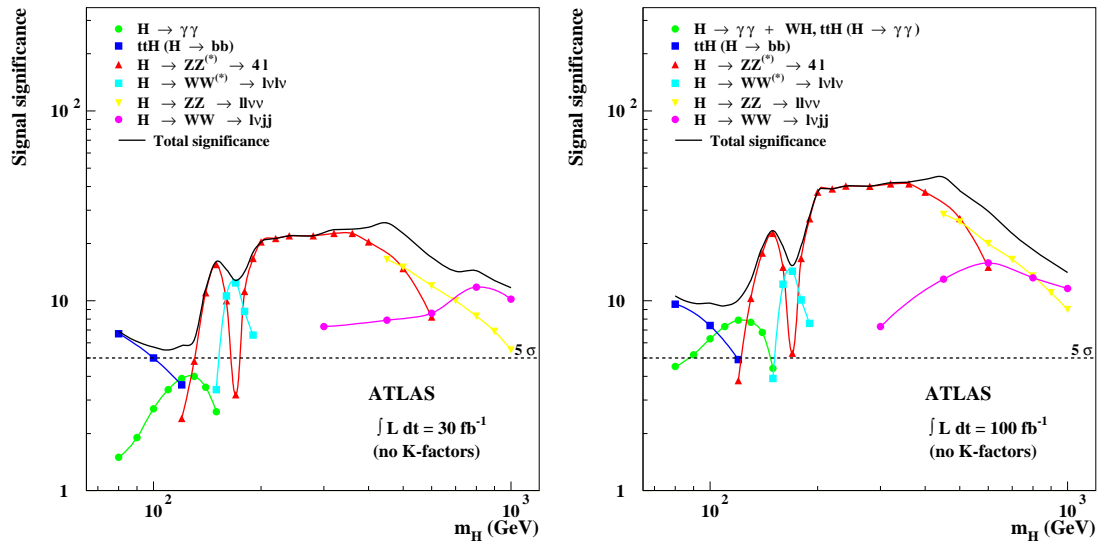
De achtergrond van door QCD geproduceerde b-quarks neemt exponentieel af met de energie van de quarks. Bij hogere Higgs massa krijgen de b-quarks waarin het vervalft zo'n grote energie dat die energie onderscheidend genoeg is om Higgs bosonen te herkennen.

Bij Higgs massa's boven de 135 GeV wint het verval in paren van W-bosonen snel aan terrein. Deze vervallen, en met name ook de Higgs vervallen in twee Z-bosonen die dan ook gaan meespelen, zijn vrij makkelijk te detecteren en reconstrueren. Het *gouden kanaal* voor Higgs boson verval is in twee Z-bosonen die vervolgens elk in een  $e^+e^-$  paar of  $\mu^+\mu^-$  paar vervallen.

In Fig. 10.7 staat de voorspelling van het ATLAS experiment voor hoe goed ze Higgs boson vervallen van achtergrond kunnen onderscheiden. Dit is uitgezet als het aantal standaard deviaties dat het signaal boven de achtergrond uit komt als functie van de Higgs boson massa. Het is duidelijk te zien dat relatief lage Higgs boson massa's de grootste experimentele uitdaging is. Merk op dat de uitkomsten van de LEP experimenten juist een voorkeur voor een dergelijke lage Higgs massa laten zien.

## Anomalieën

Een curieus effect van het Higgs vacuüm is dat het is gedegenerereerd. Er zijn oneindig veel vacua die in principe allemaal equivalent zijn. Het is dan ook mogelijk dat het ene vacuüm over gaat in het andere vacuüm door een draaiing van de ijkvelden, dus in de electrozwakke wisselwerking bijvoorbeeld een SU(2) draaiing. Als deze draaiing niet heel klein is, dan loopt de kortste weg in het vacuüm energielandschap door de berg in het midden van de Higgs potentiaal. In de quantummechanica is een dergelijk overgang dan toch mogelijk, ondanks dat door een potentiaalberg gegaan moet worden. Dit effect heet quantumtunneling. Deze overgang van het ene vacuüm naar het andere gaat gepaard met een virtueel deeltje dat soliton wordt genoemd. Het soliton krijgt men nooit te zien, maar



Figuur 10.7: Detectiegevoeligheid voor het Standaard Model Higgs boson zoals voorzien bij het ATLAS experiment. De algemeen geaccepteerde significantie voor een ontdekking van een nieuw deeltje is een signaal boven de achtergrond van meer dan vijf standaard deviaties. Dit is aangegeven met de horizontale stippellijn. Links staat het resultaat voor een geïntegreerde luminositeit van  $30 \text{ fb}^{-1}$ , corresponderend met drie jaar meten, terwijl rechts een luminositeit van  $100 \text{ fb}^{-1}$  is genomen, wat correspondeert met ongeveer vijf jaar bedrijf van de versneller en detector. Omdat er twee experimenten zijn, ATLAS en CMS, kan in de praktijk de benodigde tijd voor een ontdekking met een factor twee worden bekort als de experimenten hun gegevens combineren.

andere deeltjes kunnen er wel aan koppelen en ondergaan dan een overgang, waarbij quarks in drietallen kunnen worden gemaakt of vernietigd en leptonen individueel kunnen worden gemaakt en vernietigd. Een mogelijk proces onder invloed van zo'n soliton is dan bijvoorbeeld een proton (drie quarks) dat in een positron (één geladen lepton) overgaat. Dergelijke overgangen zijn dus in het Standaard Model mogelijk. Dit is voor het eerst uitgewerkt door Prof. 't Hooft in [30]. Deze overgangen die behoud van baryonen en leptonen schendende zijn een van de drie noodzakelijke ingrediënten om te verklaren waarom in ons heelal een overschot van materie over anti-materie bestaat. Over dit onderwerp kan meer worden gelezen in [31].



# Hoofdstuk 11

## Neutrino Menging

Zoals we reeds eerder hebben gezien zijn er drie verschillende types neutrino's:  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  en  $\nu_\tau$ . Deze neutrino's hebben allemaal exact dezelfde eigenschappen. In de quantummechanica betekent dit dat lineaire superposities van verschillende neutrino toestanden ook valide oplossingen zijn van de quantummechanische bewegingsvergelijkingen.

Vrije deeltjes evolueren in de tijd als de oplossing van de relativistische golfvergelijking, bijvoorbeeld de Klein-Gordon vergelijking 5.1.

$$\Psi(\vec{x}, t) = e^{-i\hbar(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}. \quad (11.1)$$

Met de relativistische relatie tussen energie en impuls  $E = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p} c^2 + m^2 c^4}$ . Voor ultrarelativistische deeltjes met  $|\vec{p}| \gg m$  geldt in goede benadering  $E = |\vec{p}|c + m^2 c^2 / (2|\vec{p}|)$ . Verder is  $|\vec{p}|c = E$  voor  $|\vec{p}| \gg m$ . De golfvergelijking wordt hiermee:

$$\Psi(\vec{x}, t) = e^{-i\hbar(m^2 c L / (2E))}, \quad (11.2)$$

waarbij voor ultrarelativistische deeltjes de afgelegde weg  $L = ct$  is.

