

Leve de Materie

*Materie asymmetrie als eerste schakel
in de verklaring van ons bestaan*

Sijbrand de Jong
Radboud Universiteit Nijmegen/NIKHEF
Toernooiveld 1
6525 ED Nijmegen
email: s.dejong@science.ru.nl

28 december 2004

Inhoudsopgave

Voorwoord	iii
1 Inleiding: Waar komen we vandaan en waar gaan we naar toe?	1
2 Quantummechanica: Een onzekere wereld	11
3 Speciale relativiteitstheorie: Grenzen aan de snelheid	27
4 Interacties: Botsingen en Feynmandiagrammen	39
5 Het Standaard Model: Ons begrip van elementaire deeltjes	51
6 Een curieus fenomeen: CP schending in het Kaon systeem	69
7 De CKM matrix: Waarom drie van alles nuttig is	81
8 De derde generatie: CP schending met b quarks	91
9 Genoeg quarks: Hoe zit het met leptonen?	101
A Wiskunde: De taal van de natuurkunde	109
B Deeltjes versnellers: Een bron van deeltjes	117
C Deeltjes detectoren: De ogen van de fysicus	121
D Vals spelen: De oplossingen van de opgaven	125

Voorwoord

Deze tekst is gebaseerd op een HOVO¹ cursus die ik in het najaar van 2003 heb gegeven: *Elementaire deeltjes en de verklaring van ons bestaan*.

Van te voren was ik van diverse kanten gewaarschuwd dat het publiek voor deze cursussen buitengewoon kritisch is en dat ze niet graag met een kluitje in het riet worden gestuurd. De cursus moet toegankelijk zijn voor mensen op academisch niveau, maar specifieke voorkennis kan niet worden verwacht. In de voorliggende tekst heb ik geprobeerd een onderwerp uit de elementaire deeltjesfysica dat op dit moment buitengewoon in de belangstelling staat te behandelen. De opzet is om tot de meest recente ontwikkelingen te komen. Aan de andere kant wordt het onderwerp vanaf de bodem aangepakt, zonder dat veel voorkennis wordt verondersteld.

Nu ik de cursus heb gegeven en de uitkomsten van de enquête aan het eind ken, denk ik dat het niveau van de inhoud van de cursus redelijk is geslaagd, maar dat het tempo van in totaal 10 colleges, zonder verder ondersteuning, duidelijk te hoog lag. De cursisten bleken inderdaad kritisch, maar op een zeer prettige manier, die mij heeft geholpen om het onderwerp zo duidelijk mogelijk te maken, en om ook in de formules de puntjes op de *i* te krijgen. Ik ben dan ook blij dat ik in de mogelijkheid ben gesteld deze cursus te geven en wil de cursisten van harte danken voor hun medewerking, correcties, kritische opmerkingen, etc.

Opzet van deze cursus

Het doel van de cursus is onze verklaring van het verschil tussen deeltjes en anti-deeltjes te laten zien met behulp van kennis van de elementaire deeltjes, de quantummechanica en de relativiteitstheorie. Na de uiteenzetting over het te bereiken einddoel van de cursus en een korte historische behandeling in hoofdstuk 1, zal in de daarop volgende komende hoofdstukken dieper worden ingegaan op de theoretische noodzaak van anti-deeltjes. Daartoe is wat uitleg nodig van quantummechanica en speciale relativiteitstheorie. Ook andere eigenschappen van quantumtheorie zullen aan de orde komen. De behandeling van quantum-

¹Hoger Onderwijs voor Ouderen

mechanica en speciale relativiteitstheorie zal echter worden beperkt tot wat we nodig hebben om ons einddoel, het begrijpen van CP schending, te bereiken. Na de benodigde elementaire begrippen van de quantummechanica en speciale relativiteitstheorie te hebben gezien zal het Standaard Model van de elementaire deeltjesfysica worden besproken. Dit is een speciaal geval van een ijktheorie en het principe van ijktheorieën zal dan ook worden ingevoerd ter verduidelijking van het Standaard Model. Schematisch wordt de samenhang van de verschillende stukken theorie getoond in Fig. 1. Het stuk links onderin betreft het Higgs mechanisme dat ik zorgvuldig heb geprobeerd uit beeld te houden.² Ook zal enige noodzakelijke wiskundige kennis worden behandeld, zoals complexe getallen en simpele matrixrekening. Differentiëren en het principe van de differentiaalvergelijking zullen bekend worden verondersteld, in de praktijk zullen alle oplossingen worden gegeven zonder op de berekening in te gaan. Nadat alle benodigde voorkennis is verzameld zal dieper op de verklaring van het verschil tussen deeltjes en anti-deeltjes kunnen worden ingegaan. Eerst zal het fenomeen van CP schending worden gedemonstreerd aan de hand van experimenten met Kaonen. Vervolgens zullen recente experimentele resultaten met B-mesonen worden besproken, en worden aangegeven welke experimenten we nog denken te moeten doen om een bevredigend beeld te krijgen van alle processen en achtergronden die een rol spelen in de verschillen tussen deeltjes en anti-deeltjes.

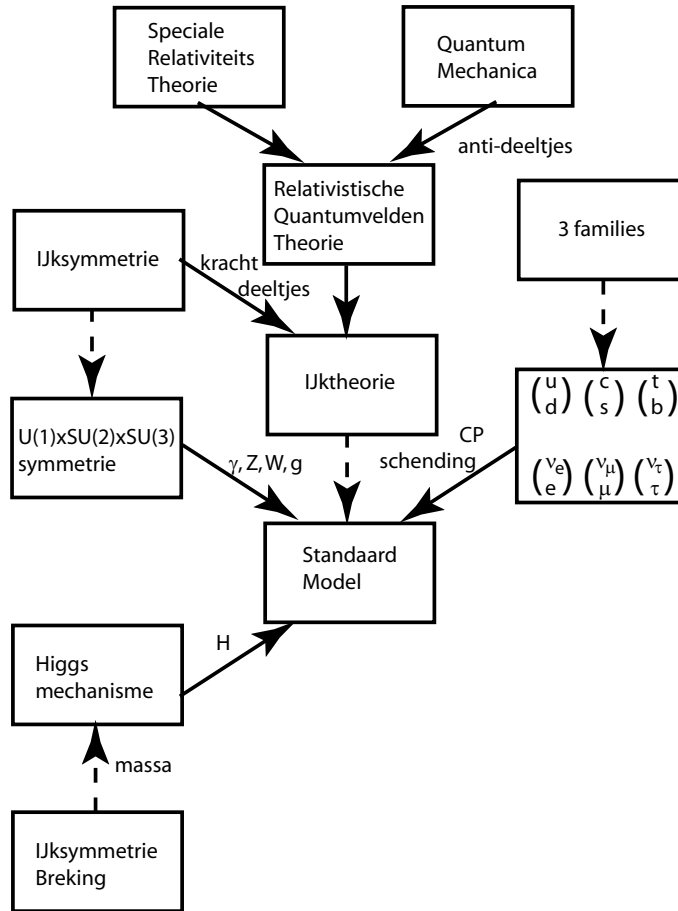
De indeling van de hoofdstukken is zo beoogd dat in een cursus een hoofdstuk per week kan worden behandeld. Voor het materiaal in de appendices zal extra tijd moeten worden uitgetrokken.

Aan het eind van elke hoofdstuk staan een aantal opgaven die tot doel hebben de lezer vertrouwd te maken met de behandelde stof door er zelf mee te werken en over te reflecteren. De antwoorden van de opgaven zijn in appendix D gegeven.

Sijbrand de Jong

Parijs, 28 december 2004

²Natuurlijk heeft het Higgs mechanisme ook weer van alles te maken met het onderwerp van de cursus, omdat in het Standaard Model alles heel fraai in elkaar grijpt. De tijd ontbreekt echter om daar op in te gaan. Het is de bedoeling in het komend jaar deze tekst uit te breiden met een behandeling van het Higgs mechanisme.

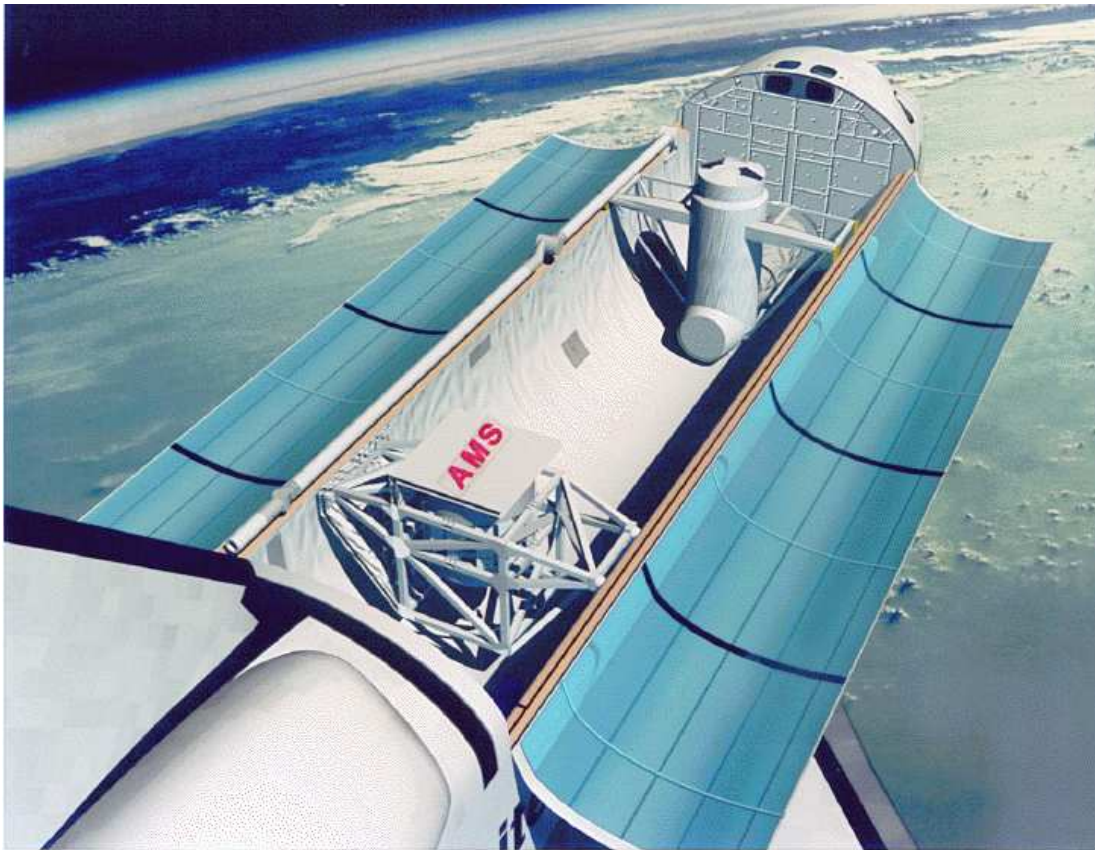


Figuur 1: Schematisch overzicht van de benodigde theorie om ons huidige begrip van CP schending te kunnen vatten.

Hoofdstuk 1

Inleiding: Waar komen we vandaan en waar gaan we naar toe?

In juni 1998 werd de space shuttle Discovery gelanceerd met een experiment aan boord, de Anti-Matter Spectrometer (AMS, zie Fig. 1.1), dat onder andere probeerde om anti-helium atoom-kernen te vinden. Het experiment is vrij eenvoudig van opzet. Het bestaat uit een grote permanente magneet, die een dipool magneetveld maakt. In het magneetveld is een nauwkeurige detector gemonteerd die op een aantal plaatsen de positie van geladen deeltje kan waarnemen, en daarmee kan een spoor van een geladen deeltje dat door de detector passeert worden gereconstrueerd. Verder zijn er nog elementen toegevoegd die kunnen bepalen welk soort deeltje met het spoor correspondeert. Het AMS experiment heeft geen anti-helium kernen gevonden [1]. Omdat er wel helium atoomkernen zijn waargenomen, kan uit de metingen worden geconcludeerd dat er in ieder geval een miljoen keer minder anti-helium dan helium in de ruimte voorkomt. Het experiment illustreert dat ons dagelijks leven totaal wordt gedomineerd door materie en dat anti-materie als een speld in een hooiberg moet worden gezocht. Waarom zouden we dan zoeken naar, of zelfs maar geloven in het bestaan van anti-materie? Het AMS experiment toont in ieder geval aan dat vragen over anti-materie actueel zijn en dat dure experimenten om anti-materie en het voorkomen ervan in het heelal te bestuderen niet worden geschuwd. Een opvolger van het AMS experiment, de Alpha Magnetic Spectrometer [2], niet toevallig met dezelfde afkorting AMS, staat op de rol gelanceerd te worden in oktober 2005, waarbij het als eerste wetenschappelijk experiment op het International Space Station (ISS) zal worden gemonteerd om daar enige jaren te kunnen meten.



Figuur 1.1: *Getekende impressie van het AMS experiment aan boord van de Space Shuttle. Het experiment is in de voorgrond van de laadruimte zichtbaar. Het bestaat uit een grote permanente magneet, waarin een modern detectiesysteem voor geladen deeltjes zit. Uit de richting van de kromming van het waargenomen spoor van het deeltje is vast te stellen of het om een positief of negatief geladen deeltje gaat. Uit de sterkte van de kromming is te berekenen wat de lading-massa verhouding is van het deeltje.*

Als we al geloven in het bestaan van anti-materie dan worden we meteen geconfronteerd met het probleem waarom er dan zo verwaarloosbaar weinig van is. Als er dan toch anti-materie is, ligt het voor de hand te veronderstellen dat er een symmetrie is tussen materie en anti-materie. Om te beginnen is deze symmetrie natuurlijk ook de belangrijkste reden om in anti-materie te geloven. Maar een symmetrie tussen twee dingen, waarbij er van het een veel meer is dan van het ander klinkt niet erg symmetrisch. De makkelijkste ontsnapping is aan te nemen dat anti-materie niet bestaat.

Moderne quantumtheorieën over deeltjes voorspellen dat er anti-materie moet bestaan. Een symmetrie tussen materie en anti-materie is niet met de hand in de mathematische theorie van de natuur gestopt. Integendeel, het volgt automatisch uit elke theorie die zowel quantummechanisch is als aan de wetten van de speciale relativiteitstheorie voldoet. Verschillende theoretisch natuurkundigen, zoals Schrödinger, Klein en Gordon en Dirac kwamen erachter dat hun simultane oplossingen van zowel quantummechanica als speciale relativiteitstheorie telkens twee mogelijke verschillende oplossingen bevatten. Dirac was de eerste die op het idee kwam dat die twee oplossingen alleen maar zinnig zijn als ze worden geïnterpreteerd als de oplossing van deeltje en anti-deeltje. In de formulering van het uiteindelijke argument om de twee oplossingen als die van deeltjes en anti-deeltjes te interpreteren heeft de onlangs overleden Weisskopf een belangrijke rol gespeeld.

Ondanks dat er heel weinig van is, is anti-materie wel boven elke twijfel experimenteel aangetoond. Voor het eerst was dat door Anderson [3]. Vlak na de voorspelling van Dirac dat het elektron een anti-deeltje heeft vond Anderson op onverwachte wijze het anti-elektron, het positron. Dat gebeurde in een experiment met een nevelkamer¹ waarin halverwege een loden plaat zat. Een nevelkamer is een ruimte waarin waterdamp (of andere damp) verzadigd wordt door met een zuiger de ruimte te verkleinen. De waterdamp wordt dus samengeperst. Normaal gesproken zal de damp dan condenseren. Als de zuiger snel wordt bewogen verkeert de waterdamp in een metastabiele toestand. Zodra er ergens een verstoring is zal het water condenseren. Dat gebeurt dan ook in kleine druppeltjes langs het pad van een geladen deeltje door de kamer. Het zo gevormde spoor geeft een getrouw beeld van waar het geladen deeltje langs is gekomen. De nevelkamer heeft verder vensters voor een of meer fotocamera's en flitslichten. De beweging van de zuiger en de flits en camera zijn zo gesynchroniseerd dat er op het juiste moment een foto wordt genomen, laat genoeg voor het druppelspoor om gevormd te zijn en vroeg genoeg zodat er niet op andere plaatsen spontane condensatie is opgetreden. De door Anderson gebruikte nevelkamer zat in een magneetveld dat geladen deeltjes afbuigt. Hoe hoger de energie van een deeltje, hoe kleiner de afbuiging. Voor positieve en negatieve geladen deeltjes is de afbuiging in tegengestelde richting. Als deeltjes door de metalen plaat gaan verliezen ze energie. Dus aan de kant waar de baan van het deeltje het minst gekromd is, daar komt het vandaan. Anderson bestudeerde kosmische straling, deeltjes die van boven komen. Het opmerkelijke is nu dat Anderson heeft gezien dat één van de deeltjes, waarvan het spoor op de fotografische plaat van Fig. 1.2 is vastgelegd, niet van boven naar beneden ging, maar van beneden kwam. Hij

¹Nevelkamers zijn reeds lang niet meer in gebruik als experimentele techniek in de deeltjesfysica.

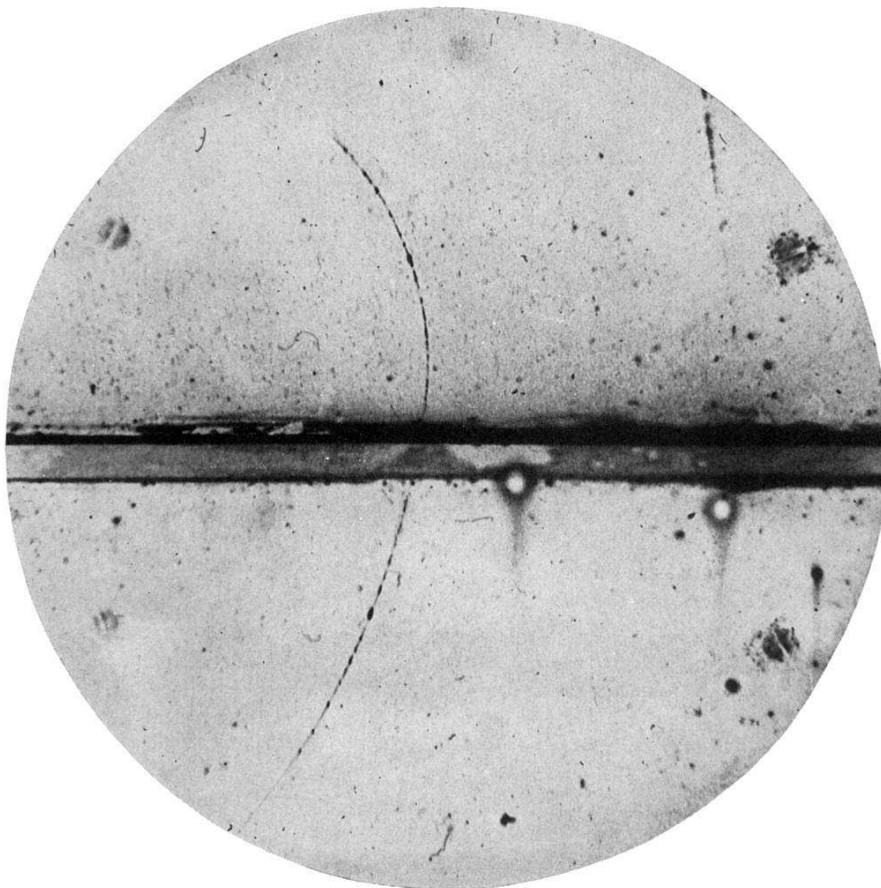
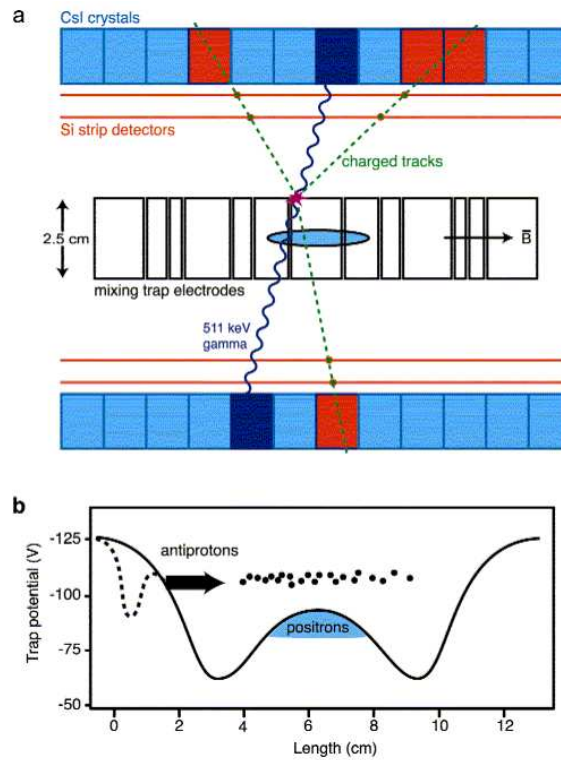


FIG. 1. A 63 million volt positron ($H\rho = 2.1 \times 10^5$ gauss-cm) passing through a 6 mm lead plate and emerging as a 23 million volt positron ($H\rho = 7.5 \times 10^4$ gauss-cm). The length of this latter path is at least ten times greater than the possible length of a proton path of this curvature.

Figuur 1.2: Foto van de nevelkamer die de ontdekking van het positron betekende. Het onderschrift is dat uit het artikel van Anderson [3]. Het beargumenteert in het kort dat het spoor ten gevolge van een positief geladen deeltje moet zijn en dat het geen proton, maar een lichter deeltje moet zijn. In het artikel wordt aangetoond dat het vastgelegde deeltje alle karakteristieken heeft van een positief geladen elektron.

kon dat zien, omdat de baan aan de bovenkant duidelijk meer gekromd was. Een gedetailleerde analyse liet verder zien dat de dichtheid van het vloeistofspoor in de nevelkamer overeenkwam met de eigenschappen van een elektron. Maar de kant van de afbuiging was alleen maar te rijmen met een positief deeltje, terwijl het elektron negatief geladen is. De conclusie was dus dat dit een deeltje is met alle eigenschappen van een elektron, maar met tegengestelde elektrische lading. Het anti-deeltje van het elektron dus: het positron.



Figuur 1.3: *Anti-waterstof in het ATHENA experiment. Het anti-waterstof wordt gevormd door positronen in een elektromagnetische val te vangen (in vacuüm). Deze val is genest in een diepere val voor anti-protonen. Af en toe wordt in de dubbele val een positron in een stabiele baan rond het anti-proton gevangen en ontstaat anti-waterstof. Het neutrale anti-waterstof zit niet opgesloten in de elektromagnetische vallen en wordt zichtbaar op het moment dat het in contact komt met de gewone materie van de wand van het vacuümvat en daarmee annihileert. Deze afbeeldingen zijn overgenomen uit [5].*

Dus zitten we nu met het gegeven dat anti-deeltjes er niet alleen uit theoretische overweging zouden moeten zijn, maar dat ze ook daadwerkelijk zijn gevonden. Tegenwoordig zijn overtuigend van alle elementaire deeltjes² de anti-deeltjes experimenteel aangetoond. Er zijn zelfs complexere samenstellen van elementaire anti-deeltjes gemaakt. Anti-waterstof, een anti-proton met daaromheen een positron, is voor het eerst door het ATHENA experiment op CERN³ aangetoond in 2002 [4]. Een schematische illustratie van het ATHENA experiment is te zien in Fig. 1.3.

²We komen later terug op de elementaire deeltjes die er zijn.

³CERN is het Europese laboratorium voor deeltjesfysica op de Zwitsers-Franse grens bij Genève.

Als we dan dus moeten accepteren dat er anti-materie is, waarom komt het dan niet in gelijke hoeveelheden voor als materie? Om te beginnen moeten we vaststellen dat dit *gelukkig* niet zo is. Zoals zojuist werd getoond dat een anti-waterstof atoom annihileert zodra het met “gewone” materie in aanraking komt, zo annihileren alle materiedeeltjes met hun anti-materie partners. Hadden we gelijke hoeveelheden materie en anti-materie bij elkaar, dan zouden die in de kortste keren zijn verdwenen en omgezet in fotonen, lichtdeeltjes.⁴

Er zijn nu verschillende verklaringen te bedenken waarom we (lokaal) een materieoverschot hebben. Een verklaring zou kunnen zijn dat materie en anti-materie gescheiden zijn in de ruimte. Denken we daar langer over na dan ligt dat toch weer niet zo voor de hand. Op het grensvlak van materie en anti-materie zouden die twee elkaar annihileren onder uitzending van fotonen. We zouden dan dus lichte plekken aan de hemel moeten zien waar dat gebeurt. Zulke gebieden zijn nog nooit waargenomen. Of materie en anti-materie zouden gescheiden moeten zijn door een inert of ondoordringbaar grensvlak, maar niemand weet waaruit dat zou moeten bestaan. Een andere, zeer speculatieve en onrealistische, verklaring die ik eens heb bedacht komt voort uit de observatie dat bijna alle melkwegstelsels een zeer massief zwart gat in het centrum hebben. De anti-materie zou in het zwarte gat geconcentreerd kunnen zijn, terwijl de materie daar als sterrenstelsel omheen cirkelt. De horizon van het zwarte gat vormt dan een natuurlijke barrière die materie en anti-materie gescheiden houdt. Ik heb er echter geen enkele voorstelling van hoe die situatie zou kunnen zijn ontstaan.

De onder deeltjesfysici en kosmologen algemeen geaccepteerde verklaring voor de asymmetrie in de abundantie van materie en anti-materie is voor het eerst geopperd door Sacharov⁵ en heeft drie ingrediënten [6]:

We gaan er van uit dat het heelal is ontstaan met een symmetrie tussen deeltjes en anti-deeltjes. De deeltjes en anti-deeltjes werden gevormd toen het heelal nog heel heet was.⁶ Hierdoor was genoeg energie beschikbaar om deeltjes en anti-deeltjes te maken van allerlei massa. Die bestonden in thermisch evenwicht. De hoeveelheid deeltjes wordt dan bepaald door de gelijkheid van de kans om een

⁴In de kosmologie (of sterrenkunde in het algemeen) worden fotonen vaak straling genoemd. Een heelal dat dan uit bijna alleen maar fotonen bestaat wordt dan stralingsgedomineerd genoemd. Strikt genomen is die nomenclatuur niet erg correct, want alle deeltjes kunnen ook als straling worden opgevat. Bijvoorbeeld lang niet alle radioactieve straling bestaat uit fotonen (gamma straling), maar kan ook bestaan uit elektronen of positronen (bèta straling) of Heliumkernen (alfa straling).

⁵Jawel, dit is dezelfde als de bekende Russische dissident (die overigens ook Stalin mee hielp een atoombom te maken.)

⁶Ik spreek in dit stukje over “temperatuur” en “heet”. Eigenlijk bedoel ik energiedichtheid in de ruimte. Die energiedichtheid staat in relatie tot de gemiddelde kinetische energie van deeltjes in die ruimte, en die gemiddelde kinetische energie definieert op zijn beurt weer de temperatuur. Het gebruik van temperatuur in deze context is echter conventioneel.

deeltje–anti-deeltje-paar te maken en de kans dat ze weer annihilieren. Hoe hoger de temperatuur, hoe meer energie beschikbaar om deeltje–anti-deeltje-paren te maken. De annihilatiekans is proportioneel aan de kans dat een deeltje en anti-deeltje elkaar tegenkomen en dus proportioneel aan de aantallen deeltjes en anti-deeltjes die rondvliegen. Deze twee ingrediënten geven samen een dichtheid aan materie en anti-materie die omhoog gaat met hogere temperaturen. Bij hoge temperaturen worden zware en exotische deeltjes geproduceerd, die niet stabiel zijn en vervallen in andere elementaire deeltjes, zoals dat bijvoorbeeld ook bij radioactief verval gebeurt.

De eerste stap in het plan van Sacharov om de wereld te maken zoals die is, is dat kernmaterie deeltjes, zoals protonen en neutronen en de deeltjes daarin, quarks, kunnen vervallen in deeltjes zoals elektronen. Dit fenomeen heet schending van baryongetal. Een stuk later komen we terug op wat precies baryongetal is. In ieder geval is baryongetal moeilijk te schenden, want dan zou het proton vervallen, en dat hebben we nog nooit gezien, zelfs niet als we langdurig naar heel veel protonen blijven staren.⁷ Aan de andere kant is juist in het Standaard Model van de elementaire deeltjes een schending van baryon en lepton getal (er doemen dan ook elektronen etc. uit het “niets” op) mogelijk via overgangen tussen de diverse mogelijke vacua [8]. Deze overgangswaarschijnlijkheden zijn buitengewoon klein, want proportioneel aan $e^{-16\pi^2/g^2}$, waarbij de koppelingsconstante g typisch veel kleiner is dan 1.

De tweede stap die nu nodig is, is dat deeltjes en anti-deeltjes, of althans sommige deeltjes en anti-deeltjes niet even snel of niet op dezelfde manier vervallen. Een asymmetrie dus tussen materie en anti-materie. In dat geval zal ook het baryon schendend verval met ongelijke snelheid optreden. Stellen we ons voor dat anti-protonen sneller in elektronen vervallen dan protonen in positronen, dan hebben we na een tijdje meer protonen dan anti-protonen en in dezelfde mate meer elektronen dan positronen.

De derde stap is dat het heelal door expansie afkoelt. Het is dan niet langer in thermisch evenwicht, omdat de afkoeling sneller gaat dan de interactiesnelheid tussen deeltjes. Het wordt met het verstrijken van de tijd steeds moeilijker om genoeg energie bij elkaar te krijgen om deeltjes en anti-deeltjes paren te maken. Deeltjes en anti-deeltjes zullen elkaar nog wel steeds blijven annihilieren. Het netto effect is dat de deeltjes en anti-deeltjes bijna allemaal in fotonen worden omgezet. Echter, in stap twee is een overschot aan materie ontstaan, zodat als alle anti-materie is geannihileerd er nog wat materie overblijft. Dat effect hoeft niet gigantisch groot te zijn, maar rechtvaardigt wel ons eigen bestaan, opgebouwd uit materie (en niet uit anti-materie). De expansie van het heelal is evident uit

⁷De gemiddelde levensduur van een proton is meer dan 1.6×10^{25} jaar [7]. Ter vergelijking: de geschatte leeftijd van het heelal is ongeveer 1.3×10^{13} jaar.

het feit dat we gemiddeld alle sterrenstelsels van ons af zien vliegen, en wel met een snelheid die recht evenredig toeneemt met de afstand van het sterrenstelsel, de sterrenstelsels die het verst van ons afstaan bewegen het snelst van ons af. Dit staat bekend als de wet van Hubble [9].

Aangezien aan de eerste en de derde stap van de voorwaarden van Sacharov kennelijk wordt voldaan gaan we in op de tweede stap en in feite zal de rest van het verhaal gaan over het schenden van tijdsymmetrie en het daarmee samenhangende verschil in vervalssnelheden tussen deeltjes en anti-deeltjes.

Sinds 1964 weten we dat er subtiele verschillen bestaan tussen deeltjes en anti-deeltjes, voor het eerst gevonden tussen kaonen en anti-kanonen⁸ door J. Christenson, J. Cronin, V. Fitch en R. Turlay [10]. Dit maakt de tweede, niet voor de hand liggende stap in het betoog van Sacharov opeens plausibel. Om de subtiele verschillen tussen deeltjes en anti-deeltjes te begrijpen is enig inzicht nodig in de wereld van de quantummechanica en de elementaire deeltjes. Centraal in het begrip van het verschil tussen deeltjes en anti-deeltjes staat het niet behouden zijn van de gezamenlijke symmetrietransformatie van ladingsomkeer (C) en plaatsspiegeling (P). De schending van deze gecombineerde CP symmetrie is op haar beurt weer te verklaren uit het aantal verschillende families elementaire deeltjes dat we kennen. Nog diepere verklaringen zijn op dit moment speculatief. De schending van de gecombineerde CP symmetrie is sterk gerelateerd aan de schending van tijdsomkeersymmetrie (T). In het huidige theoretische raamwerk van ijktheorieën van puntdeeltjes is de gecombineerde symmetrietransformatie van CPT altijd een exacte symmetrie.

Precieze meting van de verschillen tussen deeltjes en anti-deeltjes is een actueel en belangrijk onderzoeksgebied, waarbij we hopen dat we dit mysterie rond ons eigen bestaan in de komende tien tot twintig jaar geheel kunnen ophelderen.

Uiteindelijk is de schending van CP symmetrie natuurlijk maar een klein (doch noodzakelijk) schakeltje in de verklaring van ons eigen bestaan. Op het ontstaan van de vrije wil van mensen (zo die er al is), over het ontstaan van reproduceerbaar leven, het ontstaan van ons zonnestelsel en uiteindelijk de oorsprong van de massa en energie die ons heelal vult word hier verder niet ingegaan.

⁸Kaonen zijn vreemde deeltjes die we later uitvoeriger zullen bespreken.

Opgaven

- 1.1: Waarom moet een experiment, zoals AMS, dat anti-helium in het heelal wil meten buiten de dampkring worden gelanceerd en kan een dergelijk experiment niet op aarde plaatsvinden?
- 1.2: Waardoor zouden de andere druppels en druppeltjes in Fig. 1.2 veroorzaakt kunnen zijn?
- 1.3: Waarom is het wenselijk dat de anti-protonen zo langzaam mogelijk gaan in het ATHENA experiment?
- 1.4: Waar zou de energie in het heelal vandaan kunnen zijn gekomen?
- 1.5: Bereken de orde van grootte van de minimale levensduur van een proton als in een detector van 10000 ton water (10^7 liter) in een jaar tijd geen enkel verval is gezien. Neem aan dat de detectie efficiëntie van een verval 100% is. (Hint: Het aantal protonen in 10000 ton water is ongeveer 3×10^{33} .)

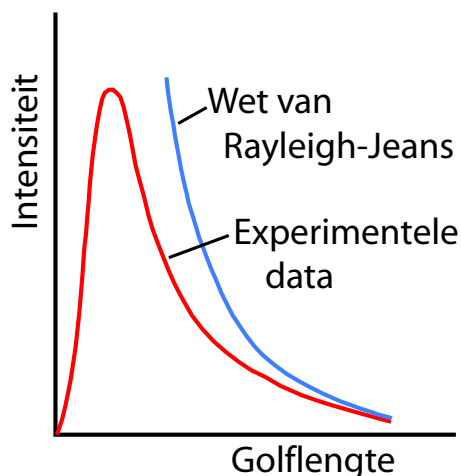
Hoofdstuk 2

Quantummechanica: Een onzekere wereld

Deeltjes en golven

Al vanaf vroege leeftijd zijn we gewend om tegen “dingen” aan te kijken als vaste objecten met een bepaalde vorm en afmeting. Als het woord deeltje wordt gebruikt denken verreweg de meeste mensen aan een klein bolvormig object. We stellen ons zo’n bolletje voor als bewegend, of desnoods stilhangend, in de ruimte. Dit model wordt onder natuurkundigen ook wel het *biljartballenmodel* genoemd. Interacties tussen deeltjes worden in dit model voorgesteld als botsingen tussen harde (biljart)ballen. Ruim een eeuw geleden, in 1897, ontdekte Thomson het elektron [11]. Hij deed dat door elektronen uit een metalen draad te verdampen en te versnellen. Door slim te spelen met de afbuiging van elektronen in een elektrisch en magnetisch veld kon Thomson ook de lading en de massa van het elektron bepalen, een feit dat sterk maakt dat het hier om een deeltje gaat met welbepaalde eigenschappen. Sindsdien denkt de mensheid aan elektronen als hele kleine bolletjes met die eigenschappen, hoewel we de afmeting van het bolletje niet kunnen vaststellen en op zijn best kunnen zeggen dat die kleiner is dan 10^{-18} m.

Denken we aan licht, dan denken we aan de zon of een lamp die lichtgolven uitzenden van een bepaalde kleur. Deze lichtgolven kunnen we afbuigen met bijvoorbeeld glazen lenzen, een zegen voor de ver- en bijzienden onder ons. Het golfkarakter van licht komt buitengewoon goed tot zijn recht als we een kleine lichtbron gebruiken en die op een nauwe spleet laten vallen. Achter de spleet ontstaat een patroon van lichtintensiteiten die we af kunnen beelden op bijvoorbeeld een scherm. Bij bestudering van die patronen kunnen we een goede kwantitatieve beschrijving maken van wat we zien als we aannemen dat licht een golf



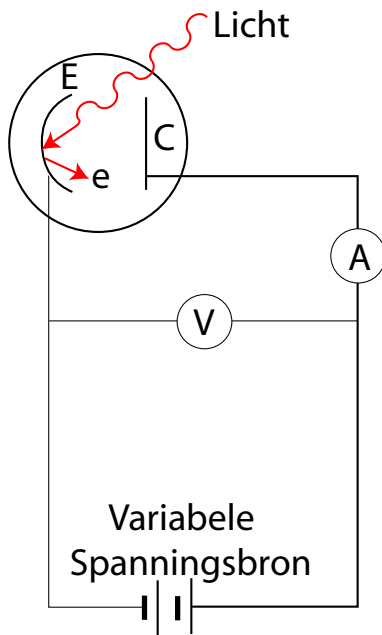
Figuur 2.1: Het golflengtespectrum van een zwarte straler. De curve die onbegrensd is bij lage golflengtes is de klassieke voorspelling van Rayleigh-Jeans. De linker curve die bij alle golflengtes begrensd is volgt uit de hypothese van Planck dat licht in kleine discrete energiepakketjes komt. Deze curve van Planck is in goede overeenstemming met experimentele gegevens.

is, en dat de kleur van het licht correspondeert met een bepaalde golflengte.

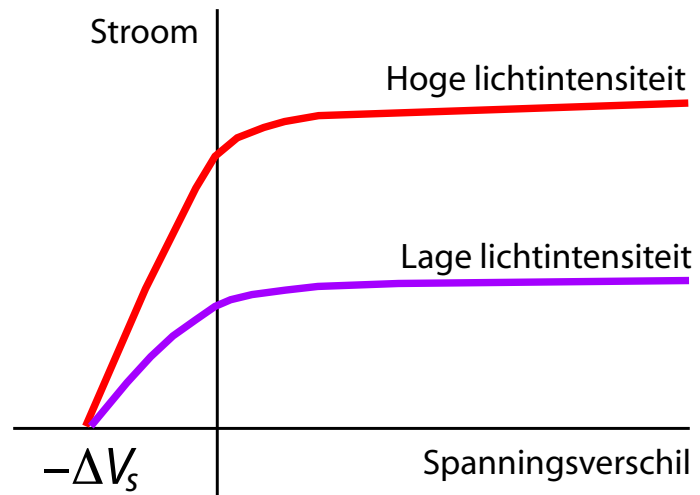
Als we een object verwarmen, zoals een metalen draad, dan gaat die op een bepaald moment zichtbaar licht uitzenden. We kunnen ook zien dat de draad bij toenemende temperatuur eerst donkerrood gaat gloeien en uiteindelijk witheet wordt. De witte kleur bij hoge temperatuur wijst erop dat alle zichtbaar licht golflengtes in ongeveer gelijke mate worden uitgezonden. Als het golflengtespectrum wordt gemeten als functie van de temperatuur van een lichaam dan blijkt dat spectrum een karakteristieke vorm te hebben: een brede piek rond een golflengte die afhankelijk is van de temperatuur, waarbij de intensiteit zowel bij lage als bij hoge golflengte naar nul gaat. Max Planck lukte het de vorm van het spectrum te verklaren, maar alleen als hij aannam dat de lichtenergie in quanta wordt uitgezonden, pakketjes van welbepaalde energie [12]

$$E = h\nu, \quad (2.1)$$

waarin $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Js de constante van Planck is en ν de frequentie van het licht. Een eerdere klassieke verklaring van het spectrum met de theorie van Rayleigh-Jeans werkt met name bij lage golflengte helemaal niet (zie Fig. 2.1). Hoewel Planck daar zelf niet aan wilde is het een sterke aanwijzing dat licht niet bestaat uit continue golven, maar uit een stroom van energiequanta, die ook als lichtdeeltjes kunnen worden gezien. De definitieve bevestiging van deze hypothese kwam in 1905 toen Albert Einstein het foto-elektrisch effect verklaarde [13]. Het



Figuur 2.2: Schematische voorstelling van een opstelling om het foto-elektrisch effect te meten. De negatieve elektrode staat met E aangegeven en de positieve elektrode met C . De spanningsmeter heeft het symbool V en de stroommeter is A .