Als nu de verschillende neutrino's verschillende massa hebben zullen hun relatieve fasen uit elkaar gaan lopen als ze op dezelfde tijd op dezelfde plaats worden gemaakt, door de verschillende  $m$  in de golfvergelijking.

Als een neutrino wordt gemaakt wordt dat gedaan in de zwakke wisselwerking door koppeling aan een W boson of een Z boson. De neutrino's die dan worden gemaakt corresponderen met de geladen leptonen, e,  $\mu$  en  $\tau$ , dus  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  en  $\nu_\tau$ . Als deze neutrino soorten nu *niet* corresponderen met de massa eigentoestanden, die we  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  en  $\nu_3$  zullen noemen, dan bestaat bijvoorbeeld een  $\nu_e$  uit een mengsel van  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  en  $\nu_3$ .

Voor drie soorten is dat samen te vatten met een vectorvergelijking:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} \nu_1 + U_{e2} \nu_2 + U_{e3} \nu_3 \\ U_{\mu1} \nu_1 + U_{\mu2} \nu_2 + U_{\mu3} \nu_3 \\ U_{\tau1} \nu_1 + U_{\tau2} \nu_2 + U_{\tau3} \nu_3 \end{pmatrix}. \quad (11.3)$$

De Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata matrix

$$U_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \quad (11.4)$$

heeft van de negen elementen er vier (4) onafhankelijk te kiezen. Dit kan worden gezien als een (complexe) rotatie van de basis van eigentoestanden  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  en  $\nu_\tau$  naar die van  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  en  $\nu_3$ , waarbij met name de totale waarschijnlijkheid, dit is de totale lengte van de toestand geïntegreerd over de hele ruimte, behouden moet blijven (anders zouden er zomaar deeltjes ontstaan of vernietigd worden.)

Als we nu als voorbeeld een systeem van twee typen neutrino's beschouwen, dan kunnen we kijken wat het betekent als een neutrino bijvoorbeeld als  $\nu_e$  wordt gemaakt, vervolgens als  $\nu_1$  en  $\nu_2$  door de ruimte en tijd propageert, en vervolgens na een tijdje op een andere plaats bijvoorbeeld als  $\nu_\mu$  wordt waargenomen. Dat lijkt raar, is het misschien ook wel, maar gebeurt wel !

We nemen voor de mengmatrix:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (11.5)$$

De waarschijnlijkheid  $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}$  om van een afgelegde weg  $L \approx ct$  van  $\nu_e$  naar  $\nu_\mu$  te veranderen is uit te rekenen en wordt gegeven door:

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = \sin^2(2\theta) \sin^2 \left( 1.267 \frac{\Delta m^2 L}{4E} \right), \quad (11.6)$$

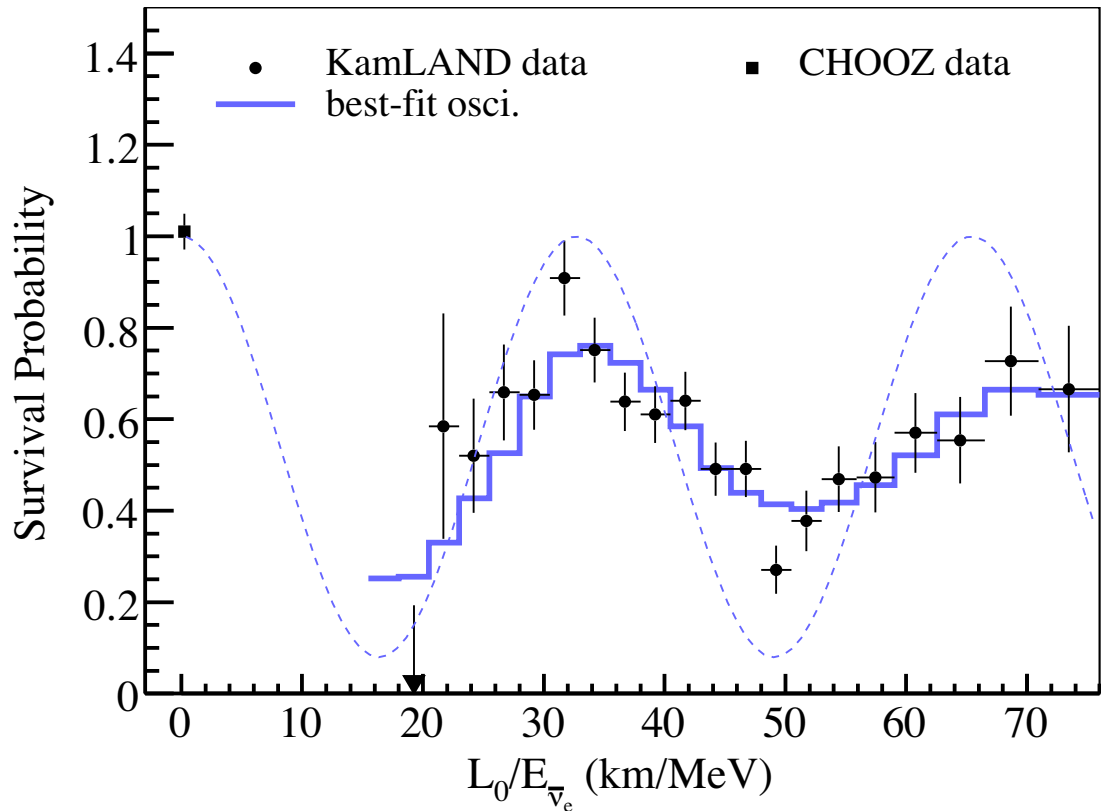
als  $E$  in GeV eenheden wordt genomen,  $L$  in kilometers en  $\Delta m^2 = |m_1^2 - m_2^2|$  in eV eenheden. De hoek  $\theta$  is die in de twee-neutrino mengmatrix hierboven.

In werkelijkheid zijn er drie typen neutrino's en dat compliceert de zaak, maar het principe is hetzelfde als voor het geval van twee neutrino's.

Inmiddels zijn er diverse experimenten die het fenomeen van neutrino menging (ook wel neutrino oscillatie) hebben waargenomen. Omdat uit de formule 11.6 blijkt dat verandering van neutrino type alleen kan optreden als het kwadratisch massa-verschil  $\Delta m^2 \neq 0$ , moet worden geconcludeerd dat neutrino's een massa hebben (hoewel dat een hele kleine massa is.)