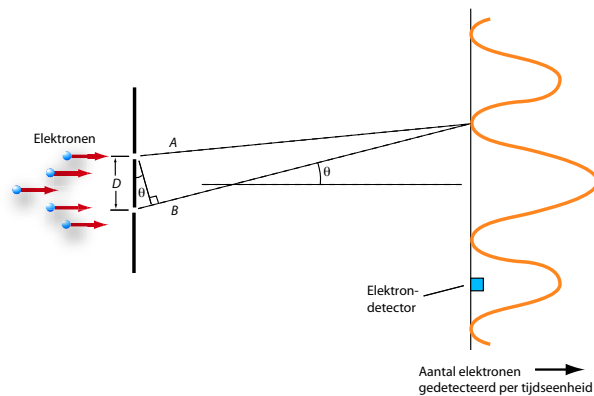


Figuur 2.3: Resultaat van de stroom meting in de opstelling hiernaast. Op de horizontale as staat het spanningsverschil tussen de elektroden. Positief is dat C een hogere spanning heeft dan E in de figuur hiernaast. Op de verticale as staat de gemeten stroom uit. De bovenste curve correspondeert met een lichtbron van dubbele intensiteit vergeleken met de onderste curve.

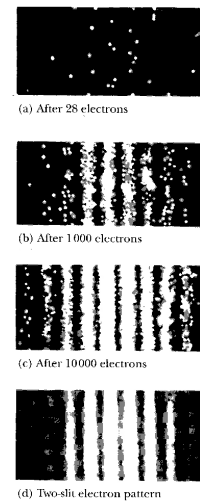
foto-elektrisch effect ontstaat als een lichtbundel op een metalen oppervlak wordt gescheten, waarbij zich in de buurt van dat metalen vlak een ander stuk metaal bevindt dat op een positieve spanning wordt gezet. Een mogelijke opstelling staat geschetst in Fig. 2.2. Als de lichtbundel licht van een bepaalde frequentie bevat dan gaat er een stroom lopen. Bij frequenties onder een bepaalde grens loopt er geen stroom meer. Als de intensiteit van de lichtbundel wordt opgevoerd gebeurt er onder de grensfrequentie nog steeds niets, terwijl boven de grensfrequentie de stroom recht evenredig toeneemt met de intensiteit. Wordt de frequentie verder opgevoerd dan verandert de stroom niet. De verklaring is kinderlijk eenvoudig als je hem eenmaal hebt gehoord, maar het nam het genie van Einstein om erop te komen [13]. Als licht bestaat uit lichtdeeltjes die elk een energie bevatten die

evenredig is met de frequentie van het licht, dan hebben die deeltjes onder een bepaalde energie niet het vermogen om een elektron uit het metaal te schieten. Onder de drempelenergie gebeurt er dus niets ook niet als er heel veel lichtdeeltjes zijn die elk geen elektron los kunnen maken uit het metaal, er gebeurt dan heel veel niets. Boven de grenswaarde van de energie zorgt elk lichtdeeltje ervoor dat er een elektron uit het metaal wordt geschoten. Hoe meer lichtdeeltjes, dus hoe hoger de intensiteit van het licht, hoe meer elektronen en dus hoe groter de stroom. Hoeveel energie elk lichtdeeltje boven de grenswaarde ligt maakt wel uit voor de energie waarmee de elektronen het metaal kunnen verlaten, maar niet voor het aantal elektronen dat uit het metaal komt. Dus de stroom hangt niet af van de energie van de lichtdeeltjes als die boven de grenswaarde is. De resultaten van een experiment met de opstelling geschetst in Fig. 2.2 is weergegeven in de grafiek van Fig. 2.3. In deze grafiek is het potentiaalverschil op de horizontale as uitgezet tegen de gemeten stroom op de verticale as. In dit geval gaat het om licht met een frequentie boven de drempelfrequentie om stroom te induceren. Er blijkt stroom te lopen, zelfs als er een negatieve potentiaal over de elektroden wordt aangelegd. Dat komt omdat de energie van de betreffende fotonen zo hoog is dat de elektronen niet alleen uit het metaalrooster worden bevrijd, maar dat ze eenmaal uit het metaal nog een hoeveelheid energie over hebben die in bewegingsenergie zit. Door deze bewegingsenergie hebben ze een snelheid en kunnen ze ondanks dat ze worden afgeremd door de negatieve potentiaal soms toch nog de overkant halen. De richting van de snelheden van de elektronen is natuurlijk tamelijk willekeurig als ze uit het metaal komen en bij toenemende negatieve spanning zullen uiteindelijk alleen de elektronen die recht tegen de stroom in roeien de overkant nog halen. Daarom loopt de stroom terug bij toenemende negatieve spanning.

Nu we hebben gezien dat licht, waarvan we in eerste instantie misschien dachten dat het golven zijn, ten minste in bepaalde situaties ook als deeltjesstroom moet worden opgevat kunnen we ons afvragen of deeltjes zich dan misschien soms ook onder bepaalde omstandigheden als golven kunnen gedragen. Dat blijkt inderdaad het geval te zijn. Een experiment dat met licht eenvoudig is uit te voeren en waarvan de beschrijving gebruik maakt van het golfkarakter van het licht is ook met deeltjes uit te voeren, en met een verrassend resultaat. Het lichtexperiment gebruikt een puntbron, dat is een bron die klein genoeg is in verhouding tot de overige afstanden in het experiment, een scherm met twee dunne spleten dat voor de lichtbron wordt gehouden op een bepaalde afstand, en een scherm om het licht dat van de bron door de spleten valt af te beelden weer op enige afstand van het scherm met de spleten. Het blijkt nu dat er op het afbeeldingsscherm een patroon zichtbaar is van lichtstrepen. Dat patroon is vrij makkelijk te verklaren als we aannemen dat het licht in fase op de spleten valt



Figuur 2.4: Schematische voorstelling van een twee spleten experiment met elektronen. De afstand tussen de spleten is groot in verhouding tot de breedte van de spleten. De afstand tot het detectievlak (waar de intensiteit aan elektronen aan de rechterkant staan afgebeeld) is groot in verhouding tot de afstand tussen de spleten. De elektronenbron levert een homogene flux op de twee spleten.



Figuur 2.5: Resultaat van de inslag van elektronen op een fotografische plaat nadat respectievelijk 28, 1000, 10000 en veel meer elektronen op twee spleten zijn afgevuurd. De eerste drie plaatjes zijn computer simulaties. Het laatste plaatje het resultaat van een daadwerkelijk experiment [14].

en er uit elk van de spleten weer een bolvormige (feitelijk cilindervormige) golf wordt uitgezonden. De verschillende plaatsen op het afbeeldingsscherm hebben verschillende afstanden tot de twee spleten. Het afstandsverschil zorgt voor een faseverschil, zodat soms de twee golven in fase zijn en er een lichte streep ontstaat en soms de golven in tegenfase zijn zodat ze elkaar uitdoven. Dit experiment kan ook worden uitgevoerd met deeltjes, bijvoorbeeld met elektronen. De afmetingen van de spleten en de afstanden van de schermen moeten dan zorgvuldiger worden gekozen dan bij het experiment met licht, maar mits goed gekozen krijgen we ook een afbeelding met plaatsen waar veel elektronen terechtkomen en plaatsen daartussenin waar geen elektronen terechtkomen. Dit is geïllustreerd in Fig. 2.4 en een resultaat van een daadwerkelijk experiment is te zien in Fig. 2.5, tezamen met simulaties voor zeer lage aantallen afgeschoten elektronen. Dit maakt ook duidelijk dat we in de quantummechanica de uitkomst, die een verdeling is, alleen kunnen meten door een experiment vaak genoeg te herhalen.

Het is onmogelijk om dat te verklaren met klassieke mechanica, maar makkelijk als we een beschrijving in termen van golven aannemen. Als deeltjes zich ook als golven kunnen gedragen ligt het voor de hand ze ook een golflengte toe te kennen. Deze is afhankelijk van de energie van het deeltje, net zoals de energie van een lichtdeeltje afhangt van de frequentie (en dus de golflengte.) Prince Louis de Broglie was de eerste die de relatie tussen de golflengte van een deeltje en de bijbehorende impuls goed voorspelde als [15]:

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \quad (2.2)$$

waarbij λ de golflengte van het deeltje is, $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Js de constante van Planck en mv de impuls van het deeltje is. De impuls hangt voor elk deeltje eenduidig van de energie af. Voor de frequentie van de golf die met het deeltje samenhangt geldt dan dat:¹

$$\nu = \frac{E}{h}, \quad (2.3)$$

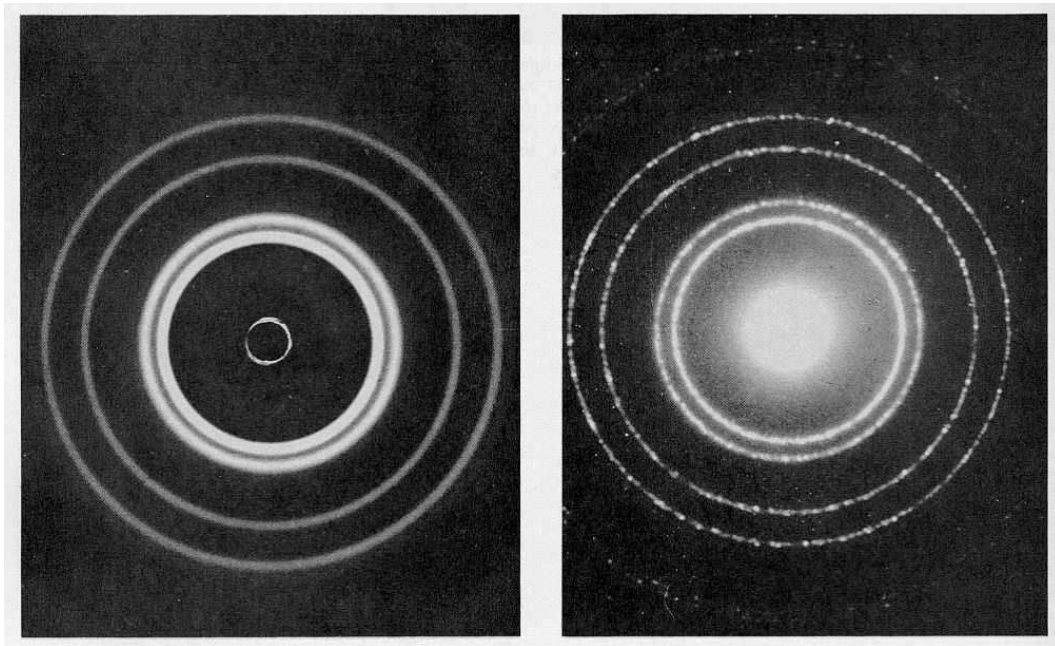
hetgeen precies dezelfde formule is als door Planck voor licht werd gepostuleerd (zie vergelijking 2.1.) Dit maakt de cirkel rond die laat zien dat licht en materiedeeltjes zich in wezen hetzelfde gedragen en dat beiden een deeltjes- en een golfkarakter hebben.

Nu klopt dit theoretisch heel mooi, maar is het ook natuurkunde. Kunnen we het zien en reproduceerbaar meten? Het eerste bewijs daarvoor kwam van een experiment van Davisson en Germer in 1926 [16]. Zij schoten elektronen van ongeveer 54 eV op een nikkel plaatje.² De ontdekking was min of meer toeval, zoals dat wel vaker het geval is.³ Door een verontreiniging van het nikkel oppervlak zagen de heren zich genoodzaakt het nikkel te verhitten om weer een mooi oppervlak te krijgen. Door die verhitting is het nikkel kennelijk van een meer polymorfe structuur, waarin de atoomkernen wat willekeurig van elkaar liggen, naar een éénkristal veranderd. In een éénkristal liggen de atoomkernen op zeer regelmatige afstanden van elkaar. Het geluk wil nu dat de roosterafstand in een nikkel éénkristal (2.15×10^{-10} m) van dezelfde orde is als de De Broglie golflengte van een elektron van 54 eV (1.67×10^{-10} m). Hierdoor ontstaan interferentieëffecten precies zoals dat bij licht gebeurt dat door een regelmatig tralie

¹Neem $E = (1/2)mv^2$ voor de energie en $p = mv$ voor de impuls. De fasesnelheid van de golf wordt gegeven door $v_f = E/p = v/2$. Verder geldt $\lambda\nu = v_f = v/2$. Substitutie geeft dan $\nu = v/(2\lambda) = v/((2h)/(mv)) = (1/2)mv^2/h = E/h$.

²De eV is een energiemaat die correspondeert met een kinetische energie die een elektron krijgt als die een potentiaalverschil van 1 Volt doorloopt. Een 54 eV elektron kun je dus krijgen door een elektron vanuit rust tussen twee elektroden te versnellen waar een potentiaalverschil tussen staat van 54 V.

³In de huidige manier van wetenschapsfinanciering is de ruimte voor dergelijke toevallige ontdekkingen inmiddels wel erg afgenomen.



Figuur 2.6: *Diffractiepatroon van Röntgen straling op een Aluminium folie (links) en elektronen op hetzelfde folie (rechts). De energie van de elektronen was zo afgeregeld dat ze dezelfde De Broglie golflengte hadden als de golflengte van de Röntgen straling. Deze figuur is overgenomen uit [17].*

valt. In dit geval wordt een piek in de intensiteit verwacht als de geprojecteerde roosterafstand voor die hoek gelijk is aan de golflengte van de elektronen. Dat is zo voor een hoek van 50° ($(2.15 \times 10^{-10} \text{ m}) \times \sin 50^\circ = 1.65 \times 10^{-10} \text{ m.}$) Inderdaad was dit de hoek waarbij de verstrooiingspiek werd waargenomen, precies in overeenstemming met de voorspelling van De Broglie. Een meer recent voorbeeld van een diffractiepatroon is te zien in Fig. 2.6 [17]. In 1929 kreeg De Broglie de Nobelprijs voor zijn gedurfde, maar wel gefundeerde aanname.

Golvende deeltjes: de Schrödingervergelijking

Klassieke bewegingsvergelijking

De beschrijving van de beweging van deeltjes in ruimte en tijd geschiedt met zogenaamde bewegingsvergelijkingen. De bewegingsvergelijkingen stellen op elk punt van de baan van een deeltje de verandering van snelheid (versnelling) en verandering van plaats (snelheid) voor in de tijd. In de klassieke mechanica wordt versnelling gegeven door de resultante van de krachten die op een lichaam werken. De relatie tussen de twee staat bekend als de tweede wet van Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.4)$$

De vectorpijltjes boven het symbool van kracht, \vec{F} , en boven het symbool van versnelling, \vec{a} , betekenen dat krachten en versnellingen in drie dimensies werken en dat elke dimensie apart wordt beschreven. De evenredigheidsconstante, m , tussen de kracht en de versnelling heet de massa van het lichaam waarop de kracht werkt: hoe meer massa iets heeft, hoe langzamer het van snelheid zal veranderen bij dezelfde kracht [18].

Als we dus alle krachten kennen die op een lichaam werken, dan tellen we ze als vectoren op en zal de resulterende kracht een versnelling teweegbrengen volgens de tweede wet van Newton, vergelijking 2.4. Om vervolgens iets te kunnen zeggen over de plaats in de tijd van het lichaam waarop de kracht werkt, om de baan in de ruimte van dat lichaam te kunnen bepalen, moeten we de versnelling aan de plaats zien te koppelen. Dat kunnen we in twee stappen doen. Eerst beschouwen we de definitie van versnelling: de verandering van snelheid, $\Delta\vec{v}$, in een bepaald tijdsinterval, Δt , in formulevorm:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (2.5)$$

waarbij de laatste vorm die is waarin de afgeleide wordt gebruikt, de versnelling is de afgeleide van de snelheid naar de tijd. Deze afgeleide is in feite in de laatste gelijkheid van formule 2.5 gedefinieerd als we het tijdsinterval Δt in de limiet naar nul laten gaan. De tweede stap in het relateren van versnelling aan plaats is de toepassing van de definitie van snelheid: de verandering in de plaats $\Delta\vec{x}$ in een bepaald tijdsinterval Δt :

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt}. \quad (2.6)$$

Combineren we definities 2.5 en 2.6 in de vorm met de afgeleiden dan krijgen we:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(d\vec{x}/dt)}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}, \quad (2.7)$$

waarbij de laatste notatie staat voor tweemaal de afgeleide nemen van de plaats naar de tijd. De versnelling en de plaats zijn nu aan elkaar gerelateerd door een differentiaalvergelijking, formule 2.7. Om de plaats als functie van de tijd, oftewel de baan van het lichaam door de ruimte, daadwerkelijk te bepalen zal de differentiaalvergelijking opgelost moeten worden. In het geval van een constante kracht, dus een kracht die niet van de tijd afhangt, hangt de versnelling ook niet van de tijd af. In dat geval is de oplossing van de differentiaalvergelijking 2.7 gegeven door

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2 + \vec{v}(t=0) \cdot t + \vec{x}(t=0). \quad (2.8)$$

De twee laatste termen aan de rechterkant van de vergelijking zijn de snelheid en de plaats, respectievelijk, op het tijdstip $t = 0$. Dit zijn de beginvoorwaarden die nodig zijn om de baan van het lichaam vast te leggen. Als we op $t = 0$ met een andere plaats of andere snelheid beginnen zal bij dezelfde kracht (c.q. versnelling) de baan van het lichaam anders zijn. Bovenstaande bewegingsvergelijking is die van een lichaam in de klassieke mechanica. Dit is een deterministisch model waarin de plaats van een lichaam, gegeven de krachten die er werken en de beginpositie en -snelheid, eenduidig vastligt op elk tijdstip.

Voor conservatieve krachten, en alle fundamentele krachten zijn conservatief, blijkt dat de kracht kan worden geschreven als:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} -\partial U/\partial x \\ -\partial U/\partial y \\ -\partial U/\partial z \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Hierin is U de potentiële energie. Bijvoorbeeld de potentiële energie van de zwaartekracht van de aarde op een lichaam als het onze neemt af met de afstand tot de aarde. Dit is precies waarom de zwaartekracht ons naar de aarde toe trekt (let op het minteken in formule 2.9.) Het is opmerkelijk dat een krachtveld met drie componenten voor elk punt van de ruimte⁴ kan worden bepaald in termen van een potentiële energie met maar één getal per punt in de ruimte.⁵ Een conservatief krachtveld bevat dus kennelijk een factor drie redundante informatie. In moderne theorieën wordt dan ook met de potentiële energie gewerkt en niet met kracht.⁶

⁴We noemen een veld met drie componenten een vectorveld.

⁵We noemen een veld met maar één component een scalarveld.

⁶We kunnen het gebruik van potentiële energie in plaats van kracht ook als een hoger abstractieniveau zien.