Een spectaculaire bevestiging van de neutrino oscillaties is bijvoorbeeld geleverd door het KamLAND experiment in de Kamioka mijn in Japan. Dit experiment bestudeert de electron-neutrino flux van een heel scale van kernreactoren in Japan en Zuid-Korea. Deze reactoren staan allemaal op verschillende afstand  $L$  van het experiment, zodat het  $L/E$  gedrag kan worden bestudeerd. In Fig. 11.1 staat dit gedrag uitgezet genormeerd op de electron-neutrino flux van de reactoren.





Figuur 11.1: *Waarschijnlijkheid om een electron-neutrino waar te nemen na een afstand  $L$  na productie van een electron-neutrino. De normering op de neutrino energie  $E$ , zodat gekeken wordt naar het gedrag in  $L/E$  is nodig omdat niet alle neutrino's bij gelijke energie worden gemaakt.*



# Appendix A

## Wiskunde: De taal van de natuurkunde

### Complex is reëler

Iedereen kent intuïtief de reële getallen. Zij vormen de continue getallenlijn. Ze bevatten alle gehele getallen, ook de negatieve, maar ook alle breuken en nog veel meer getallen daartussenin.

Laten we nu eens een vergelijking beschouwen van een polynoom die gelijk is aan nul, bijvoorbeeld:

$$x^2 = 1 \tag{A.1}$$

Er zijn nu twee reële getallen,  $x = -1$  en  $x = 1$  die aan deze vergelijking voldoen. Beschouwen we nu:

$$x^2 = -1 \tag{A.2}$$

dan zien we dat er geen reële getallen zijn die aan deze vergelijking voldoen. Kortom er zijn polynoomvergelijkingen die opgelost kunnen worden met reële getallen, maar er zijn er ook waarvoor dat niet geldt.

Als er nu een getal zou bestaan waarvoor geldt:

$$i^2 = -1 \tag{A.3}$$

dan is het natuurlijk evident dat de vorige vergelijking is op te lossen, maar ook dat het getal  $i$  geen element is van de reële getallen.

Laten we een nieuwe verzameling van getallen invoeren die kunnen worden geschreven als:

$$x = a + b \cdot i \tag{A.4}$$

waarin  $a$  en  $b$  reële getallen zijn. Deze verzameling van de getallen die zo geschreven kunnen worden, zullen we de complexe getallen noemen. Het blijkt dan dat

alle polynoomvergelijkingen kunnen worden opgelost, en verder dat het aantal nulpunten precies gelijk is aan de graad van het polynoom, dat wil zeggen de hoogste macht die in het polynoom voorkomt. (Soms moeten we hiervoor dan wel hetzelfde nulpunt meerdere keren tellen.)

Het is natuurlijk leuk dat deze complexe getallen ervoor zorgen dat alle polynoomvergelijkingen zijn op te lossen, maar de betekenis strekt toch echt verder. Om dat in te zien zullen we eerst wat eigenschappen van complexe getallen bekijken.

Complexe getallen kunnen we dus opvatten als paren van reële getallen. Ze zijn dus ook in het platte vlak te tekenen, omdat elk punt daar precies twee reële coördinaten heeft. Het eerste getal van het paar wordt opgevat als de coëfficiënt van de reële as, die conventioneel horizontaal wordt getekend. Het tweede getal wordt opgevat als de coëfficiënt van de imaginaire as, de as die met  $i$  vermenigvuldigt. Dit verklaart ook meteen de keuze van het symbool  $i$  als *imaginaire factor*. Behalve dat we complexe getallen op kunnen vatten als een punt in het twee-dimensionale vlak, kunnen we ze ook opvatten als een vector, namelijk de vector van de oorsprong  $(0, 0)$  naar het punt dat door de coördinaten van het complexe getal worden gegeven.

Complexe getallen kunnen bij elkaar worden opgeteld. Als  $x = a + bi$  en  $y = c + di$  complexe getallen zijn, met  $a, b, c, d$  reëel, dan geldt voor hun som:

$$z = x + y = (a + c) + (b + d)i \quad (\text{A.5})$$

De reële coëfficiënten worden dus paarsgewijs opgeteld. In het platte vlak ziet dat eruit als de optelling van twee vectoren.

Complexe getallen kunnen ook met elkaar worden vermenigvuldigd:

$$z = x \cdot y = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad (\text{A.6})$$

Dit resultaat kan makkelijk worden bereikt door de haakjes uit te werken en uit te vermenigvuldigen, de factor  $i^2$  door  $-1$  te vervangen, en vervolgens de coëfficiënten met en zonder  $i$  bij elkaar te vegen.

Laten we weer terug gaan naar de mogelijkheid om een complex getal als een vector te schrijven. Een vector kunnen we ook zien als een lijnstuk met een lengte en een richting. Precies zo kunnen we een complex getal ook zien als een lengte en een richting. Alleen heet de lengte van een complex getal de absolute waarde en de richting wordt gegeven door de complexe fase.

De absolute waarde van een complexe getal,  $|x|$ , volgt makkelijk uit de interpretatie als vector met de stelling van Pythagoras:

$$|x| = |(a + bi)| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{A.7})$$

De fase van een complex getal,  $\phi(x)$ , wordt gegeven door de hoek die de corresponderende vector in het platte vlak maakt met de reële as:

$$\phi(x) = \phi(a + bi) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad (\text{A.8})$$

Een complex getal is in termen van reële getallen dus behalve als  $x = a + bi$  ook te schrijven als  $x = |x| \cos(\phi(x)) + |x| \sin(\phi(x)) i$ , waarbij de relatie tussen  $a, b$  en  $|x|, \phi(x)$  hierboven werd gegeven. Kortweg wordt de tweede vorm ook wel geschreven als  $x = r \cos(\phi) + r \sin(\phi) i$ , dus  $r = |x|$  en  $\phi = \phi(x)$ .

Door gebruik te maken van een e-macht kunnen we dit nog compacter schrijven. Het blijkt dat er geldt:

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi) \quad (\text{A.9})$$

zodat we een complex getal ook kunnen schrijven als:

$$x = a + bi = r \cos(\phi) + r \sin(\phi) i = r e^{i\phi} \quad (\text{A.10})$$

Maken we gebruik van de gewone eigenschappen van de e-macht dan kunnen we de vermenigvuldiging van twee complexe getallen ook schrijven als:

$$x_1 \cdot x_2 = (r_1 e^{i\phi_1}) \cdot (r_2 e^{i\phi_2}) = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)} \quad (\text{A.11})$$

Dus de absolute waarden worden met elkaar vermenigvuldigd en de complexe fasen worden bij elkaar opgeteld.

## Extra dimensies

Afbeeldingen in de ruimte kunnen op de elegante manier in de wiskunde worden voorgesteld met matrices. Een matrix is een groep getallen die bij elkaar worden gehouden door haakjes. Voordat we hier formules voor op gaan schrijven kijken we eerst naar de meetkundige interpretatie van matrices. In Fig. A.1a) wordt een punt in het platte vlak uitgebeeld. Een punt in het platte vlak, dat twee dimensies heeft, kan worden beschreven met twee coördinaten die de afstand vanaf de oorsprong aangeven in twee verschillende richtingen. De twee richtingen die we daarvoor gebruiken moeten natuurlijk niet in elkaars verlengde liggen, ze moeten *onafhankelijk* zijn. Verder is het gebruikelijk de richtingen van de coördinaatassen loodrecht op elkaar te kiezen. In dat geval spreken we van een orthogonaal assenstelsel. Het is verder gebruikelijk de afstandsmaat langs de twee assen dezelfde te nemen. Het assenstelsel heet dan orthonormaal (als het ook al orthogonaal was.) Het is natuurlijk ook van belang te weten waar de oorsprong

van het assenstelsel ligt, dat definieert het punt met  $x = 0$  en  $y = 0$ . Hebben we dit allemaal afgesproken, dan ligt elk punt precies vast door het twee coördinaten toe te kennen.

Nu kunnen we afbeeldingen maken van het platte vlak op een ander plat vlak. Een speciale groep van afbeeldingen, zijn de lineaire afbeeldingen. Voor lineaire afbeeldingen van het platte vlak geldt:

$$\begin{cases} x' = a_{11} x + a_{12} y \\ y' = a_{21} x + a_{22} y \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

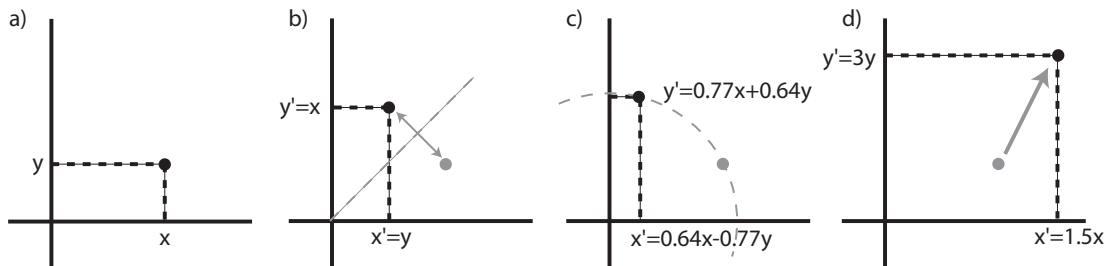
waarbij  $(x', y')$  de coördinaten zijn van de afbeelding in het nieuwe vlak en  $(x, y)$  de coördinaten van het punt in het oude vlak dat wordt afgebeeld. De coëfficiënten  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  zijn willekeurige getallen waarmee de oude coördinaten worden vermenigvuldigd. Voor het gemak tekenen we vaak het nieuwe vlak over het oude heen en identificeren we dus de twee vlakken met elkaar. Een belangrijke eigenschap van lineaire transformaties is dat de oorsprong weer op de oorsprong wordt afgebeeld.

In Fig. A.1b) wordt het oorspronkelijk punt  $(x, y)$  afgebeeld door te spiegelen in de diagonaal tussen de  $x$ - en  $y$ -as in, zoals staat aangegeven. In formulevorm kunnen we dat beschrijven met:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

en de coëfficiënten nemen dus de simpele vorm aan:

$$\begin{array}{ll} a_{11} = 0 & a_{12} = 1 \\ a_{21} = 1 & a_{22} = 0 \end{array} \quad (\text{A.14})$$



Figuur A.1: Voorbeelden van lineaire transformaties in twee dimensies (ofwel het platte vlak). In figuur a) wordt een punt in het platte vlak uitgebeeld met coördinaten  $(x, y)$ . In b) wordt dat punt gespiegeld in een diagonale lijn door de oorsprong. In c) wordt het punt geroteerd over een hoek van  $50^\circ$  tegen de klok in. In d) wordt een willekeurige schaal transformatie uitgevoerd die de lengtes in de  $x$  richting met 1.5 vermenigvuldigt en in de  $y$  richting met 3.

Laten we nu de notatie wat veranderen om het afbeeldingskarakter te accentueren. Formule A.12 kan ook worden geschreven als:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

De objecten

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

heten *vectoren* en stellen een punt in de ruimte voor. Het object

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

heet een *matrix* (meervoud *matrices*). De correspondentie tussen formules A.15 en A.12 wordt gegeven door de vermenigvuldingsregel voor matrices en vectoren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

en de regel dat een gelijkheid van vectoren een gelijkheid van *alle componenten* van die vectoren betekent.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

De vermenigvuldigingsregel voor matrices in woorden is dat *de matrixcoëfficiënten per rij worden vermenigvuldigd met de vectorcomponenten per kolom en dat de producten van elke matrixcoëfficiënt en vectorcomponent bij elkaar worden opgeteld*.

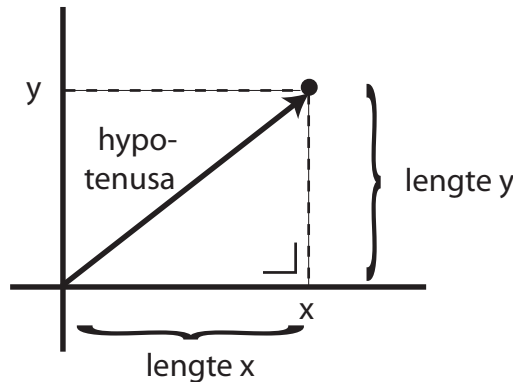
We kunnen formule A.15 nu samenvatten als:

$$\vec{r}' = \mathbf{A}\vec{r} \quad (\text{A.20})$$

De pijltjes boven de  $r$  geven aan dat het om een vector gaat. De vette letter  $\mathbf{A}$  dat het om een matrix gaat. Dit is puur een notationele conventie die ik zal gebruiken. In andere boeken worden andere notaties gebruikt.

We hadden al gezien dat een spiegeling in de diagonaal tussen de  $x$ - en  $y$ -as correspondeert met de matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$



Figuur A.2: Illustratie van de stelling van Pythagoras. Omdat de  $x$ -as loodrecht op de  $y$ -as staat is de afstand van het punt  $(x, y)$  tot de oorsprong gegeven door de lengte van de hypotenusa van de gevormde driehoek,  $h$ , en geeft de stelling van Pythagoras voor deze lengte  $h = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Een rotatie van punten in het platte vlak over een hoek  $\phi$  tegen de klok in kan nu worden voorgesteld met de matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

en dit geldt voor een willekeurige rotatiehoek  $\phi$ . In Fig. A.1c) is dit uitgebeeld voor een rotatie over een hoek van  $50^\circ$ .