Quantummechanische bewegingsvergelijking

Gaan we er nu vanuit dat elk deeltje ook een golfkarakter heeft dan kunnen we niet meer eenduidig over de plaats van een deeltje praten. Als we alleen naar het golfkarakter van een deeltje kijken dan heeft die golf maxima, waar als het ware “veel” van het deeltje is en minima, waar als het ware “weinig” van het deeltje is. We kunnen dat, net als bij licht beschrijven met een verdeling in de ruimte die aangeeft dat ergens “veel” deeltje is en op andere plaatsen zich “weinig” deeltje bevindt. Als we die verdeling nu opvatten als de “plaats” van een deeltje dan dringt zich natuurlijk de vraag op wat de bewegingsvergelijking dan is voor die nieuwe plaatsverdeling. Deze vraag is voor het eerst beantwoord door Erwin Schrödinger die een bewegingsvergelijking opstelde voor de plaats als verdeling. Als we nu een deeltje niet meer opvatten als iets met op ieder tijdstip een vaste plaats $\vec{x}(t)$, maar als een verdeling over de ruimte die op elk tijdstip t aangeeft “hoeveel” er van het deeltje op plaats \vec{x} zit dan kunnen we dat vatten in een functie die bekend staat als de golffunctie:

$$\Psi(\vec{x}, t). \quad (2.10)$$

Beweging is dan niet meer de verandering van de plaats \vec{x} van het deeltje, maar de verandering van de hoeveelheid van het deeltje op die plaats $\Psi(\vec{x}, t)$. De vergelijking die Schrödinger opschreef voor de evolutie in de tijd van de golffunctie is:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + U(\vec{x}, t)\Psi. \quad (2.11)$$

Voor het gemak hebben we als nieuw symbool de gereduceerde constante van Planck, \hbar (spreek uit: “h bar”), ingevoerd

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054 \times 10^{-34} \text{ Js} \quad (2.12)$$

De kromme d's, ∂ , in deze vergelijking staan voor partiële afgeleiden. Deze kunnen worden opgevat als een gewone afgeleide waarbij de andere parameters en variabelen waarvan de functie die wordt afgeleid constant worden gehouden. Het symbool $U(\vec{x}, t)$ staat voor de potentiële energie, die in het algemeen van de plaats afhangt en ook nog van de tijd kan afhangen. De potentiële energie hangt weer nauw samen met de kracht, precies volgens de klassieke formule 2.9. Een niet triviale verandering in de baan van een deeltje, ook als die als golffunctie wordt voorgesteld, is dan ook altijd het gevolg van een variatie van de potentiële energie. Als de potentiële energie niet van de plaats en de tijd afhangt, dan zal een deeltje, in overeenstemming met de eerste wet van Newton, een baan in rechte lijn en met constante snelheid volgen. Aan de golffunctie is dat te zien doordat de vorm niet verandert, maar de locatie in de ruimte als functie van de tijd wel.

Om nu naar de implicaties te kijken van de Schrödinger vergelijking kunnen we kijken naar het geval waarin er geen krachten werken op het deeltje dat we beschouwen en nemen we de in dat geval constante potentiaal overal gelijk aan nul. We verwachten dan een simpel gedrag in de tijd (het deeltje gaat recht door met dezelfde snelheid.) Dit komt tot uitdrukking in de aanname dat het gedrag van het deeltje kan worden beschreven door de golffunctie:⁷

$$\Psi(\vec{x}, t) = e^{-(i/\hbar)(\omega t - p_x x - p_y y - p_z z)}. \quad (2.13)$$

Als we dit invullen in de Schrödinger vergelijking 2.11 dan krijgen we voor Ψ de vergelijking:

$$\omega \Psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \Psi(\vec{x}, t). \quad (2.14)$$

We zien nu dat Ψ helemaal uit de vergelijking kan worden gedeeld, en dat de vergelijking waar is als geldt:

$$\omega = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2). \quad (2.15)$$

De oplossing in 2.13 is een vlakke golfoplossing. Het reële deel van de oplossing heeft steeds een maximum op

$$\omega t = p_x x + p_y y + p_z z, \quad (2.16)$$

terwijl het imaginaire deel steeds een maximum heeft bij

$$\omega t = p_x x + p_y y + p_z z + \pi/2. \quad (2.17)$$

Verder blijkt uit vergelijking 2.15 dat ω vast ligt als we p_x , p_y en p_z hebben gekozen. Als we nu kijken naar de groepssnelheid van de golffunctie dan zien we dat die wordt gegeven door

$$\vec{v}_g = d\omega/d\vec{p} = \vec{p}/m \quad (2.18)$$

Omdat informatie overdracht met de groepssnelheid plaatsvindt, zien we hieruit dat \vec{p}/m kennelijk is op te vatten als de snelheid van het eenparig rechtlijnig bewegend deeltje. Dus dan kunnen we \vec{p} opvatten als de impuls van dat deeltje. Voor ω krijgen we dan de uitdrukking:

$$\omega = \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2m} = \frac{1}{2}mv^2, \quad (2.19)$$

⁷Op dit moment is de functionele vorm van de golffunctie gewoon een aanname, "Ansatz" in goed Engels. Dat het een gelukkige aanname blijkt zullen we maar de hand van de meester noemen.

de kinetische energie van het deeltje, en, omdat het een vrij deeltje is, ook de totale energie van het deeltje. In retrospectief kunnen we zien dat de Schrödinger-vergelijking niets anders is dan de vergelijking:

$$E = \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2m}, \quad (2.20)$$

waarbij de substituties

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{x}}, \quad (2.21)$$

zijn uitgevoerd. Verder zijn beide kanten van de vergelijking werkend op de golffunctie gemaakt door van rechts met de golffunctie te vermenigvuldigen.⁸

Het principe van formule 2.21 om de quantummechanische bewegingsvergelijking te maken uit de klassieke bewegingsvergelijking is algemeen en zal ons later van nut zijn.

Niet precies, toch exact

Als we proberen de oplossingen van de Schrödingervergelijking direct te interpreteren als de waarschijnlijkheid dat een deeltje zich op een bepaalde plaats bevindt, dan lopen we meteen tegen het probleem op dat de oplossingen van de Schrödingervergelijking zowel negatieve als positieve waarden op kunnen leveren als functie van de plaats (of nog erger in deze context, dat de golffunctie niet reëeltallig is.) De oplossing van dit schijnbare probleem is analoog aan wat er met licht aan de hand is. Wat we waarnemen van licht is een lichtintensiteit en lichtintensiteit is het kwadraat van de golf die we met het licht associëren. Door het kwadraat te nemen van de golffunctie worden de waarden altijd positief. Als generalisatie voor complexe getallen nemen we het kwadraat van de absolute waarde van het complexe getal:

$$I(\vec{x}, t) = |\Psi(\vec{x}, t)|^2 = \Psi(\vec{x}, t)\Psi^*(\vec{x}, t), \quad (2.22)$$

waarbij Ψ^* staat voor de complex geconjugeerde van Ψ .⁹ Dit heet de Born waarschijnlijkheidsinterpretatie van de golffuncties, naar degene die voor het eerst met het voorstel voor deze interpretatie kwam: Max Born. Om de waarschijnlijkheidsinterpretatie te laten werken moet natuurlijk wel de totale kans om het deeltje

⁸Dat de golffunctie aan beide kanten van het =-teken rechts wordt gezet is belangrijk. De afgeleiden moeten op de golffunctie “werken” en er dus voor staan.

⁹Bij complexe conjugatie veranderen alle factoren i in $-i$, dus $(a + bi)^* = (a - bi)$ als a en b reëel zijn.

ergens in de ruimte aan te treffen op elk moment gelijk zijn aan 1. Wiskundig is de conditie daarvoor:

$$\int_{\text{hele ruimte}} I(\vec{x}, t) d^3\vec{x} = 1. \quad (2.23)$$

Als we dit proberen toe te passen op een vlakke golfoplossing dan zien we dat de uitkomst van de integraal oneindig is en dat er dus niet makkelijk een vermenigvuldigingsfactor voor kan worden gezet die de waarschijnlijkheid op 1 normeert. Dit is een gevolg van het feit dat een vlakke golfoplossing een oneindig scherp bepaalde impuls heeft. Een manifestatie van de quantummechanica is dan dat de plaats oneindig slecht is bepaald en dat het deeltje in feite een even grote kans heeft om waar dan ook te zijn in de ruimte. Een dergelijke verdeling is niet te normeren. In de praktijk betekent dat dat een deeltje met oneindig scherp bepaalde impuls niet voor kan komen. Dit wordt precies gemaakt in de onzekerheidsrelaties van Heisenberg:

$$\Delta p \times \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta E \times \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.24)$$

De vlakke golfoplossing is wel een nuttige limietsituatie voor vrije deeltjes met een goed bepaalde impuls en we zullen deze oplossing dan ook nog vaak gebruiken, in weerwil van de matige wiskundige fundering.¹⁰

Golffunctie plus golffunctie is golffunctie

Omdat de afgeleide van de som van twee functies hetzelfde is als de som nemen van de afgeleide van de functies:

$$\frac{d(f + g)}{dx} = \frac{d(f)}{dx} + \frac{d(g)}{dx}, \quad (2.25)$$

zijn lineaire combinaties van oplossingen van de Schrödingervergelijking ook weer oplossingen van die vergelijking. Dit staat bekend als het superpositiebeginsel. Golffuncties die aan dezelfde Schrödingervergelijking voldoen, dat wil zeggen aan de Schrödingervergelijking met dezelfde potentiaal U , mogen bij elkaar worden opgeteld en zijn dan weer een mogelijke oplossing van die Schrödingervergelijking.

De intensiteiten kunnen niet bij elkaar worden opgeteld, maar ontstaan pas uit de golffunctie of lineaire combinatie van golffuncties door kwadrateren. Hieruit volgt het begrip interferentie dat plaats vindt als twee of meer oplossingen worden

¹⁰Aan die wiskundige fundering is wel wat te doen als we normeerbare functie als verzameling nemen en de afsluiting van die verzameling bekijken. Net niet normeerbare functie als die van de vlakke golf vallen dan op de rand van die afsluiting en kunnen als limietgeval voor normeerbare functie wiskundig streng worden behandeld.

opgeteld en vervolgens gekwadrateerd. Als bijvoorbeeld de golffuncties Ψ_1 en Ψ_2 oplossingen zijn van de Schrödinger vergelijking dan is $\Psi_1 + \Psi_2$ dat ook en geeft aanleiding tot de plaatswaarschijnlijkheid:

$$\begin{aligned} I(\vec{x}, t) &= |\Psi_1(\vec{x}, t) + \Psi_2(\vec{x}, t)|^2 \\ &= |\Psi_1(\vec{x}, t)|^2 + |\Psi_2(\vec{x}, t)|^2 + 2\text{Re} [\Psi_1(\vec{x}, t)\Psi_2(\vec{x}, t)]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

De eerste twee termen aan de rechterkant van de vergelijking zijn de intensiteiten van de afzonderlijke golffuncties. De laatste term stelt de interferentieterm voor en is twee maal het reële deel van het product van de twee golffuncties. Deze term kan zowel nul zijn, geen interferentie, als positief, constructieve interferentie, als negatief, destructieve interferentie.

Een (minimale) verzameling van oplossingen van de Schrödinger vergelijking, waaruit alle mogelijke oplossingen door lineaire combinaties zijn te reconstrueren heet een basis van oplossingen. Een voorbeeld van een basis van periodieke oplossingen voor de vrije stationaire Schrödingervergelijking, dus met potentiaal $U = 0$ en tijdafgeleide $\partial\Psi/\partial t = 0$, wordt gegeven door:

$$\cos(nx) \text{ en } \sin(nx) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.27)$$

Elke oplossing van de vrije stationaire Schrödingervergelijking is te schrijven als

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \quad (2.28)$$

Als voorbeeld geven we de periodieke functie:¹¹

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } 0 < (x|2) < 1 \\ -1 & \text{als } 1 < (x|2) < 2 \end{cases} \quad (2.29)$$

De functie kan ook worden geschreven als:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)\pi} \sin(\pi(2n+1)x) \quad (2.30)$$

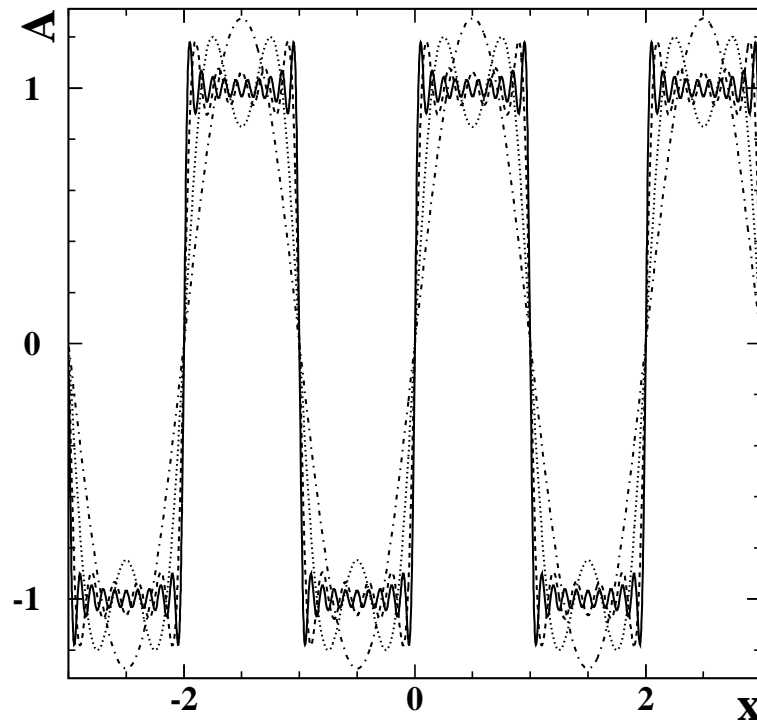
Dit voorbeeld is geïllustreerd in Fig. 2.7, waarin de benadering van de blokfunctie 2.29 tot op verschillende orden van n zijn getekend. Een dergelijke benadering met sin en cos functies heet een Fourierreeks.

¹¹ $x|2$, x module 2, betekent het getal dat wordt gevonden door net zo lang 2 bij x op te tellen of af te trekken zodat het resultaat tussen 0 en 2 ligt. Bijvoorbeeld $1.5|2 = 1.5$, $5.5|2 = 1.5$ en $-2.5|2 = 1.5$.

We kunnen het begrip Fourierreeks uitbreiden tot het beschrijven van niet periodieke functies. De som moet dan door een integraal worden vervangen:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a(p)e^{ipx} dp. \quad (2.31)$$

De coëfficiënten, $a(p)$, vormen nu zelf een functie van de integratievariabele p . De integraal heet een Fouriertransformatie en $a(p)$ en $f(x)$ heten elkaars Fouriergetransformeerden. De vrije Schrödinger vergelijking 2.11 met $U = 0$ kan nu worden opgevat als de Fouriergetransformeerde van de klassiek bewegingsvergelijking 2.19 (en vice versa.)



Figuur 2.7: Benadering van de blokfunctie gedefinieerd in formule 2.29 met functies $\sin(\pi(2n + 1)x)$ van toenemende orde in $n = 1, 2, 5, 10$ en geschikt gekozen coëfficiënten.

Opgaven

- 2.1: Hoe kunnen we in de quantummechanica achterhalen wat de kracht is die op een systeem wordt uitgeoefend als we de golffunctie daarvan kennen?
- 2.2: Reken zelf na dat de Schrödingervergelijking 2.11 kan worden verkregen door in de klassieke energierelatie $E = p^2/(2m)$ de energie E en impuls p te vervangen zoals in formule 2.21. Voor het gemak kan p 1-dimensionaal worden genomen.
- 2.3: Laat zien dat voor een vlakke golfoplossing $\Psi(x, t) = e^{-(i/\hbar)(\omega t - p_x x)}$ (analoog in 1 ruimtedimensie aan formule 2.13 die in 3 ruimtedimensies is) geldt dat $I = \Psi\Psi^*$ overal en altijd gelijk is aan 1. Waarom is deze golffunctie niet te normeren op de hele ruimte?
- 2.4: Als de plaats van een elektron bekend is tot beter dan 10^{-15} m (de afmeting van een proton), bereken dan de minimale onzekerheid op de impuls in eenheden eV.
- 2.5: Laat zien dat als de golffuncties f en g oplossingen zijn van de Schrödingervergelijking 2.11 de functie $h = f + g$ dat ook is. Waaraan moet de potentiaal U voldoen om dat zo te maken?

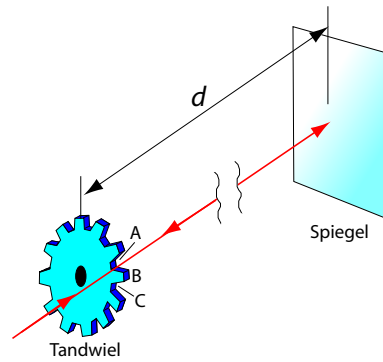
Hoofdstuk 3

Speciale relativiteitstheorie: Grenzen aan de snelheid

De lichtsnelheid

Newton geloofde in “actio in distance”, het fenomeen dat krachten, zoals de zwaartekracht, zich in de ruimte met oneindige grote snelheid voortplanten en “op afstand” op andere lichamen werken. In de 19^e eeuw werd duidelijk dat elektromagnetische krachten zich voortplanten met een eindige snelheid, de lichtsnelheid. Dit besef kwam tegelijkertijd met het inzicht dat het elektromagnetisme, in de vorm van de Maxwell vergelijkingen, niet-triviale oplossingen heeft zelfs als er geen elektrische of magnetische¹ ladingen in de buurt zijn. De snelheid van het licht kan onder andere worden gemeten met een opstelling die het wiel van Fizeau wordt genoemd. De opstelling wordt geïllustreerd in Fig. 3.1. Een dunne lichtstraal wordt door de tanden van een tandwiel gestuurd. Als er een tand voor het licht is passeert het niet, anders wel. Op een afstand d staat een spiegel opgesteld die de lichtbundel precies recht terugkaatst. Als de lichtbundel terugkomt via de spiegel bij het tandwiel als het precies een half tandje is verplaatst wordt het licht op de terugweg niet doorgelaten. Als de schijf langzaam sneller gaat draaien komt er een moment dat er geen licht meer terugkomt door het tandwiel. De tijd die dan nodig is om een half tandje te draaien is dezelfde tijd die het licht nodig heeft om de afstand $2d$ te reizen. Als de snelheid van de tandjes v is en de afstand

¹Magnetische ladingen, ook wel magnetische monopolen genoemd, dus alleen een noord- of zuidpool van een magneet, zonder de andere polariteit, zijn sowieso speculatief in de zin dat ze nog nooit zijn geobserveerd. Er is echter meer dan één theoretische reden [19, 20] waarom zulke magnetische monopolen toch zouden moeten bestaan.



Figuur 3.1: *Lichtsnelheidsmeting met het wiel van Fizeau. Een dunne lichtstraal wordt door de tanden van een tandwiel gestuurd. Als er een tand voor het licht is passeert het niet, anders wel. Op een afstand d staat een spiegel opgesteld die de lichtbundel precies recht terugkaatst. Als de lichtbundel terugkomt via de spiegel bij het tandwiel als het precies een half tandje is verplaatst wordt het licht op de terugweg niet doorgelaten. Tegenwoordig hebben we oscilloscopen met een tijdsresolutie van 100 ps. De lichtsnelheid is ongeveer $3 \text{ cm}/(100 \text{ ps})$. Laten we het licht dus 1.5 m heen en weer lopen dan meten we de lichtsnelheid al op 1% precies.*

tussen de tandjes ℓ , dan is de lichtsnelheid aldus te meten als ongeveer:

$$c = \frac{2d}{(1/2)\ell} \cdot v \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (3.1)$$

Tegenwoordig hebben we oscilloscopen met een tijdsresolutie van beter dan 100 ps. De lichtsnelheid is ongeveer $3 \text{ cm}/100 \text{ ps}$. Laten we een lichtpuls dus 1.5 m heen en weer lopen dan kunnen we met de oscilloscoop de lichtsnelheid al op 1% precies meten. Nu we de lichtsnelheid kunnen meten, kunnen we die ook onder verschillende omstandigheden meten, bijvoorbeeld in een rijdende trein of in een vliegtuig. A priori zouden we kunnen verwachten dat als we de lichtbron op een rijdende trein zetten die bijvoorbeeld van ons wegrijdt en de lichtsnelheid nauwkeurig meten die kleiner is dan als de trein met de lichtbron stilstaat. Dat blijkt niet het geval te zijn! De lichtsnelheid blijkt onder alle omstandigheden in vacuüm (of in lucht, dat is bijna hetzelfde voor licht) precies hetzelfde te zijn. Of we er nu snel vanaf bewegen of snel naar toe gaan. Verder blijkt dat de lichtsnelheid de hoogste snelheid is die we ooit hebben gemeten.