Als verder voorbeeld is in Fig. A.1d) de transformatie uitgebeeld die correspondeert met de matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Een belangrijk verschil tussen de laatste afbeelding en de voorbeelden van spiegeling en rotatie die eraan voorafgingen is dat in spiegeling en rotatie de afstand van de punten tot de oorsprong voor en na de afbeelding hetzelfde is. Een equivalente formulering hiervan is dat de lengte van vectoren invariant is

$$|\vec{r}'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\vec{r}| \quad (\text{A.24})$$

waarbij de stelling van Pythagoras is gebruikt voor de lengte van de vectoren, een lengte die hetzelfde is als de afstand van het corresponderende punt tot de oorsprong. Dit is geïllustreerd in Fig. A.2. Matrices die de lengte van vectoren behouden worden *unitair* genoemd. Binnen de groep van de unitaire matrices kunnen we nog twee subgroepen onderscheiden. Bij rotatie wordt de notie van links en rechts, de oriëntatie, behouden in de afbeelding. Bij spiegeling is dat niet



zo. Bij spiegeling van twee punten kan vanuit het ene punt gezien het andere van links naar rechts verhuizen. De wiskundige manier om deze twee subgroepen uit elkaar te houden is het teken van de *determinant*. De determinant van de matrix  $\mathbf{A}$  wordt gegeven door

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \quad (\text{A.25})$$

Voor unitaire matrices is dit getal altijd  $\pm 1$ . Voor spiegelingen is het  $-1$  en voor rotaties  $+1$  (zie opgave A.7). De subgroep van matrices waarvoor de determinant  $+1$  is worden de *speciale unitaire* matrices genoemd.

Indachtig de uitbreiding van de reële getallen naar de complexe getallen kunnen we de matrices nu generaliseren naar afbeeldingen van bijvoorbeeld vectoren van twee complexe getallen. De matrixelementen zelf kunnen dan uiteraard ook complex zijn. In dat geval kunnen we in twee dimensies de afbeelding niet makkelijk meer grafisch voorstellen, maar het werkt niet onredelijk om het tot nu toe gegeven grafische beeld in het achterhoofd te houden. De groep van unitaire matrices wordt aangegeven met het symbool  $U(N)$ , waarbij  $N$  het aantal dimensies is van de ruimte waarop de bijbehorende matrices werken. Voor speciale unitaire matrices wordt die groep aangegeven met  $SU(N)$ . In bovenstaande voorbeelden vormen de spiegelingen en rotaties in twee dimensies samen de groep  $U(2)$ , terwijl de rotaties alleen in twee dimensies de groep  $SU(2)$  zijn. Deze groepen werken op de desbetreffende ruimtes van  $N$  dimensies van complexe getallen. Een speciaal geval vormt de groep  $U(1)$ . Deze afbeeldingen kunnen worden voorgesteld als de vermenigvuldiging van een complex getal (een element van de een-dimensionale complexe ruimte) met een getal dat absolute waarde 1 heeft. Zoals we konden zien bij formule A.10 in sectie A kan die transformatie dus worden voorgesteld als de vermenigvuldiging met een getal van de vorm

$$e^{i\phi} \quad (\text{A.26})$$

waarbij  $\phi$  een reëel getal is. Een dergelijke afbeelding wordt een complexe faseverschuiving genoemd.



## Appendix B

# Deeltjes versnellers: Een bron van deeltjes

De voortgang in de elementaire deeltjesfysica is voor een niet gering gedeelte te danken aan de mogelijkheid deeltjes te versnellen en vervolgens aan botsingen te laten deelnemen bij hoge energie. Aan deze bezigheid dankt de elementaire deeltjesfysica zijn alternatieve naam: de hoge energiefysica.

Een hoge energie, en dus een grote impuls, heeft twee voordelen. Quantummechanisch gezien hoort een grote impuls bij een grote ruimtelijke resolutie, oftewel een groot vermogen om kleine details in de ruimte te onderscheiden. Hoogenergetische deeltjes zijn dus bruikbaar als een microscoop om kleine structuren te kunnen bestuderen. Het ruimtelijk oplossend vermogen van een versneller van ongeveer 1 TeV, de hoogste energie nu in gebruik, is minder dan  $10^{-15}$  m. Dit is meer dan een miljoen keer kleiner dan de nanofysicaschaal die tegenwoordig in de fysica in de mode is.

Vanuit het oogpunt van de relativiteitstheorie geeft een hoge energie de mogelijkheid deeltjes te produceren met een grote massa, via  $E = mc^2$ . Het blijkt dat er allemaal (elementaire) deeltjes bestaan met een grote massa die niet direct relevant zijn voor de fysica van het dagelijks leven, maar een enorme impact hebben op de structuur van de theorie.

## Deeltjesbronnen

Deeltjesbronnen voor geladen elementaire deeltjes zijn er in feite twee.

Electronen worden over het algemeen geproduceerd door ze te verdampen uit een gloeidraad. Dit is de techniek die ook wordt gebruikt in televisiebeeldbuizen. Het idee is de draad zo warm te stoken dat de kinetische energie van de elektronen in het metaalrooster boven de bindingsenergie van de elektronen in dat rooster

uitkomt. De snelste elektronen zullen dan uit het metaal schieten. De elektronen die uit het metaalrooster komen plegen zich in de buurt daarvan op te houden. Om ze “op te pakken” wordt een spanningsverschil aangelegd tussen de gloeidraad en een ander metaal voorwerp in de buurt. Als dat voorwerp een ringvorm heeft worden de elektronen erdoor aangetrokken, maar door alle delen van de ring evenveel. Het effect is dat veel elektronen door het gat van de ring zullen schieten. We hebben dan het begin van een deeltjesbundel. Ook dit principe wordt in de televisiebeeldbuis gebruikt.

Protonen zijn de andere “elementaire” deeltjes die met een deeltjesbron kunnen worden gemaakt. Dat kan bijvoorbeeld door waterstofgas in een volume te plaatsen met een grote negatieve potentiaal ten opzichte van aarde. De negatieve potentiaal betekent dat er een elektronen overschot in de omgeving is. Waterstofatomen plegen dan af en toe een extra elektron op te pikken en vormen dan een  $H^-$  ion. Door de vorming van het  $H^-$  ion vervalt de binding in de  $H_2$  moleculen waaruit waterstofgas normaal bestaat. Door het negatief geladen volume van een ontsnappingsgat te voorzien zullen de  $H^-$  ionen uit het gat worden geblazen door het potentiaalverschil van het negatief geladen volume en de omgeving die geaard is. Dit is het begin van een proton bundel. Als de  $H^-$  ionen op snelheid zijn kunnen de elektronen van het proton worden gestript door de bundel door een metaal folie heen te schieten. Een populaire manier om een negatief geladen volume te maken is met een Van de Graaf generator.

Er kunnen ook bronnen worden gemaakt voor zware atoomkernen, zoals zwavel, goud en lood. We gaan daar hier niet verder op in. Ook atomaire en moleculaire bundels die we kunnen maken vallen buiten het bestek van deze appendix.

## Lineaire versnellers

De gangbare techniek om elektronen en protonen na de bron verder te versnellen is een lineaire versneller. Een lineaire versneller bestaat uit een serie metalen cilindres, of ringen, waardoor de deeltjes als een bundel bewegen. Door telkens tussen twee opeenvolgende cilindres een spanningsverschil aan te leggen worden de geladen deeltjes versneld. Om te voorkomen dat uiteindelijk hele hoge spanningen nodig zijn wordt de spanning van teken gedraaid op het moment dat de geladen deeltjes in de cilinder zitten. De cilinder werkt als een kooi van Faraday en van die spanningswisseling merken de deeltjes die zich erin bevinden niets. Bij de volgende overgang tussen twee cilindres gekomen merken ze echter wel dat ze “de wind weer mee hebben”. Om deze truc te kunnen toepassen is het wel noodzakelijk dat de deeltjes in pakketjes komen, en niet als continue stroom.

## Circulaire versnellers

Een alternatief voor een lineaire versneller aan het begin van de versnellerketen is een cyclotron. Een cyclotron bestaat uit twee halve holle schijven waartussen een spanningsverschil is aangelegd. De herhaalde versnelling door de overgang tussen de schijven herhaaldelijk te laten doorlopen wordt bereikt door het geheel in een magneetveld op te stellen dat de deeltjes afbuigt. Bij gelijke impuls zullen de deeltjes een cirkelpad doorlopen. Door de versnelling wordt de straal van die cirkel echter steeds groter en spiraliseren de deeltjes uit het cyclotron, maar niet nadat ze dus ook grote energie hebben gekregen.

Een variant op het cyclotron is het synchrotron. Ook hierin zorgen magneten ervoor dat de geladen deeltjes een cirkel doorlopen. Op het cirkelpad staan dan versneller eenheden, meestal stukjes lineaire versneller. In het geval van het synchrotron wordt echter de sterkte van het magneetveld opgevoerd, zodat bij toenemende energie van de deeltjes ze op een cirkel met dezelfde diameter blijven bewegen. De toename van het magneetveld is synchroon aan de toename van de energie van de deeltjes, vandaar de naam van deze versnellertechniek. Met synchrotrons worden op dit moment de hoogste energieën gehaald. Een nadeel van synchrotrons is dat de deeltjes met hele grote energie op een cirkelbaan voordurend energie verliezen door het uitzenden van straling, de zogenaamde synchrotronstraling. De maximale energie die in synchrotrons kan worden gehaald wordt beperkt door dit stralingsverlies dat evenredig is aan  $(E/m)^4$ , waarbij  $E$  de energie van de deeltjes is en  $m$  hun massa. Het energieverlies is ook evenredig met het magneetveld dat wordt gebruikt voor de afbuiging en kan worden beperkt door dit zwakker te maken. Dat levert dan wel een grotere cirkelbaan op, met als exponent van dit gedrag een versnellertunnel van 27 km die gebruikt is voor de Large Electron Positron collider (LEP) en gebruikt zal gaan worden voor de Large Hadron Collider (LHC).

Een belangrijke versnellerparameter, behalve de bundelenergie, is de luminositeit. Dit wordt gegeven als het aantal deeltjes per vierkante centimeter per seconde. De luminositeit bepaalt hoeveel botsingen er plaats zullen vinden bij een gegeven werkzame doorsnede.



# Appendix C

## Deeltjes detectoren: De ogen van de fysicus

Experimenten met hoog energetische deeltjes uit versnellers kunnen grofweg op twee manieren worden gedaan. De simpelste is een hoog energetische bundel op een trefplaatje sturen. Dit staat bekend als “fixed target” experimenten.<sup>1</sup> De andere manier is om twee bundels tegen elkaar in te sturen en zo te botsen. Voor relativistische energieën levert die laatste methode veel meer energie op om nieuwe deeltjes te produceren, immers als de bundel met dezelfde impuls tegen elkaar in bewegen is de netto impuls nul en kan alle energie worden omgezet in de massa van nieuwe deeltjes. Botsende bundel experimenten zijn dan ook zeer populair sinds we dat kunnen. Een voordeel van botsende bundels in synchrotrons is verder dat alle deeltjes die geen interactie hebben rond blijven draaien en de volgende ronde weer kans maken op een interactie. De luminositeit wordt daardoor verschrikkelijk veel hoger met hetzelfde aantal deeltjes.

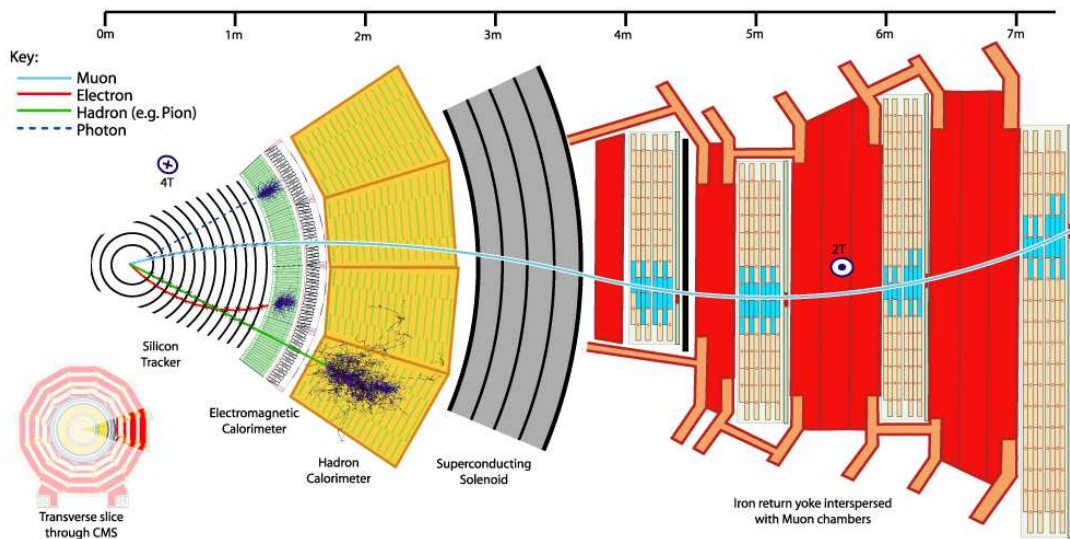
Experimenteren bij “fixed target” en botsende bundel is wat verschillend, hoewel dezelfde basistechnieken voor deeltjesdetectie worden gebruikt. De verschillende deeltjesdetectietechnieken zullen we hier demonstreren aan een experiment bij botsende proton bundels, het CMS experiment.<sup>2</sup>

In Fig. C.1 zijn de verschillende detectietechnieken gedemonstreerd. Geladen deeltjes worden zo dicht mogelijk bij het productiepunt gedetecteerd. Dat gebeurt door gebruik te maken van het feit dat geladen deeltjes in materiaal een spoor van ionisatie achterlaten. Die ionisatie is maar een kleine hoeveelheid lading, dus moet met gevoelige elektronica worden opgenomen en versterkt. Hoe meer materiaal er is, hoe meer lading er door het deeltje wordt achtergelaten. Echter, materiaal

---

<sup>1</sup>Bij gebrek aan een Nederlands woord.