Er is dus een maximum snelheid, de lichtsnelheid c , en die is voor alle waarnemers, ongeacht hun eigen snelheid, hetzelfde.

Lengtecontractie en tijddilatatie

Dat er een maximumsnelheid is heeft nogal wat consequenties. De belangrijkste is wel dat we snelheden dus niet zomaar meer mogen optellen. Als we op een trein zitten die met drie-kwart van de lichtsnelheid beweegt ten opzichte van iemand op het perron² en vervolgens een tennisbal met een racket met drie-kwart van de lichtsnelheid naar voren serveren³, dan betekent dat niet dat de tennisbal met anderhalf keer de lichtsnelheid ten opzichte van de waarnemer op het perron beweegt. Kennelijk kunnen we dit soort snelheden niet lineair bij elkaar optellen. De optelregel voor snelheden blijkt te zijn:

$$v' = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (3.2)$$

Als de snelheden v_1 en v_2 in deze formule kleiner zijn dan c , dan zal de “som” van de snelheden v' ook kleiner zijn dan c .

De coördinatentransformatie van plaats en tijd voor een waarnemer S' met een constante snelheid V ten opzichte van een ander waarnemer S blijkt niet de klassieke Galileitransformatie te zijn:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t, \end{aligned} \quad (3.3)$$

maar geregeld te worden door de Lorentztransformatie:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

De Lorentzcontractie factor wordt gegeven door

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} \quad \text{met} \quad \beta = v/c \quad (3.5)$$

Dat deze Lorentzcontractie werkelijkheid is kunnen we demonstreren aan iemand die met grote vaart met een ladder van 6 m een garage in loopt van 5 m diep. Als de snelheid waarmee degene die met de ladder de garage in loopt $v = 1.7 \times 10^8$ m/s is en de waarnemer stilstaat zodanig dat de laddersjouwer van

²Daar kan de NS nog een puntje aan zuigen.

³Daar kan Andy Roddick nog een puntje aan zuigen

hem wegloopt (en de waarnemer hem dus op de rug ziet terwijl hij de garage in loopt), dan bereikt het licht met de informatie dat de achterkant van de ladder de garagedeur passeert de waarnemer op hetzelfde moment dat het licht met de informatie dat de ladder de achterkant van de garage raakt. Dat laatste licht komt van verder en is dus langer onderweg. Of anders geformuleerd, aan de achterkant van de garage kijkt de waarnemer verder in het verleden. Juist doordat het begrip gelijktijdigheid voor de stilstaande waarnemer anders is dan voor de laddersjouwer, lijkt het voor de stilstaande waarnemer alsof de ladder in de garage past, terwijl voor diegene die met de ladder de garage inhoudt de catastrofe onmiddellijk duidelijk wordt.⁴ Hoewel hier staat dat het voor de stilstaande waarnemer *lijkt* alsof de ladder in de garage past, is dit voor de waarnemer de realiteit. Deze stilstaande waarnemer kan niet anders weten. De ladder *is* voor deze waarnemer dus 5 m, terwijl die voor de laddersjouwer 6 m is.

Een voorbeeld van tijddilatatie is het verval van radioactieve deeltjes in beweging. Muonen zijn deeltjes die na $2.2 \mu\text{s}$ vervallen in een elektron en twee neutrino's (we komen later terug op dit verval.) Worden ze echter versneld tot bijna de lichtsnelheid dan lijkt het voor de waarnemer waarvoor de muonen met bijna de lichtsnelheid gaan alsof ze veel trager vervallen. Dit kan in deeltjesversnellers worden geverifieerd en blijkt inderdaad zo te zijn. Het is zelfs door dit effect dat we denken dat het mogelijk is een opslagring te bouwen voor muonen waarin ze gemiddeld enkele milliseconden kunnen ronddraaien voordat ze vervallen, dus duizend keer langer dan hun levensduur in rust.

De relatie tussen energie, impuls en massa

In klassieke mechanica is impuls de massa maal de snelheid:

$$p = mv = m \frac{dx}{dt} \quad (3.6)$$

We hebben echter gezien dat we voorzichtig moeten zijn met het begrip snelheid $v = dx/dt$. In het relativistische geval kunnen we beter de afgeleide van de plaats nemen naar de eigentijd van het deeltje, de tijd die behoort bij een waarnemer waarvoor het deeltje stil staat. Dit is in ieder geval een coördinatenstelsel dat we zonder ambiguïteit kunnen definiëren. Voor de waarnemer waarvoor het deeltje een snelheid v heeft geldt dan:

$$p = m \frac{dx'}{dt} = m \frac{d(\gamma(x + vt))}{dt} = \gamma mv, \quad (3.7)$$

⁴Een analoog en iets meer uitgewerkt voorbeeld staat in het Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde 70/4 van april 2004 onder de titel "De balk en de schuur"

en inderdaad blijkt dit heel goed bruikbaar als relativistische impuls. Ook interessant is het om te kijken hoe de tijd van de waarnemer waarvoor het deeltje snelheid v heeft zich verhoudt tot de eigentijd van het deeltje. Om de symmetrie tussen tijd en ruimte optimaal te benutten vermenigvuldigen we de tijd met een factor c , waardoor ct dezelfde eenheid (m) krijgt als de plaatscoördinaten. Om iets equivalent te krijgen aan de snelheid nemen we nog steeds de afgeleide naar de eigentijd t :

$$p^0 = m \frac{dct'}{dt} = mc \frac{d\left(\gamma\left(t + \frac{v}{c^2}x\right)\right)}{dt} = \gamma mc. \quad (3.8)$$

In bovenstaande uitdrukking heeft p^0 de eenheden van een impuls (kg m/s). Definiëren we nu de relativistische energie als $E = p^0 c$ dan krijgen we hiervoor de goede eenheden en:

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}. \quad (3.9)$$

We kunnen deze uitdrukking ontwikkelen door middel van een Taylorreeks in de variabele v/c en krijgen dan voor de eerste paar termen:

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right). \quad (3.10)$$

De eerste term correspondeert met de rustenergie van een deeltje, de welbekende $E = mc^2$. De tweede term correspondeert precies met de klassieke kinetische energie van een deeltje met snelheid v . De derde term geeft aan dat er nog (relativistische) correcties volgen, van de orde van v^2/c^2 , die heel klein zijn als v klein is ten opzichte van c . Als v in de buurt komt van c zijn deze termen wel belangrijk en moet de uitdrukking genomen worden zoals in formule 3.9.

Voor de energie en impuls van een vrij deeltje geldt nu altijd voor alle waarnemers de relatie:

$$E^2 = (\vec{p} \cdot \vec{p}) c^2 + m^2 c^4, \quad (3.11)$$

waarbij de impuls hier is ggeneraliseerd tot de vectorimpuls. Deze relatie correspondeert met de klassieke relatie tussen energie en impuls waaruit de Schrödinger-vergelijking was af te leiden:

$$E = \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2m}. \quad (3.12)$$

Voordat we dit gebruiken om een relativistische quantumtheorie te maken gaan we eerst nog in op wat notationele kwesties.

Viervectoren: een elegante notatie

In het voorgaande hebben we gezien dat in Lorentztransformaties plaats en tijd met elkaar mengen. We kunnen als het ware tijd en plaats in elkaar omzetten. Tijd en plaats nemen dan ook een gelijkwaardige positie in in de relativiteitstheorie. Om dat wat explicieter te maken en ook omdat hierdoor een hoop notaties korter worden kunnen we in plaats van de tijd en de drie-dimensionale plaats apart te nemen ze combineren in een zogenaamde viervector:

$$a_\mu = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

waarbij de index μ van 0 tot en met 3 loopt. Merk op dat de index hier rechts *onder* staat. Een dergelijke viervector heet een covariant. Als de index *boven* staat betreft het een contravariant. Co- en contravarianten worden in elkaar overgevoerd door de metriek, $g^{\mu\nu}$:

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu, \quad a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu, \quad (3.14)$$

waarbij de relativistische metriek wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} g^{00} &= g_{00} = 1, \\ g^{11} &= g^{22} = g^{33} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \\ g^{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} = 0 \text{ als } \mu \neq \nu. \end{aligned} \quad (3.15)$$

We kunnen ons $g^{\mu\nu}$ voorstellen als matrix waarvan alleen de diagonale elementen waarden aannemen:⁵

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

In formule 3.14 hebben we de Einstein sommatie conventie gebruikt die zegt dat over indices die eenmaal onder en eenmaal boven voorkomen wordt gesommeerd van 0 tot en met 3. Het inproduct van twee viervectoren is een Lorentzinvariante grootheid (voor alle waarnemers hetzelfde) en wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} a_\mu a^\mu &= a_0 a^0 + a_1 a^1 + a_2 a^2 + a_3 a^3 \\ &= a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

⁵Hoewel deze voorstelling niet strikt correct is komen we er in deze tekst mee weg.

waarbij de superscripts buiten de haakjes, $()^2$, kwadrateren betekent.

Behalve de plaats kunnen we ook de energie en impuls samen als viervector schrijven:

$$p_\mu = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Dit heet dan de vierimpuls. De vierimpuls transformeert precies eender als viervectoren van de plaats onder Lorentztransformaties.

Lorentztransformaties, zoals die in formule 3.4, worden in viervectornotatie geschreven als:

$$x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

waarbij in het tweede deel van de vergelijking het voorbeeld is genomen van een Lorentztransformatie die correspondeert met een snelheid $v = \beta c$ in de z -richting.

Relativistische quantummechanica: anti-deeltjes duiken op

Gaan we nu uit van de relatie tussen energie en impuls zoals gegeven in formule 3.11 en passen we de substitutie toe zoals in formule 2.21 dan krijgen we

$$\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = (\hbar c)^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - m^2 c^4 \Psi. \quad (3.20)$$

Deze vergelijking staat bekend als de Klein-Gordon vergelijking. In dit geval is Ψ ook op te lossen als vlakke golven:

$$\Psi(\vec{x}, t) = e^{-i\hbar(\omega t - \vec{p} \cdot \vec{x})}. \quad (3.21)$$

Alleen, hier heeft ω twee geldige oplossingen:

$$\omega = \sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p} c^2 + m^2 c^4} \quad \text{of} \quad \omega = -\sqrt{\vec{p} \cdot \vec{p} c^2 + m^2 c^4}, \quad (3.22)$$

die bekend staan als positieve en negatieve frequentie oplossingen. Het is à priori niet duidelijk wat we aan moeten met een oplossing waarin ω negatief is als we ω als de energie opvatten, zoals in het klassieke geval. De correcte interpretatie

blijkt dat we de twee oplossingen kunnen zien als die voor een deeltje (positieve ω) en anti-deeltje (negatieve ω). We vatten het anti-deeltje dan op als terugreizend in de tijd. In dat geval keert het teken van de impuls om. Dat heeft in de golf functie Ψ het gevolg dat het relatieve teken tussen ω en \vec{p} omkeert. We kunnen dan $-\omega$ opvatten als de energie van de oplossing en die is dan positief.

Dus elke oplossing van de relativistische golfvergelijking heeft een positieve frequentie oplossing met positieve energie die we met een deeltje associëren en een negatieve frequentie oplossing met positieve energie, maar tegengestelde impuls, die we met anti-deeltjes associëren.

Deze interpretatie voor de oplossingen van de Klein-Gordon vergelijking is gegeven door Weisskopf en Pauli [21].

Voordat deze interpretatie aanvaard werd heeft men ook nog geëxperimenteerd met het lineair maken van de golfvergelijking. Het idee is dat de negatieve energie oplossingen het gevolg zijn van de kwadratische energieterm in vergelijking 3.11. Dit probleem is gekraakt door Dirac. De eerste stap die nodig is, is een formulering van energie en impuls in één object:

$$p^\mu = \begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Vervolgens schreef Dirac de vergelijking 3.11 als:

$$0 = E^2/c^2 - \vec{p}^2 - m^2c^2 = p^\mu p_\mu - m^2c^2 = (p^\mu - mc)(p_\mu + mc). \quad (3.24)$$

Het product $p^\mu p_\mu$ moet hier worden gelezen als:

$$p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 = (E/c)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2. \quad (3.25)$$

Maar hier wordt stevig gesmokkeld in de wiskunde. Een object met vier componenten, p^μ , wordt opgeteld bij een scalar, mc . De interpretatie daarvan is volkomen duister. Om dat te repareren voeren we een object γ^μ in dat ook vier componenten heeft, net zoals p^μ , en vermenigvuldigen γ^μ met p^μ waar dat zo te pas komt. We krijgen dan:

$$0 = (\gamma_\mu p^\mu - mc)(\gamma^\mu p_\mu + mc), \quad (3.26)$$

waarbij we voor de producten $\gamma_\mu p^\mu$ dezelfde regel volgen als in formule 3.25:

$$\gamma^\mu p_\mu = \gamma_\mu p^\mu = (\gamma^0 p^0) - (\gamma^1 p^1) - (\gamma^2 p^2) - (\gamma^3 p^3). \quad (3.27)$$

Dat product is dan weer een getal zodat de kwadraatsplitsing van formule 3.26 werkt. Door invullen in de oorspronkelijke vergelijking 3.24 krijgen we vergelijkingen voor de verschillende γ 's:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \begin{cases} 2 & \text{als } \mu = \nu = 0, \\ -2 & \text{als } \mu = \nu = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{als } \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (3.28)$$

Het is niet moeilijk na te gaan dat gewone getallen voor de verschillende γ 's nooit kunnen voldoen, ook complexe getallen niet. De kleinste objecten die aan deze rekenregels kunnen voldoen blijken 4×4 matrices te zijn. In dat geval moeten de 2, -2 en 0 aan de rechterkant van vergelijking 3.28 ook opgevat worden als 4×4 matrices:

$$2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad -2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Een mogelijke oplossing wordt gegeven door de matrices:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Dit is lang niet de enige oplossing en in feite maakt de precieze presentatie van de oplossing niet uit. Het blijkt nu dat we één van de twee lineaire factoren in E uit vergelijking 3.26 kunnen nemen en gelijk stellen aan nul. Passen we weer het voorschrift uit 2.21 toe dan volgt de Dirac vergelijking:

$$i\hbar \left(\gamma^0 \frac{\partial \Psi}{\partial ct} - \gamma^1 \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \gamma^2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \gamma^3 \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - mc \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Psi = 0. \quad (3.31)$$

De nul aan de rechterkant van het = teken moet hier als 4×4 matrix worden gelezen met allemaal nullen als elementen (zie formule 3.29.) Het blijkt dat de

totale verzameling van oplossingen voor deze vergelijking precies hetzelfde is als wanneer we een $+$ teken hadden gekozen voor de mc term. De golffunctie Ψ kan hier worden opgevat als een vector met 4 componenten, in totaal beschrijft de Dirac vergelijking dan vier simultane vergelijkingen voor de vier componenten van Ψ . Het blijkt dat Ψ niet precies de transformatie eigenschappen heeft van een vector, maar andere transformatie eigenschappen. De oplossingen Ψ van de Diracvergelijking worden *spinoren* genoemd. De spinoren bevatten vier onafhankelijke componenten. Hiervan worden er telkens twee paar-aan-paar beschouwd als corresponderend deeltje en anti-deeltje. Verder worden de paren beschouwd als deeltjes met halftallige spin, een intern quantumgetal. De twee oplossingen voor een deeltje corresponderen dan met spin $+1/2$ en spin $-1/2$ en voor de anti-deeltjes idem dito.⁶ De oplossing van Dirac leidt dus niet tot eliminatie van anti-deeltjes uit het probleem, maar juist tot nog meer vrijheidsgraden. Achteraf is dat heel gelukkig, want het blijkt dat we alle elementaire materie deeltjes met de Dirac vergelijking moeten beschrijven, omdat ze spin $1/2$ hebben.

Een belangrijk zij-effect van de Klein-Gordon en Dirac beschrijvingen van een relativistisch quantumdeeltje is dat de deeltjesdichtheid niet meer behouden is. In plaats daarvan is de dichtheid van alle deeltjes min alle anti-deeltjes behouden. Dit is een belangrijke observatie die in de praktijk blijkt te kloppen. We kunnen deeltje-anti-deeltje paren maken. In dat geval veranderen zowel de deeltjesdichtheid als de anti-deeltjesdichtheid. De dichtheid aan deeltjes min anti-deeltjes verandert in dat geval echter niet.

⁶Elementaire spin wordt gemeten in eenheden van \hbar . Korthedshalve zullen we deze eenheid weglaten als we over spin en draai-impuls van elementaire deeltjes spreken. Voor onze doeleinden is het alleen interessant of de spin heel- of halftallige is en doet de absolute grootte er niet toe.

Opgaven

- 3.1: Laat zien dat $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ invariant is onder Lorentztransformaties. (Doe dat door een willekeurige Lorentztransformatie toe te passen en te laten zien dat $c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.)
- 3.2: Beredeneer waarom de zogenaamde invariante massa $E^2 - \vec{p}\vec{p} c^2$ ook invariant moet zijn onder Lorentztransformaties.
- 3.3: Beschouw twee deeltjes met $(E_1/c, p_{x1}, p_{y1}, p_{z1})$ en $(E_2/c, p_{x2}, p_{y2}, p_{z2})$ als vierimpulsen. Bereken de invariante massa van het twee deeltjes systeem. Gebruik daarbij dat energie en impuls behouden zijn. Wat zou de betekenis van de invariante massa van het twee deeltjesysteem kunnen zijn?
- 3.4: Leid de oplossingen voor ω van formule 3.22 af door de vlakke golfoplossing van formule 3.21 in te vullen in de Klein-Gordon vergelijking 3.20.
- 3.5: Waarom heeft de Dirac vergelijking 3.31 vier onafhankelijke oplossingen?

Hoofdstuk 4

Interacties: Botsingen en Feynmandiagrammen

Tot nu toe hebben we gekeken naar vrije deeltjes. Dit zijn deeltjes waarvoor relativistisch geldt: $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$. Al bij de Schrödingervergelijking hebben we gezien dat er ook een potentiële energieterm kan zijn in de evolutievergelijking van de golffunctie. Uiteraard kan dat in het relativistische geval voor de Klein-Gordon- en Diracvergelijking ook. De grote vraag is welke potentiële energieterm de krachten om ons heen beschrijft.

Er zijn ons vier krachten bekend:¹

- de elektromagnetische kracht,
- de zwakke kernkracht,
- de sterke kernkracht en
- de zwaartekracht.

Het blijkt nu dat bij elk van deze krachten een symmetrie hoort en dat deze symmetrie verantwoordelijk gedacht kan worden voor de kracht. Deze relatie tussen symmetrie en kracht is de kern van de ijktheorie. Zwaartekracht speelt in de rest van ons verhaal geen rol en dat komt goed uit want de ijktheorie van zwaartekracht is sowieso te moeilijk. We zullen het principe van de ijktheorie demonstreren op het wiskundig simpelste geval, dat van het elektromagnetisme.

¹De kracht overgebracht door het Higgs deeltje is mogelijk op te vatten als een vijfde kracht, maar vaak wordt dit als (kleine) verstoring bij de elektrozwakke krachten gerekend.

Globale symmetrietransformaties

In het voorgaande hebben we gezien dat golffuncties als zodanig niet kunnen worden geobserveerd. Wel kunnen we het kwadraat van de absolute waarde van golffuncties observeren en die interpreteren we als de waarschijnlijkheid dat een deeltje zich op een bepaalde plaats in de ruimte bevindt. Een gevolg hiervan is dat als we de golffunctie met een complexe fase vermenigvuldigen,

$$\Psi \rightarrow e^{i\phi}\Psi, \quad (4.1)$$

we dat niet kunnen observeren. Omdat we ook superposities van golffuncties kunnen hebben is een transformatie die bestaat uit het vermenigvuldigen met een complexe fase alleen onzichtbaar als we alle golffuncties op dezelfde tijd² met dezelfde complexe fase vermenigvuldigen. Bij een dergelijk globale symmetrie hoort altijd een behouden stroom (theorema van Noether.) In dit geval van de complexe fasedraaiing hoort daar de elektrische stroom bij als behouden grootheid.

Locale symmetrietransformaties: ijkvelden

Een symmetrie zoals geschetst in de vorige sectie leidt alleen maar tot invariantie van het systeem als de symmetrietransformatie op de hele ruimte op dezelfde tijd wordt toegepast. Hier kleven twee bezwaren aan. Ten eerste is in relativiteitstheorie helemaal niet duidelijk wat wordt bedoeld met “dezelfde tijd”. Ten tweede zou, om zo’n transformatie werkelijk te orchestreren er informatieuitwisseling moeten zijn met oneindig grote snelheid. Hoe anders zou een deeltje ver weg in het universum weten dat hier een elektron zijn complexe fase heeft veranderd.

Om aan beide bezwaren tegemoet te komen kunnen we de symmetrietransformatie lokaal maken, dat wil zeggen van plaats en tijd afhankelijk maken. Maar hoe houden we de wereld als geheel dan toch invariant onder zo’n “lokale ijktransformatie”? Laten we kijken met behulp van de Dirac vergelijking wat de problemen zijn die we tegenkomen en hoe we ze op kunnen lossen. Beschouw daartoe een vrij deeltje (denk bijvoorbeeld aan een elektron in vacuüm), Ψ , dat aan de Dirac vergelijking voldoet:

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu} - mc\Psi = 0. \quad (4.2)$$

²Hier begeven we ons natuurlijk op glad ijs in een relativistische theorie, want dezelfde tijd voor u en voor mij hoeft niet hetzelfde te betekenen. In een relativistische quantumveldentheorie zijn het niet de golffuncties van deeltjes die we met een fase vermenigvuldigen, maar de deeltjesvelden die altijd de hele ruimte vullen.

We passen nu een locale complexe faseverandering toe op het deeltje:

$$\Psi \rightarrow \Psi'(x^\mu) = e^{i\phi(x^\mu)}\Psi(x^\mu). \quad (4.3)$$

De fase ϕ mag hier afhangen van de plaats en tijd die we samenvatten in de viervector x^μ . Passen we de Diracvergelijking toe op Ψ' dan krijgen we

$$i\hbar e^{i\phi} \gamma^\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} + i\hbar e^{i\phi} \Psi \gamma^\mu \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} - mce^{i\phi} \Psi = 0. \quad (4.4)$$

De term $ie^{i\phi} \Psi \gamma^\mu \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$ is hier duidelijk te veel om de Dirac vergelijking voor Ψ terug te krijgen. Het probleem zit natuurlijk in het nemen van de afgeleide. Om dat te repareren voeren we een hulpveld A_μ in en definiëren daarmee de covariante afgeleide:

$$\frac{D}{Dx^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + iqA_\mu \quad (4.5)$$

Deze substitutie wordt ook wel minimale koppeling genoemd. Als we verder vereisen dat voor het hulpveld A_μ de transformatie onder complexe faseverschuiving wordt gegeven door

$$iqA_\mu \rightarrow iqA'_\mu = iqA_\mu - \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \quad (4.6)$$

Dan compenseert de transformatie van A_μ de extra term die van de afgeleide van de getransformeerde Ψ komt.³

De meer plastische of fysische interpretatie van deze wiskundige constructie is dat het hulpveld dat wordt ingevoerd het elektromagnetische veld is. Een faseverandering van het vrije fermionveld, dat aan de vrije Dirac vergelijking voldoet, gaat nu gepaard met een opleving van het elektromagnetische veld, daar komt immers een extra bijdrage bij door de faseverandering. Deze opleving, excitatie, wordt gezien als een foton, een lichtdeeltje. Dit foton neemt de informatie over de faseverandering van, bijvoorbeeld, het elektron mee de ruimte in. Omdat het foton met de lichtsnelheid gaat is causaliteit gegarandeerd. Er wordt geen informatie verspreid met meer dan de lichtsnelheid. Locaal blijft de fase niet behouden, maar globaal is de informatie over de fase behouden, het elektron draait, maar het foton “weet” ervan en compenseert.

Als zij-effect neemt het foton ook energie en impuls mee. Hierdoor ondergaat het elektron een impulsverandering en dus een kracht. Dit is de elektromagnetische kracht. Dus uit het feit dat we een globale symmetrie locaal hebben gemaakt zien we dat met die symmetrie een kracht correspondeert. In dit geval de elektromagnetische kracht. Een faseverschuiving is de simpelste symmetrietransformatie

³Deze transformatie voor het veld A_μ is gelijk aan de ijktransformatie voor de elektromagnetische potentiaal in de Maxwell theorie van elektromagnetisme.

die we ons kunnen voorstellen. Hier correspondeert in de wiskunde een groep mee die $U(1)$ heet. De groep $U(1)$ heeft als mogelijke representatie alle getallen $e^{i\phi}$ met ϕ een reëel getal. De groepsbewerking is de normale complexe vermenigvuldiging. Het is niet moeilijk te zien dat het product van elk paar elementen van $U(1)$ weer een element van $U(1)$ is.

Het recept om een theorie te maken die lokaal (ijk)invariant is voor $U(1)$ transformaties is dus de “gewone” partiële afgeleide te vervangen door de covariante afgeleide die in formule 4.5 is ingevoerd. Vervolgens kunnen we de Diracvergelijking weer uitwerken met deze substitutie:

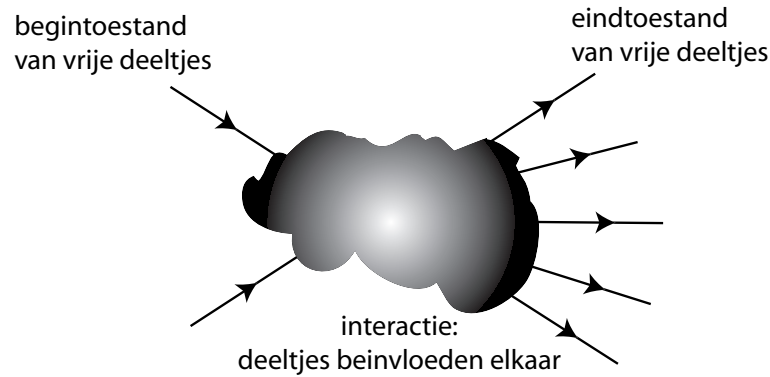
$$i\hbar\gamma^\mu \frac{D\Psi}{Dx^\mu} - mc\Psi = i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu} - mc\Psi - \hbar q\gamma^\mu A_\mu\Psi = 0. \quad (4.7)$$

De term $-\hbar q\gamma^\mu A_\mu\Psi$ is nu nieuw in de vergelijking. Tot nu toe hebben we het nog niet gehad over het symbool q . Dit symbool kunnen we zelf nader bepalen. Het blijkt dat dit de rol speelt van elektrische lading. De waarde van de elektrische lading van elementaire deeltjes is klein en het blijkt verder dat q ervoor zorgt dat de term $-\hbar q\gamma^\mu A_\mu\Psi$ normaal gesproken klein is ten opzichte van de andere termen in de vergelijking.

De theorie van vrije deeltjes die aan de vrije Diracvergelijking voldoen en interacties hebben volgens de interactieterm afgeleid met behulp van de $U(1)$ symmetrie heet *quantumelektrodynamica*, afgekort QED [22].

Feynmandiagrammen

Nu we ontdekt hebben dat de extra term die moet worden ingevoerd om de $U(1)$ symmetrie lokaal te maken klein is ten opzichte van de andere termen in de vergelijking gaan we ertoe over om die term als een *kleine verstoring* te zien van de vrije Dirac vergelijking (dat wil zeggen van de vergelijking zonder de A_μ term.) Het beeld dat we zullen gebruiken is dat deeltjes ver uit elkaar zich als vrije deeltjes gedragen, dat wil zeggen dat hun golffuncties worden beschreven door de vrije Dirac vergelijking 3.31. Als deeltjes bij elkaar in de buurt komen *voelen* zij elkaars aanwezigheid en de mogelijkheid hun fase te veranderen door het uitwisselen van fotonen. Op dat moment is de interactieterm weliswaar nog steeds klein maar wel belangrijk. Dit is schematisch geïllustreerd in figuur 4.1. Om de interactie nu te beschrijven ontwikkelen we de kans op een overgang van de inkomende golffunctie op een andere uitgaande golffunctie als een storingsreeks met oplopende machten van de $-\hbar q\gamma^\mu A_\mu\Psi$ term. Als de term klein is, zal het kwadraat nog kleiner zijn, de derde macht nog kleiner, enz. De nauwkeurigheid van de berekening schaalst dan als het aantal termen in de machtreeks die we meenemen in de berekening. In het elektromagnetisme schalen de opeenvolgende



Figuur 4.1: Schematische voorstelling van een interactie. In dit geval komen er twee deeltjes van links. In een ver verleden zijn die deeltjes ver bij elkaar uit de buurt, voelen elkaar niet, en gedragen zich als vrije deeltjes. Als de deeltjes bij elkaar in de buurt komen voelen ze elkaar. Er kan dan een nieuwe toestand ontstaan, in dit geval met vijf deeltjes aan de rechterkant van het figuur. De vijf deeltjes rechts vliegen uit elkaar en in de verre toekomst zullen ze elkaar niet meer beïnvloeden en gedragen ze zich als vrije deeltjes.

termen in de machtreeks met factoren q^n . We hadden al gezien dat de waarschijnlijkheid als het kwadraat gaat van de golffunctie. De opeenvolgende termen in de storingsreeks voor de processen die we kunnen waarnemen schalen dan ook typisch als $\alpha = q^2/(4\pi) \approx 1/137$. Het symbool α staat hier voor de zogenaamde elektromagnetische koppelingsconstante, ook wel fijnstructuurconstante genoemd. Elke extra term in de machtreeks geeft dus een correctie van de orde van $(1/137)^n$ en de correcties worden heel snel kleiner.

Als een handige manier om met de storingsreeks te rekenen heeft Feynman een grafische representatie uitgedacht die intuïtief aandoet. Aan deze grafische interpretatie zit een vertaling vast die de grafische representatie omzet in een formule die kan worden uitgerekend.⁴ Deze vertaalregels worden de Feynmanregels genoemd. Elke theorie kan zijn eigen Feynmanregels hebben. Het is ook heel goed mogelijk een theorie te maken die niet fysisch is, maar wel consistente Feynmanregels heeft. Het is zelfs mogelijk om allerlei wiskundige, en al dan niet natuurkundige problemen op te lossen met behulp van Feynmanregels.

De Feynmanregels om Feynmandiagrammen te tekenen voor quantum elektrodynamica (QED) worden gegeven in Fig. 4.2. Ook staat in die figuur vermeld welke factoren in de berekening moeten worden gebruikt. De regel is nu dat eerst moet worden gekozen welke deeltjes we in de begintoestand hebben en welke in de eindtoestand. Dan moeten alle diagrammen worden getekend die de deeltjes

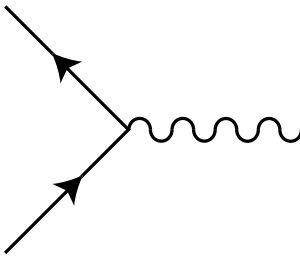
⁴Hoewel dat over het algemeen behoorlijk wat moeite kan kosten.



Fermionlijn: wordt gebruikt voor spin 1/2 deeltjes. Voor inkomende fermionen wordt een factor $u(p, s)$ gerekend, voor inkomende anti-fermionen een factor $v(p, s)$. Uitgaande fermionen zijn hetzelfde als inkomende anti-fermionen en uitgaande anti-fermionen zijn hetzelfde als inkomende fermionen. Voor fermion propagatoren, lijnen tussen twee vertices, wordt een factor $i(\gamma^\mu p_\mu + m)/(p^2 - m^2)$ of $i(\gamma^\mu p_\mu - m)/(p^2 - m^2)$ gebruikt al naar gelang het om een fermion of anti-fermion gaat. Hier is telkens p de vierimpuls, m de massa en s de spin van het (anti-)fermion.



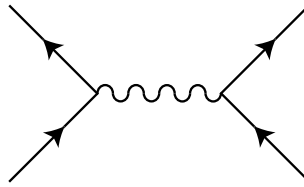
Fotonlijn: wordt gebruikt voor fotonen. Voor inkomende en uitgaande fotonen wordt een factor ϵ^μ gebruikt, die de polarisatie van het foton aangeeft. Voor foton propagatoren, fotonlijnen tussen twee vertices, wordt een factor $(g^{\mu\nu})/(p^2 - m^2)$ gebruikt.



QED vertex: interactie van een (anti-)fermion en een foton. Voor elke QED vertex wordt een factor $iq\gamma^\mu$ gerekend, met $q^2/(4\pi) \approx 1/137$. De vertex kan worden gelezen als een foton dat splitst in een fermion en anti-fermion (paarproductie, van rechts naar links), een anti-fermion die samen met een fermion combineert tot 1 foton (annihilatie, van links naar rechts), een fermion dat een foton uitzendt en dan doorgaat als fermion (van onder naar boven), of een anti-fermion dat een foton uitzendt en dan doorgaat (van boven naar beneden) als anti-fermion.

Figuur 4.2: Feynmanregels voor quantum elektrodynamica (QED).

in de inkomende toestand verbinden met die in de uitgaande toestand. Hierbij mogen alleen de elementen uit Fig. 4.2 worden gebruikt. In het algemeen is het voldoende om alleen die diagrammen te tekenen met zo min mogelijk vertices en interne lijnen. Elke vertex drukt de uitkomst met een factor ter grootte van de koppelingsconstante (die klein hoort te zijn ten opzichte van 1.) Elke interne lijn waarvoor de invariante massa van de vierimpuls ongelijk is aan de rustmassa van het betreffende deeltje onderdrukt de uitkomst verder, vaak met een grote factor. Als een invariante massa van een deeltje dat correspondeert met een interne lijn



Figuur 4.3: Feynmandiagram voor een proces waarin een fermion en anti-fermion aan de linkerkant binnenkomen en annihileren in een foton, dat vervolgens een fermion en anti-fermion paar creëert in een vertex aan de rechterkant. De inkomende en uitgaande fermionen hoeven niet hetzelfde te zijn. Het fermion en anti-fermion van één vertex moeten wel bij elkaar horen. Dit Feynmandiagram is bijvoorbeeld het laagste orde diagram voor het proces $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

onverhoopt wel (bijna) gelijk wordt aan de rustmassa van dat deeltje, dan kan de propagatorfactor groot worden. In dat geval spreken we van een resonantie. Deze diagrammen zijn vaak wel belangrijk en zelfs dominant! Over de mogelijke vierimpulsen van alle interne lijnen moet worden geïntegreerd. Deze zijn immers niet observabel en we moeten alle mogelijkheden meenemen. Verder wordt er met een wiskundige truc voor gezorgd dat er vier impulsen behoud is bij elke vertex en daardoor automatisch ook van begin- naar eindtoestand.

Een voorbeeld van een Feynmandiagram staat in Fig. 4.3. Dit Feynmandiagram kan van links naar rechts worden gelezen, waarbij er een elektron en positron aan de linkerkant inkomen. Het elektron en positron annihileren tot een foton dat aan de rechterkant in een vertex een muon en anti-muon paar maakt.

De vertaling van een Feynmandiagram in een formule geeft de overgangsamplitude. De absolute waarde van de overgangsamplitude in het kwadraat geeft de overgangswaarschijnlijkheid tussen de gekozen begintoestand en eindtoestand. In het geval er meerdere Feynmandiagrammen in de berekening moeten worden betrokken worden de amplitudes eerst opgeteld en daarna het kwadraat van de absolute waarde van de amplitudesom genomen. Hierdoor kunnen verschillende Feynmandiagrammen met dezelfde begin- en eindtoestand interfereren.

Voor vrije deeltjes zijn alle mogelijke quantumgetallen behouden. Of die quantumgetallen ook behouden zijn in een interactie hangt af van de storingsterm. In het algemeen zijn in verschillende soorten interactie verschillende quantumgetallen behouden. Sommige quantumgetallen zijn in alle reacties behouden, sommige anderen in geen enkele reactie. Het identificeren welke quantumgetallen in welk soort interactie behouden zijn zal belangrijk blijken als we de verschillende interacties gaan bestuderen. We zullen daar dus later uitgebreid op terugkomen.

Vervalsbreedte en Werkzame doorsnede

De overgangswaarschijnlijkheid die in de vorige sectie is gegeven is niet altijd een goed hanteerbare observabele. In de elementaire deeltjesfysica werken we veel met twee meetbare grootheden: de vervalsbreedte en de werkzame doorsnede.

De vervalsbreedte van een deeltje is een maat voor de waarschijnlijkheid dat het deeltje in een aantal andere deeltjes uiteen valt. Als we beginnen N deeltjes te bestuderen, dan zal het aantal deeltjes dat in een tijdje dt vervalt gelijk zijn aan de kans dat een deeltje vervalt, Γ , maal het aantal deeltjes dat we hebben maal de lengte van het tijdje dat we beschouwen:

$$dN = -\Gamma N dt. \quad (4.8)$$

Het minteken wordt hier geïntroduceerd omdat bij verval het aantal deeltjes N afneemt. Deze differentiaalvergelijking is makkelijk op te lossen en geeft:

$$N(t) = N_0 e^{-\Gamma t} = N_0 e^{-t/\tau}. \quad (4.9)$$

Hierin noemen we Γ de vervalsbreedte en $\tau = 1/\Gamma$ is de vervalstijd van het deeltje. N_0 is het aantal nog niet vervallen deeltjes op tijd $t = 0$. De vervalsbreedte voor een proces met een deeltje 1 dat vervalt in een deeltje 2 en 3 kunnen we uitrekenen en is proportioneel aan de overgangswaarschijnlijkheid $|\mathcal{M}|^2$, waarbij \mathcal{M} de overgangsamplitude is die met de Feynmandiagrammen correspondeert:

$$d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) \frac{dp_2}{(2\pi)^3 E_2} \frac{dp_3}{(2\pi)^3 E_3}. \quad (4.10)$$

Behalve de overgangswaarschijnlijkheid moeten dus ook het vierimpulsbehoud (dat is de δ -functie), de flux factor ($1/(2E)$) en de faseruimte (de integralen over p_2 en p_3) in rekening worden gebracht. Formule 4.10 staat bekend als de gulden regel van Fermi voor de vervalsbreedte.

Voor deeltjesbotsingen tussen twee deeltjes, waarin mogelijk meerdere deeltjes worden geproduceerd, kan een dergelijke observabele grootheid worden gedefinieerd, de werkzame doorsnede. De werkzame doorsnede wordt gedefinieerd door het effectieve oppervlak dat een deeltje ziet dat aan een ander deeltje wordt verstrooid. In formulevorm kunnen we het aantal verstrooide deeltjes uitdrukken als:

$$N_{\text{verstrooid}} = \frac{N_{\text{inkomend}} N_{\text{doel}}}{A} \sigma_{\text{tot}} = \int_{-\infty}^{+\infty} L dt \sigma_{\text{tot}}. \quad (4.11)$$

Hierin zijn N_{inkomend} en N_{doel} het aantal inkomende deeltjes per oppervlakte A en het aantal deeltjes in het doel in hetzelfde oppervlakje. In deze vergelijking is σ_{tot} gedefinieerd als de totale werkzame doorsnede. De informatie over het aantal

inkomende en doeldeeltjes per oppervlakte en per tijdseenheid is bepaald door de experimentele condities en wordt de luminositeit, L , genoemd. De luminositeit, geïntegreerd over de tijd, maal de werkzame doorsnede geeft weer het totaal aantal verstrooide deeltjes.