<sup>2</sup>Om alle partijdigheid uit te sluiten is hier voor een experiment gekozen waarin Nederland niet deelneemt.



Figuur C.1: *Deeltjesdetectie technieken gedemonstreerd aan de hand van het CMS experiment bij de LHC. Eén sector in  $r$ - $\phi$  is uitvergroot. De patronen die in de detector zichtbaar worden voor de verschillende deeltjes zijn geïllustreerd.*

verstoort ook het pad dat het deeltje volgt. Om de oorspronkelijke informatie die het deeltje bevatte niet te verstoren moeten we dus zo min mogelijk materiaal gebruiken bij de detectie van geladen deeltjes. Deze tegenstrijdigheid voor de hoeveelheid materiaal in detectoren voor geladen deeltjes wordt opgelost door weinig materiaal te gebruiken hetgeen mogelijk wordt gemaakt door zeer gevoelige technieken om zeer kleine ladingen te registreren. Het summum hiervan op dit moment zijn technieken in halfgeleiders die slechts een ruis hebben van enkele tientallen elektronen en dus signalen van enkele honderden elektronen kunnen registreren. Een andere gangbare truc is door gebruik te maken van gasversterking in ionisatiekamers. De detectiedraden worden daar op een hoge spanning gezet, zodat ze de lading sterk aantrekken en de draden worden ook heel dun gemaakt, zodat het elektrisch veld vlak bij de draden een extreem hoge waarde bereikt. De ladingen worden daardoor versneld en ioniseren op hun beurt het gas in de omgeving. Die ladingen worden ook weer versneld, enz. Hierdoor treedt een lawine-effect op en worden versterkingsfactoren van  $10^8$  bereikt. Door de ionisatie die een geladen deeltje achterlaat op een heleboel aparte punten te meten kan het spoor van het deeltje worden gereconstrueerd.

Neutrale deeltjes kunnen niet worden gemeten door middel van ionisatie, want zij gaan geen reacties aan die materiaal ioniseren. Deze deeltjes gaan wel andere reacties aan met materiaal, zeldzamer maar heftiger. Om deze reacties uit te



lokken is een grote materiaaldichtheid nodig. Een gevolg is dat behalve dat die deeltjes een detecteerbaar signaal achterlaten, ze in dat proces ook zelf worden verwoest. Detectoren die op deze manier de energie van deeltjes meten heten calorimeters. Ze meten de energie van deeltjes, waarbij de deeltjes zelf helemaal worden geabsorbeerd. Behalve neutrale deeltjes ondergaan geladen deeltjes hetzelfde lot. In een calorimeter is het verschil tussen een geladen en neutraal deeltje dus niet te zien. Door een geladen deeltjesdetector voor de calorimeter te plaatsen en te kijken of een geladen spoor geassocieerd kan worden met een blob energie in de calorimeter kan alsnog informatie worden verkregen over zowel de energie van het deeltje als de lading.

Er is één type geladen deeltje dat zich anders gedraagt in een calorimeter: het muon. Muonen worden normaal gesproken niet verwoest in een calorimeter en laten er maar een bescheiden hoeveelheid energie in achter. Door nu achter al het materiaal van een calorimeter nog een detector voor geladen sporen te plaatsen kunnen we muonen zien.

Er is een type deeltje dat zich van alle detectiemethoden niets aantrekt: het neutrino. Neutrino's hebben alleen zwakke interactie, en slechts enkele neutrino's (sub-ppm niveau) zullen in een detector met een beheersbare hoeveelheid materiaal een interactie aangaan. Het opsporen van neutrino's gaat dan ook veeleer door te kijken naar een onbalans in de energieverdeling in de detector. In een botsende bundelexperiment is de netto impuls van de begintoestand nul en moet wegens behoud van impuls de eindtoestand ook totale impuls nul hebben. Een netto impuls in de detector duidt dan dus op deeltjes die ongezien ontsnappen.

In Fig. C.1 staat voor verschillende deeltjes aangegeven welk patroon ze in de verschillende subdetectoren vertonen. Door de informatie van verschillende subdetectoren te combineren kunnen we niet alleen de energie en impuls van deeltjes achterhalen, maar vaak ook een uitspraak doen over het type deeltje. Met name muonen en elektronen kunnen goed als zodanig worden geïdentificeerd.



# Bibliografie

- [1] Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687, vertaald in het Engels door Andrew Motte, *The Principia*, Prometheus Books (Great minds series), New York, 1995.
- [2] Het torsieveer experiment is oorspronkelijk voorgesteld door John Mitchell, die overleed voor hij het experiment ook kon uitvoeren. Via Francis John Hyde Wollaston kwam het experiment terecht bij Henry Cavendish, die het apparaat herbouwde en het experiment uitvoerde en de resultaten daarvan rapporteerde in *Philosophical Transactions* in 1798.
- [3] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A133 (1931) 60.
- [4] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B79 (1974) 276;  
A. Polyakov, JETP Lett. 20 (1974) 194.
- [5] J. J. Thomson, *Cathode Rays*, Phil. Mag. 44 (1897) 293.  
Deze publicatie kan worden gevonden op het WWW als “<http://webserver.lemoyne.edu/faculty/giunta/thomson1897.html>”.
- [6] M. Planck, *Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum* Verhandl. Deutsch. Phys. Ges. 2 (1900) 237.
- [7] A. Einstein, Ann. Phys. 17 (1905) 132.
- [8] C. Jönsson, Zeitschrift für Physik 161 (1961) 454.
- [9] Louis de Broglie, *Radiations – Ondes et quanta*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Vol. 177 (1923) 507.
- [10] C. J. Davisson, *Are Electrons Waves?*, Franklin Institute Journal 205 (1928) 597.
- [11] Deze figuur is overgenomen van het WWW:  
“<http://hackensackhigh.org/~rk2/diffraction.jpg>”.