De werkzame doorsnede wordt in de theorie gegeven door:

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - \sum_i p_i) \prod_i \frac{dp_i}{(2\pi)^3 E_i}. \quad (4.12)$$

Deze formule heet de gulden regel van Fermi voor botsingen.

De berekening van vervalsbreedtes en werkzame doorsneden is doorgaans een moeizame affaire. Wij zullen dat hier dan ook terzijde schuiven. Met de basiskennis van hoe we ze zouden kunnen berekenen en een aantal resultaten van berekeningen die al zijn uitgevoerd kunnen we verder goed uit de voeten.

Een voorbeeld: e^+e^- verstrooiing bij LEP

Bij de Large Electron Positron (LEP) botsen bij CERN zijn van 1989 tot 2000 botsingen van een elektron (e^-) en positron (e^+) bestudeerd. De laagste orde Feynman diagrammen voor dit verstrooiingsproces zijn gegeven in Fig. 4.4. Diagram 4.4(a) heet het t-kanaal. In het t-kanaal kunnen fotonen (γ) and Z-deeltjes worden uitgewisseld. Het uitgewisselde deeltje geeft als propagator in het matrix element een factor:

$$\frac{1}{q^2 + M^2}, \quad (4.13)$$

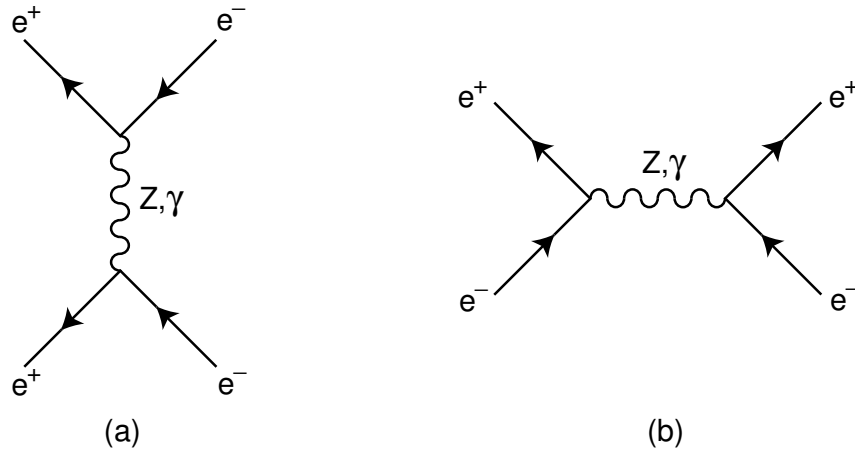
waarbij q^2 het kwadraat van de invariante massa van de uitgewisselde vier-impuls is en tot de massa van het uitgewisselde deeltje. Het proces blijkt een sterke voorkeur te hebben om deeltjes met $q^2 = -$ uit te wisselen. Voor het Z-deeltje wordt de propagator factor door:

$$\frac{1}{M_Z^2} \quad (4.14)$$

En voor de werkzame doorsnede betekent dat een factor $1/M_Z^4$. Met $M_Z = 91 \text{ GeV}$ ⁵ betekent dat een onderdrukking met een factor 6.5×10^6 . Voor het massalose foton wordt de propagator factor:

$$\frac{1}{q^2}, \quad (4.15)$$

⁵De energiemaat die in de deeltjesfysica wordt gebruikt is de elektronvolt, eV. Dit is de kinetische energie die een elektron krijgt als die met een potentiaal verschil van 1 volt wordt versneld. $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ Joule}$. 1 GeV (giga elektron volt) $= 1.6 \times 10^{-19}$ massa wordt dan uitgedrukt in V/c^2 . $M_Z = 91 \text{ GeV}/c^2$ is net iets lichter dan 1 ijzeraatoom.



Figuur 4.4: Feynman diagrammen voor elektron-positron verstrooiing op de laagste orde in storingstheorie. (a) is het t kanaal, (b) is het s kanaal diagram.

en die wordt juist heel groot voor $q^2 \rightarrow 0$. Bij $q^2 \rightarrow 0$ wordt bijna geen impuls uitgewisseld en het elektron en positron worden dus voorwaarts (in de richting waarin ze aankwamen) verstrooid. De werkzame doorsnede voor deze voorwaartse verstrooiing is heel groot. De werkzame doorsnede voor dit proces, dat omdat de invloed van de Z verwaarloosbaar is een puur QED proces is is zeer nauwkeurig berekenbaar. In het experiment wordt het tellen van de voorwaartse verstrooiingen dan ook gebruikt om de luminositeit te meten:

$$L = \frac{N_{\text{voorwaarts}}}{\sigma_{\text{voorwaarts}}}, \quad (4.16)$$

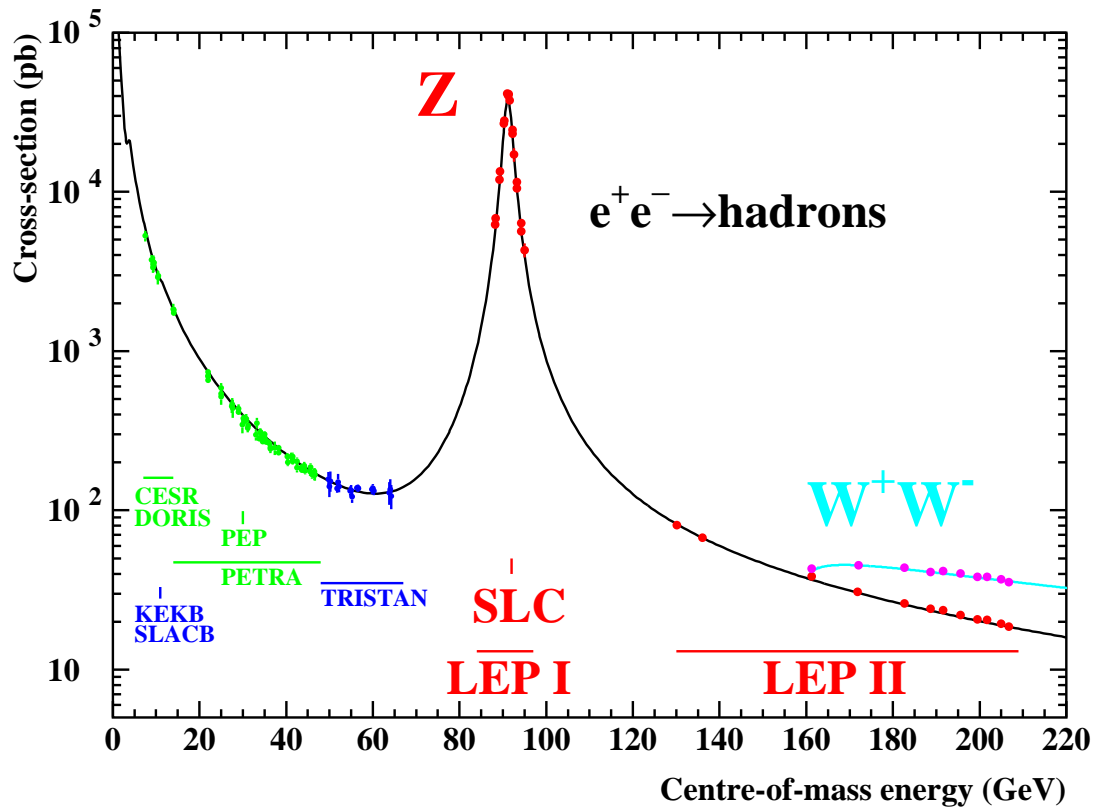
waarbij $G_{\text{voorwaarts}}$ dus precies uit de theorie bekend is en het aantal voorwaartse verstrooiingen, $N_{\text{voorwaarts}}$, in het experiment wordt geteld.

In het tweede diagram, Fig. 4.4(b), is de propagator factor:

$$\frac{1}{q^2 - M^2}. \quad (4.17)$$

Het relatieve teken van q^2 is tegengesteld geworden doordat het diagram een kwartslag is gedraaid. Dit heeft als gevolg dat de propagator factor groot kan worden voor fotonen als $q^2 \rightarrow 0$, maar ook voor Z -deeltje uitwisseling als $q^2 \rightarrow M_Z$. In dit geval is q^2 precies het kwadraat de invariante massa van de inkomende e^+ en e^- . Deze invariante massa in het kwadraat, ook wel s ($s = q^2$) genoemd,⁶ kan in het experiment worden gevarieerd door de botsingsenergie voor e^+ en e^-

⁶Vandaar dat diagram 4.4(b) ook wel het s -kanaal diagram wordt genoemd.



Figuur 4.5: Werkzame doorsnede voor elektron-positron verstrooiing als een functie van de invariante massa van het elektron-positron paar dat botst.

aan te passen. De invariante massa wordt gegeven door (als we de elektron en positron massa verwaarlozen):

$$\sqrt{s} = 2E, \quad (4.18)$$

als het elektron en positron elk met een energie E frontaal op elkaar botsen. De meting van de totale werkzame doorsnede voor e^+e^- verstrooiing als functie van \sqrt{s} is gegeven in Fig.4.5. De foton-piek bij $\sqrt{s} = 0$ en de Z piek bij $\sqrt{s} = M_Z$ zijn duidelijk te zien. In het volgende hoofdstuk komen we nog nader op deze interactie terug.

Opgaven

- 4.1: Behalve de $U(1)$ symmetrie voor de complexe fase van golffuncties, is natuurlijk ook de groep van Lorentztransformaties een symmetriegroep (de wereld is invariant onder Lorentztransformaties.) Bedenk welke interactie er bij de lokale ijsymmetrie van Lorentztransformaties hoort.
- 4.2: Teken het laagste orde Feynmandiagram voor de verstrooiing van twee elektronen aan elkaar. Teken ook de volgende orde Feynmandiagrammen voor dit proces.
- 4.3: Probeer een Feynmandiagram te tekenen voor een proces met twee (anti-)fermionen die inkomen en drie (anti-)fermionen die uitgaan. De keuze voor fermion en anti-fermion mag voor elke externe lijn anders zijn. Waarom lukt dit niet?
- 4.4: Probeer een Feynmandiagram te tekenen voor een proces met twee fermionen die inkomen en twee anti-fermionen die uitgaan. Waarom lukt dat niet?
- 4.5: Bedenk waarom het belangrijk is om een grote luminositeit te bewerkstelligen voor botsingsexperimenten en hoe we die hoge luminositeit kunnen krijgen.

Hoofdstuk 5

Het Standaard Model: Ons begrip van elementaire deeltjes

Wat er allemaal is en hoe we dat weten

Het Standaard Model van de elementaire deeltjesfysica ¹ beschrijft alle elementaire deeltjes die we kennen en drie van de vier interacties die deze deeltjes kunnen ondergaan: de elektromagnetische kracht, de zwakke kernkracht en de sterke kernkracht. De vierde interactie, de zwaartekracht, wordt niet door het Standaard Model beschreven. In theorie is het tot nu toe onmogelijk gebleken een goede beschrijving van alle vier de krachten tegelijk in één theorie te geven. In de praktijk maakt dat niet veel uit, omdat in alle experimenten waarin de elektromagnetische kracht, zwakke en sterke kernkracht een rol spelen, de zwaartekracht juist helemaal geen rol speelt.

De elementaire deeltjes die we nu kennen vallen uiteen in twee groepen naar gelang de spin die ze hebben. Er zijn spin $1/2$ deeltjes, de materiedeeltjes, die door de Diracvergelijking worden beschreven, en er zijn spin 1 deeltjes, krachtdeeltjes, die door een ietwat gemodificeerde vorm van de Klein-Gordonvergelijking worden beschreven. Een apart geval is nog één spin 0 deeltje in het Standaard Model, het Higgs boson. Het Higgs boson is verantwoordelijk voor de beschrijving van de massa van deeltjes in het Standaard Model. Hoewel, zeer interessant, gaan we hier niet verder op de rol van het Higgs deeltje in.

In tabel 5.1 zijn alle bekende fermionen gegeven. De fermionen vallen weer uiteen in twee klassen. De quarks ondergaan de sterke kernkracht, en de leptonen

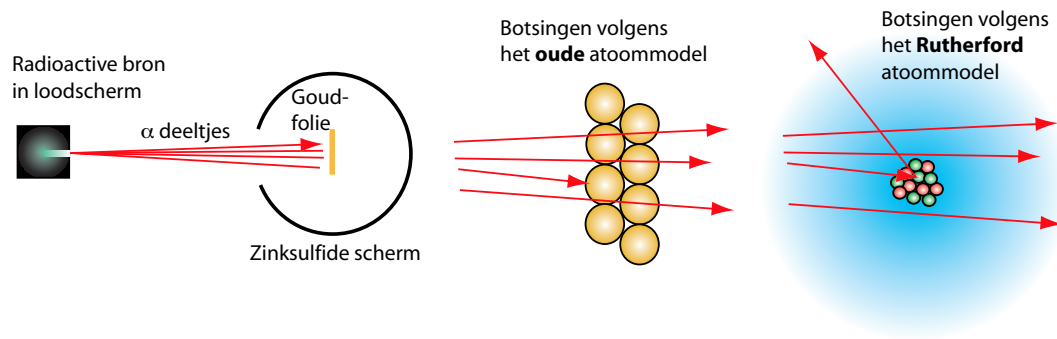
¹De woorden “Standaard Model” blijken in de praktijk voor subsidies en dergelijke tegen ons te werken. Politici en beleidsmakers hechten meer belang aan zaken met titels als “Theorie van Alles” of “Super Symmetrie”. Dat laat onverlet dat het Standaard Model een van de meest succesvolle theorieën aller tijden is.

				Q	T_3	C
quarks	u_r	c_r	t_r	+2/3	+1/2	r
	u_g	c_g	t_g	+2/3	+1/2	g
	u_b	c_b	t_b	+2/3	+1/2	b
	$m \approx 4 \text{ MeV}$	$m \approx 1.4 \text{ GeV}$	$m \approx 177 \text{ GeV}$			
	d_r	s_r	b_r	-1/3	-1/2	r
	d_g	s_g	b_g	-1/3	-1/2	g
	d_b	s_b	b_b	-1/3	-1/2	b
	$m \approx 8 \text{ MeV}$	$m \approx 150 \text{ MeV}$	$m \approx 4.5 \text{ GeV}$			
leptonen	ν_e	ν_μ	ν_τ	0	+1/2	0
	$m < 3 \text{ eV}$	$m < 0.19 \text{ MeV}$	$m < 18 \text{ MeV}$			
	e	μ	τ	-1	-1/2	0
	$m = 511 \text{ keV}$	$m = 106 \text{ MeV}$	$m = 1.78 \text{ GeV}$			

Tabel 5.1: *Fermionen in het Standaard Model. Q is de elektrische lading, die de sterkte bepaalt van de elektromagnetische interactie. T_3 is de derde component van de zwakke isospin, die het gedrag onder de zwakke wisselwerking regelt. Onder elk fermion staat ook de massa (bij benadering) gegeven. Intussen is ontdekt dat de neutrinomassa's groter dan nul zijn, terwijl hier alleen de bovengrens staat gegeven. Al deze fermionen hebben een corresponderend anti-fermion, met dezelfde massa, maar met alle quantumgetallen Q , T_3 en C tegengesteld (Voor Q en T_3 klappt het teken om in dat geval terwijl de tegengestelden van de quantumgetallen r , g , en b worden gegeven door \bar{r} (anti- r), \bar{g} (anti- g) en \bar{b} (anti- b)). De massa's staan uitgedrukt in energieeenheden, waarbij 1 eV gelijk is aan $1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ en de gebruikelijke SI voorvoegsels voor kilo (k), Mega (M , een miljoen) en Giga (G , een miljard) worden gebruikt.*

ondergaan de sterke kernkracht niet. Alle fermionen van het Standaard Model ondergaan de zwakke kernkracht. Bijna alle Standaard Model fermionen ondergaan ook de elektromagnetische kracht. De uitzonderingen zijn de neutrino's die elektrisch neutraal zijn. Neutrino's zijn leptonen en ondergaan dus alleen de zwakke kernkracht.

In de tabel staan de elektrische lading Q , de zwakke lading T_3 en de sterke lading C vermeld, tezamen met de massa van de verschillende fermionen. Wat zou moeten opvallen in de tabel is de regelmaat van het patroon van Q , T_3 en C in verticale richting. Deze regelmaat geeft de structuur van de elektromagnetische en de zwakke en sterke kernkracht weer. Er is ook een grote regelmaat in de horizontale richting. In feite herhaalt het patroon van quarks en leptonen zich drie keer. Deze drievoud zal van groot belang blijken als we in de komende hoofdstukken CP-schending gaan beschouwen.



Figuur 5.1: *Rutherford verstrooiingsexperiment. In de linker afbeelding is geïllustreerd hoe een bundel van alfa deeltjes uit een radioactieve bron op een trefplaatje wordt geschoten. Rond het trefplaatje staat een scherm van zinksulfide dat oplicht als er een alfa deeltje op botst. Door te kijken waar het scherm oplicht kan de verstrooiingshoek worden gemeten. In de middelste afbeelding staat een illustratie van het idee hoe goudatomen in het folie zijn gestapeld volgens het oude atoommodel. Omdat de meeste alfa deeltjes rechtdoor gaan heeft ieder goudatoom kennelijk een hele luchtige (in dit geval is vacuüm-achtige een beter woord) structuur. In de rechter afbeelding staat schematisch een atoom in de visie van Rutherford. Af en toe botst er een alfa deeltje op een atoomkern en verstrooit dan onder een grote hoek. De meeste alfa deeltjes vliegen door de elektronenwolk rond de kern en worden niet of nauwelijks afgebogen.*

De ontdekking van het elektron staat op naam van J. J. Thomson [11] en is hiervoor al besproken. De ontdekking van de kerndeeltjes proton en neutron staat op naam van Rutherford. Twee van zijn medewerkers, Geiger en Marsden [24] schoten in 1909 met alfa deeltjes (dat zijn Helium kernen, maar dat wisten zij nog niet) op een metalen trefplaatje en ontdekten dat de meeste alfa deeltjes rechtdoor vliegen, alsof het materiaal grotendeels uit niets bestaat, maar dat soms deeltjes over een hele grote hoek worden afgebogen, alsof er harde pitjes in het verder vrijwel afwezige materiaal zitten. Rutherford verklaarde dit gedrag door atomen voor te stellen als een kleine kern die positief is geladen met daaromheen op een luchtige manier de elektronen [23]. Een illustratie van het befaamde “Rutherford experiment” is gegeven in figuur 5.1. In 1919 laat Rutherford door verstrooiing aan waterstof atomen het bestaan van het proton zien [25].

Het neutron werd kort daarna door Rutherford in 1920 voorspeld [26], maar pas in 1932 door Chadwick ontdekt [27]. Chadwick was op het idee van zijn experiment gekomen door een observatie van Bothe en het echtpaar Joliot-Curie, die beiden vreemde effecten zagen als een Beryllium trefplaatje door alfa straling werd gebombardeerd. Chadwick deed zijn eigen experiment dat bestond uit het

bombarderen van Beryllium met alfa deeltjes, waarna hij neutrale straling zag. Vervolgens plaatste hij verschillende tweede doelen na het trefplaatje gevolgd door een ionisatie teller. Op die manier vond hij dat de neutrale straling in het tweede doel protonen uit het materiaal sloeg. Zijn redenering was dat de neutrale deeltjes die uit het Beryllium plaatje komen geen fotonen kunnen zijn, maar een massa moeten hebben die vergelijkbaar is met die van het proton.