- [12] W. Pauli and V. Weisskopf *Über die Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung* Helv. Phys. Acta 7 (1934) 708-731.
- [13] H. Geiger en E. Marsden, Phil. Mag. 25 (1913) 604.
- [14] E. Rutherford, *The Scattering of  $\alpha$  and  $\beta$  Particles by Matter and the Structure of the Atom*, Phil. Mag. 21 (1911) 669.
- [15] E. Rutherford, *Collision of Alpha Particles with Light Atoms*, Phil. Mag. 37 (1919) 537.
- [16] E. Rutherford, *Nuclear Constitution of Atoms*, Proc. of the Royal Soc., A97 (1920) 374.
- [17] J. Chadwick, *Possible Existence of a Neutron*, Nature 129 (1932) 312;  
J. Chadwick, *The Existence of a Neutron*, Proc. of the Royal Soc., A136 (1932) 692.
- [18] C.L. Cowan, Jr., F. Reines, F.B. Harrison, H.W. Kruse and A.D. McGuire, *Detection of the Free Neutrino: A Confirmation* Science 124 (1956) 103.
- [19] J.C. Street en E.C. Stevenson, *New Evidence for the Existence of a Particle Intermediate Between the Proton and Electron*, Phys. Rev. 52 (1937) 1003.
- [20] G.D. Rochester, C.C. Butler, *Evidence for the existence of new unstable elementary particles*, Nature 160 (1947) 855.
- [21] A. Pais, *Some remarks on the V particles*, Phys. Rev. 86 (1952) 663;  
M. Gell-Mann, *Isotopic Spin and New Unstable Particles*, Phys. Rev. 92 (1953) 833.
- [22] G. Danby *et al.*, Phys. Rev. Lett. 9 (1962) 36.
- [23] J.E. Augustin *et al.*, *Discovery of a Narrow Resonance in  $e^+e^-$  Annihilation*, Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 1406.
- [24] J.J. Aubert *et al.*, *Experimental Observation of a Heavy Particle J*, Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 1404.
- [25] S.L. Glashow, J. Iliopoulos, L. Maiani, *Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry*, Phys. Rev. D2 (1970) 1285.
- [26] G.S. Abrams *et al.*, *The Discovery of a Second Narrow Resonance in  $e^+e^-$  Annihilation*, Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 1453.

- [27] DONUT Collab., K. Kodama *et al.*, Phys. Lett. B504 (2001) 218.
- [28] S.W. Herb *et al.*, *Observation of a Dimuon Resonance at 9.5 GeV in 400 GeV Proton-Nucleus Collisions*, Phys. Rev. Lett. 39 (1977) 252.
- [29] CDF Collab., F. Abe *et al.*, *Evidence for Top Quark Production in  $\bar{p}p$  Collisions at  $\sqrt{s} = 1.8$  TeV*, Phys. Rev. D50 (1994) 2966; Phys. Rev. Lett. 73 (1994) 225;  
DØ Collab., S. Abachi *et al.*, *Observation of the Top Quark*, Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 2632.
- [30] G. 't Hooft, *Symmetry Breaking through Bell-Jackiw Anomalies*, Phys. Rev. Lett. 37 (1976) 8.
- [31] S.J. de Jong, *Leve de Materie*, Syllabus bij de HOVO cursus *Elementaire deeltjes en de verklaring van ons bestaan*, gegeven in 2003.

# Index

- Abraham Pais, 57  
afgeleide, 17, 22
- Born interpretatie, 40  
Burton Richter, 58
- Cavendish, 5  
Cavendish experiment, 5  
CDF, 61  
Clifford Butler, 56  
Clyde Cowan, 56  
coördinaten, 1, 13, 21, 23, 70, 116, 117
- $D\emptyset$ , 61  
Davisson, 36  
de Broglie, 36  
Dirac, 47  
Dirac vergelijking, 49
- E.C. Stevenson, 56  
Edward Marsden, 54  
eerste wet van Newton, 2, 22, 24, 38  
eigentijd, 25  
elektronbron, 123  
energie, 9, 16  
Enrico Fermi, 56  
equivalentieprincipe, 5, 21  
Ernest Rutherford, 54  
eV, 36
- Fourierreeks, 42  
Fred Reines, 56
- Galileitransformatie, 13  
gekromde ruimte, 22, 30
- gelijktijdig, 14  
geodeet, 22  
George Rochester, 56  
Germer, 36  
Gordon, 45  
gravitatie, 3, 11  
gravitatieconstante, 4  
gravitatiepotentiaal, 9, 26  
gravitatieversnelling, 4  
gravitatiewet, 5
- Hans Geiger, 54  
Heisenberg, 41  
Higgspotentiaal, 95  
Hooke, Robbert, 5
- impuls, 3, 16
- J. Iliopoulos, 58  
J.C. Street, 56  
J.J. Thomson, 31  
Jack Steinberger, 57  
James Chadwick, 55
- Klassieke mechanica, 1  
Klein, 45  
Klein-Gordon vergelijking, 45  
klok, 2, 29  
kracht, 2
- lengtecontractie, 13  
Leon Lederman, 57, 59  
lichtsnelheid, 11  
Lorentzcontractie, 13  
Lorentztransformatie, 13, 20

- Luciano Maiani, 58  
 luminositeit, 125  
 Lund model, 67
- Martin Perl, 59  
 Max Born, 40  
 Mechanica, klassieke, 1  
 Melvin Schwartz, 57  
 metriek, 19, 24, 25, 28  
 metrische tensor, 19, 24, 25, 28  
 muon opslagring, 14
- neutrino, 56  
 neutron, 55  
 Newton, Isaac, 2, 3
- onzekerheidsrelatie van Heisenberg, 41
- plaats, 1, 13, 28, 37, 40, 69  
 Planck, 32  
 Post-Newtoniaanse limiet, 25  
 potentiële energie, 9, 26, 38  
 potentiaal, 26, 41, 76, 95  
 Principia van Newton, 2  
 proton, 55  
 protonbron, 124
- quantummechanica, 45  
 quantumsubstitutie, 40
- relativiteitstheorie, 45  
 rustenergie, 17
- Samuel C.C. Ting, 58  
 Schrödinger, 37  
 Schrödinger vergelijking, 38  
 Sheldon Glashow, 58  
 Standaard Model, 53  
 superpositie van golffuncties, 41
- tensor, 20  
 tijd, 2, 13, 17, 19, 28, 38, 45, 50, 51, 69,  
 73, 78
- tijddilatatie, 14  
 trage massa, 3, 5, 21  
 tweede wet van Newton, 3, 5, 21
- Van de Graaf generator, 124  
 vector, 2, 116  
 vierimpuls, 20  
 viervector, 19, 20  
 viervectorpotentiaal, 76  
 vlakke golf, 39
- waarnemer, 1, 21, 85, 92  
 waarschijnlijkheidsinterpretatie, 40  
 Weisskopf, 46  
 wiel van Fizeau, 11  
 Wolfgang Pauli, 46, 56
- zwaartekracht, 3, 11  
 zwaartekrachtsconstante, 4  
 zwaartekrachtsveld, 26  
 zware massa, 5, 21