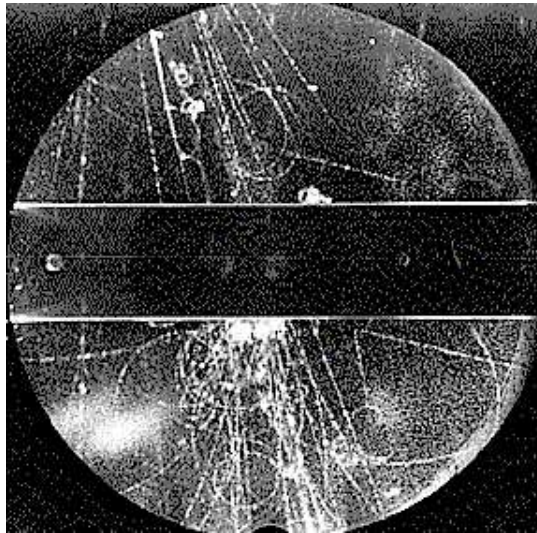
Het bestaan van het neutrino is gededuceerd uit radioactief bèta verval. Een mogelijke reactie in bèta verval is een neutron dat in een proton en een elektron verval. Dat wil zeggen dat als eindproducten van dit verval alleen het proton en het elektron worden gezien. Hier zijn twee problemen mee. Als het neutron, het proton en het elektron allen spin $1/2$ deeltjes zijn kan in deze reactie de draai-impuls of de spin niet behouden zijn. Draai-impuls van deeltjes om elkaar kan wel het verdwijnen of verschijnen van spin compenseren, maar die ruimtelijke draai-impuls bestaat alleen maar in eenheden van 1. In het bèta verval is duidelijk een spin $1/2$ verschil. Een tweede observatie is dat het energiespectrum van het elektron uit bèta verval niet scherp is bepaald zoals uit een twee deeltjesreactie verwacht kan worden, maar een verdeling volgt met een moeilijk te bepalen eindpunt waar de verdeling uitdooft. In 1930 stelde Pauli een extra elektrisch neutraal deeltje voor dat in het bèta verval wordt geproduceerd. Dit moet dan een spin $1/2$ deeltje zijn, elektrisch neutraal zijn, en het moet bijna geen interactie met materiaal hebben, anders was het wel waargenomen. In 1933 formaliseerde Fermi het bèta verval als het verval van een neutron in een proton, een elektron en een neutrino, zoals hij het nieuwe deeltje voor de eerste keer noemde. Het neutrino² werd uiteindelijk door detectie aangetoond in 1955 door Reines en Cowan en medewerkers in een experiment bij de kernreactor van Savannah River [28]. Zij toonden de inverse bèta vervalsreactie aan, waarbij een anti-neutrino op een proton botst en daarbij een neutron en een positron maakt.

Het proton, neutron en elektron zijn in feite alles wat nodig is om de samenstelling van het periodiek systeem der elementen te verklaren. De toevoeging van het neutrino was alleen maar nodig om het zwakke radioactieve bètaverval te kunnen beschrijven.

De andere twee kolommen van deeltjes zijn dan ook een verrassing, zeker op het moment dat die deeltjes werden ontdekt. Het eerste deeltje dat is ontdekt uit de tweede kolom is het muon in kosmische stralingsexperimenten door Street en Stevenson [29]. Dit gebeurde in de analyse van nevelkamer foto's.

Later werd het tweede deeltje uit de tweede kolom ontdekt, het s-quark. Deeltjes die een s-quark bevatten vielen op in experimenten doordat er kennelijk deeltjes waren die makkelijk te produceren waren (wat duidt op productie met de

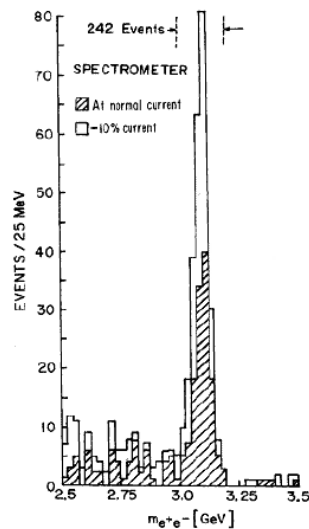
²Door sommigen wordt het neutrino ook wel vampierdeeltje genoemd. Het neutrino heeft namelijk geen spiegelbeeld. We komen daarop later terug.



Figuur 5.2: Afbeelding van de detectie van een vreemd meson. Dit deeltje is rechts onder de middenplaat in de detector te zien als een grote omgekeerde V. Het neutrale deeltje dat in twee geladen deeltjes vervalt is kennelijk een stuk boven de plaat geproduceerd in de interactie waaruit meerdere sporen komen. De vervalslengte is dus aanzienlijk.

sterke kernkracht) en die heel langzaam vervallen (wat duidt op verval door middel van de zwakke kernkracht.) Deze deeltjes, ontdekt door Rochester en Butler werden in het begin “V particles” genoemd [30] en later “vreemd”, in het Engels “strange”, vandaar het symbool s voor deze quarks. In het volgende hoofdstuk zullen we uitgebreid terugkomen op deze vreemde deeltjes, waarvan kaonen voorbeelden zijn. Een van de platen die aanleiding gaf tot de ontdekking van vreemde deeltjes, deeltjes met s quarks, is te zien in Fig. 5.2. Het vreemde gedrag van deze deeltjes, die kennelijk makkelijk worden geproduceerd en slechts moeizaam vervallen is in 1952/1953 verklaard door Pais [31] en Gell-MannMurray Gell-Mann, die de hypothese van de paarproductie opperde. Hierbij worden vreemde deeltjes in paren van deeltje en anti-deeltje in de sterke interactie gemaakt, terwijl ze, eenmaal uit elkaar gevlogen, alleen maar via de zwakke wisselwerking in lichtere hadronen kunnen vervallen.

Het muon neutrino is ontdekt, of in ieder geval voor het eerst waargenomen, in 1962 door Lederman, Steinberger en Schwartz [32]. Dit gebeurde in een experiment aan de Brookhaven Alternate Gradient Synchrotron, een versneller die protonen versnelde tot 15 GeV. De protonen werden vervolgens op een Beryllium trefplaatje geschoten. In de botsing van een proton op een Beryllium kern worden onder andere pionen en kaonen gevormd. De pionen vervallen dominant in een



Figuur 5.3: *Invariant mass spectrum van muon paren van tegengestelde lading in het experiment van Ting et al. De scherpe piek bij 3.1 GeV wijst op een nieuw deeltje, de J/ψ .*

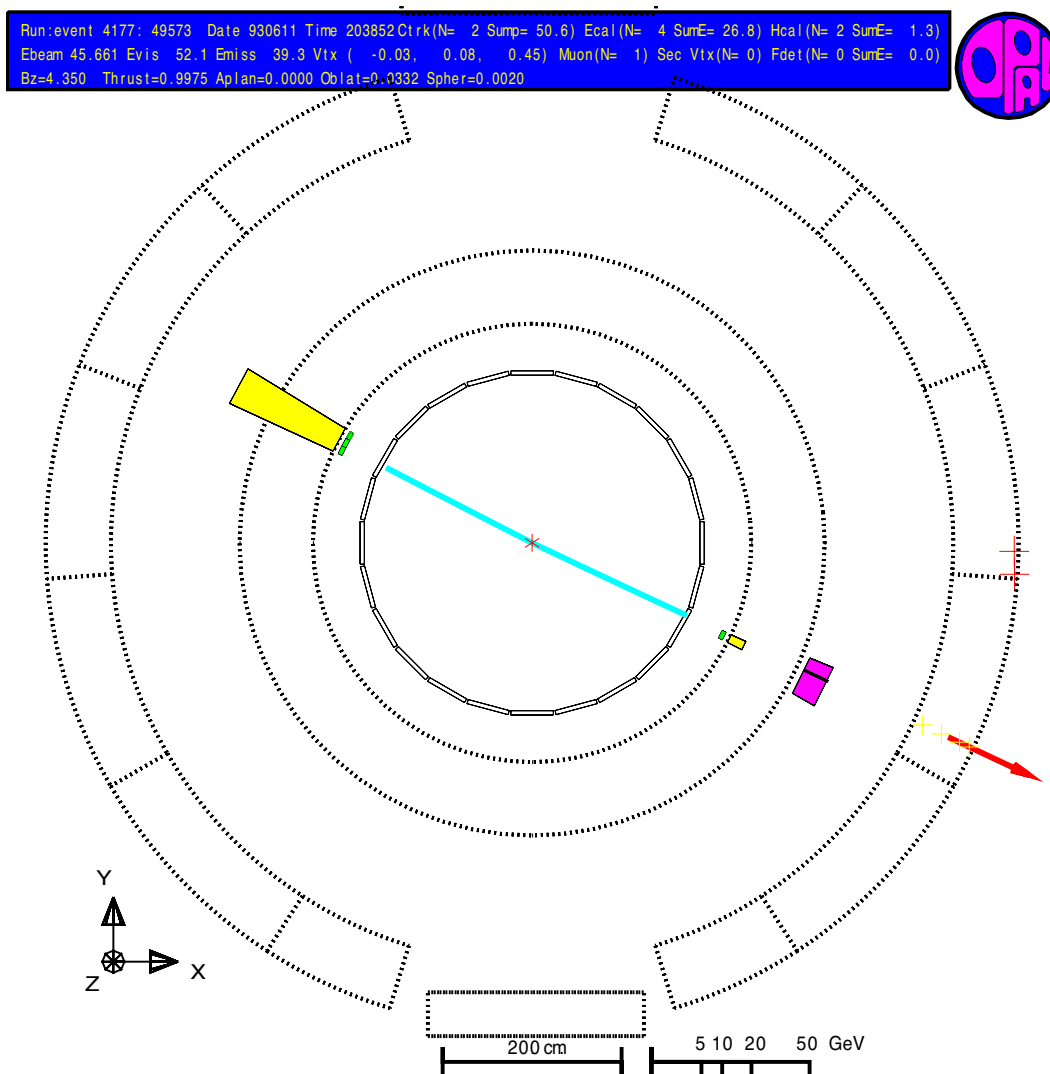
muon en een muon-neutrino. De vervals producten werden op een ijzeren muur van 13.5 m gestuurd, met achter de muur het eigenlijke experiment. De ijzeren muur absorbeerde alle deeltjes die werden geproduceerd, behalve de neutrino's. Om vervolgens een beetje kans te hebben dat er af en toe een neutrino in het experiment een reactie aangaat is een detector nodig met veel materiaal. In dit geval was dat een 10 ton aluminium vonkenvat. In een vonkenvat veroorzaken geladen deeltjes vonken als ze door het gas gaan tussen de metalen platen, omdat de metalen platen op een dusdanig hoge spanning ten opzichte van elkaar staan dat ze net geen elektrische doorslag geven. Vliegt er een geladen deeltje door het gas die het gas een beetje ioniseert dan is het meteen raak met een flinke doorslag en een vonk. Af en toe gaat een muon-neutrino in de detector een reactie aan waarbij een muon wordt gevormd. Dit muon heeft dan weer de speciale eigenschap dat het in de zware detector een lang spoor maakt en niet snel door het materiaal wordt gestopt. Alle andere geladen deeltjes worden al na korte afstand door de zware detector geabsorbeerd. Het verschijnen van de muonen toonde aan dat het in dit geval om muon-neutrino's ging en niet om andere zwak wisselwerkende neutrale deeltjes.

De tweede kolom wordt gecompleteerd door de ontdekking van het c-quark. Het c-quark is ontdekt door de detectie van het J/ψ deeltje, onafhankelijk in twee verschillende experimenten door Richter [33] en Ting [34] in 1974. Het J/ψ deeltje bevat een c- en een \bar{c} -quark en vervalt relatief langzaam in bijvoorbeeld

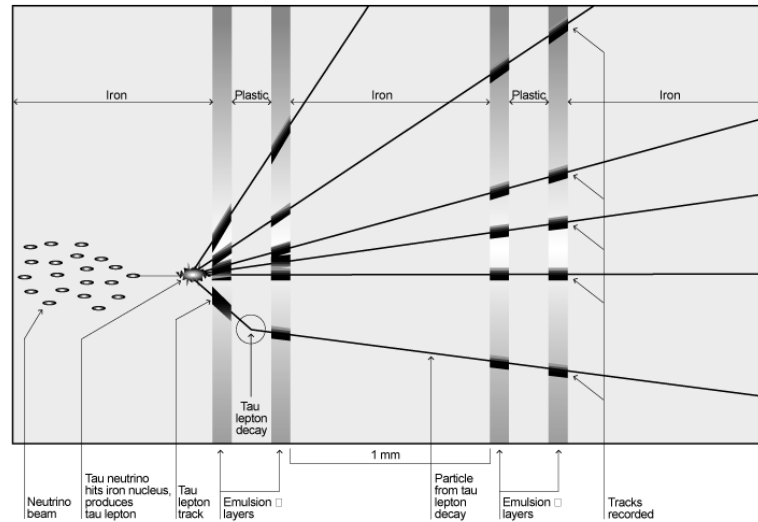
elektron-positron paren en muon paren van tegengestelde lading. In Fig. 5.3 is de invariante massa te zien van muon paren met tegengestelde lading in het experiment met botsende hadronen van Ting. Aan de andere kant is de productie in botsingen tussen elektronen en positronen zeer abundant, als die precies botsen met de energie die nodig is om een J/ψ te maken. Het c-quark werd al voorspeld door Glashow, Iliopoulos en Maiani. Deze voorspelling staat bekend als het GIM mechanisme [35]. De voorspelling komt erop neer dat op dat moment de structuur van de zwakke wisselwerking werd doorzien en dat in het schema van tabel 5.1 er dan een lege plek is boven het s-quark die ingevuld moet worden om de tabel mooi symmetrisch te maken.

Het vinden van deeltjes in de derde kolom in tabel 5.1 was wederom een verrassing. Het begon weer met het geladen lepton, in dit geval het τ -lepton. Dat is in 1974 ontdekt door Perl in hetzelfde experiment waarin ook door Richter het J/ψ deeltje was ontdekt [36]. In dit geval waren er paren van een elektron (of positron) en een muon van tegengestelde lading in de eindtoestand. Omdat een elektron en een muon niet in een paar kunnen worden geproduceerd duidde dat op de productie van een deeltjespaar dat zowel in een elektron als in een muon kan vervallen. Omdat bekend was dat een muon in een elektron kan vervallen (zij het na een relatief lange levensduur, zodat dat vrijwel altijd buiten de detector gebeurt) lag het voor de hand om een nieuw, zwaarder lepton in te voeren dat zowel naar een muon als naar een elektron kan vervallen. Dit lepton werd het τ -lepton genoemd. Het τ -lepton heeft een massa die niet te veel verschilt van die van het c-quark, hetgeen verklaart dat hetzelfde experiment deze twee formidabele ontdekkingen kon doen in een zeer korte tijdspanne. Een voorbeeld van zo'n spectaculair geval met alleen een elektron en een muon in de eindtoestand bij een van de LEP experimenten is gegeven in Fig. 5.4.

Tegen die tijd had men wel in de gaten dat bij elk lepton zijn eigen neutrino hoort. Het heeft echter tot 2001 geduurd voordat het tau-neutrino ook daadwerkelijk is gedetecteerd door de DONUT collaboratie [37]. Het principe van de detectie van het tau neutrino is weergegeven in Fig. 5.5. In een neutrino bundel zitten over het algemeen ook een aantal tau-neutrino's (omdat er ook tau-leptonen worden gemaakt in hoge energie botsingen.) Een tau-neutrino heeft slechts zelden een interactie met materiaal. Als het een reactie heeft is de kans groot dat er een geladen tau-lepton wordt gevormd. Tau-neutrino's zijn de enige bron voor de vorming van tau-leptonen in neutrino bundels, dus als er een tau-lepton wordt gevonden wijst dat met een zekerheid grenzende waarschijnlijkheid op een inkomend tau-neutrino. De geladen tau-leptonen worden herkend aan het feit dat ze binnen enkele millimeters vervallen, normaal gesproken in één geladen spoor (en twee onzichtbare neutrino's.) Door nu te zoeken naar sporen met de voor dit verval karakteristieke knik, zoals te zien is in het onderste spoor



Figuur 5.4: *Productie van een tau paar in elektron-positron annihilatie. In dit geval is de invariante massa zo hoog dat een Z boson wordt gevormd dat in een tau paar vervalt. De tau's vervallen vervolgens de ene in een elektron en neutrino's en de andere in een muon plus neutrino's. Het elektron is herkenbaar aan de grote blob aan de linkerkant, een representatie van een grote elektromagnetische energie depositie in de calorimeter. Het spoor ernaar toe zegt dat het om een geladen deeltje gaat. Het muon is herkenbaar aan het feit dat het zowel in de binnenste detector een spoor vormt als in de buitenste detectoren aan de rechterkant, aangegeven met de pijl. Dit duidt op een deeltje dat moeiteloos door veel materie gaat maar wel geladen is, ergo het muon. Dit geval is opgenomen met de OPAL detector bij LEP.*

Detecting a Tau Neutrino

Of one million million tau neutrinos crossing the DONUT detector, scientists expect about one to interact with an iron nucleus.

Figuur 5.5: *Het principe van detectie van het tau neutrino in de DONUT detector op Fermilab. Let op het onderste spoor door de detector. Dit heeft een “knik” na de eerste detectie laag. Dit wijst op een tau-lepton verval.*

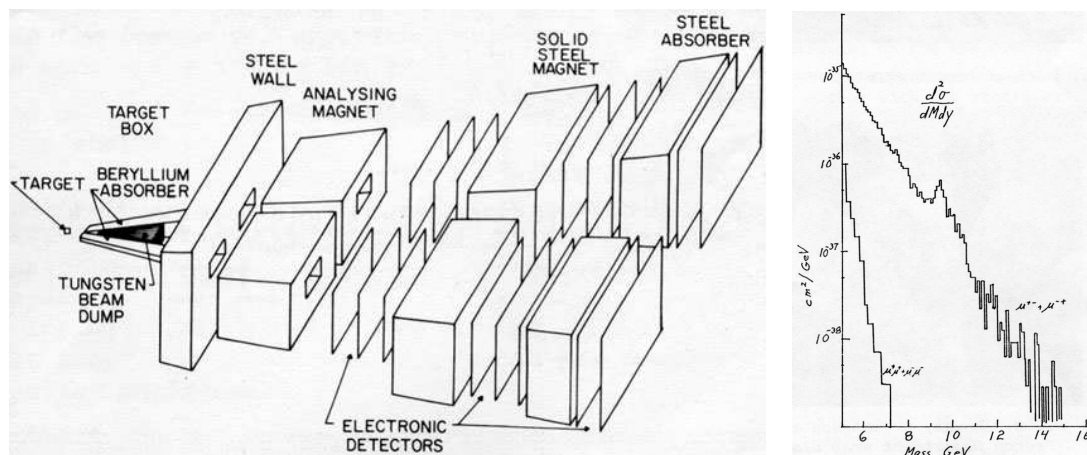
van Fig. 5.5, kunnen geladen tau-leptonen worden opgespoord. Het DONUT experiment is het eerste (en tot nu toe enige) geweest dat dit soort gevallen heeft geregistreerd.

Op dezelfde manier als waarop het J/ψ deeltje is ontdekt is een zwaardere resonantie met vergelijkbare eigenschappen ontdekt die bekend staat als de Υ [38]. Dit deeltje, ontdekt in een experiment geleid door Lederman op Fermilab, bleek te bestaan uit een $b\bar{b}$ toestand, precies zoals een J/ψ uit een $c\bar{c}$ toestand bestaat. Het experiment waarin dat gebeurde staat schematisch weergegeven in Fig. 5.6.

Ook was na de ontdekking van het b-quark, gebruikmakend van het GIM argument, duidelijk dat er een t-quark moest zijn. Dit quark blijkt echter onwaarschijnlijk zwaar en had een hele hoge energie versneller nodig, het Tevatron, om het te produceren. Uiteindelijk is het top quark ontdekt door de CDF en $D\bar{0}$ experimenten bij het Tevatron [39].

Kortom we hebben alle fermionen van het Standaard Model zoals ze vermeld staan in tabel 5.1 daadwerkelijk waargenomen.

Maar wat zou erop tegen zijn om nog meer kolommen toe te voegen met meer herhalingen van deeltjes bij hogere massa's? Daar zijn twee argumenten op tegen. De neutrino's zijn allemaal erg licht. Het ligt dan ook voor de hand



Figuur 5.6: Links het experiment E288 op Fermilab dat het Υ deeltje heeft ontdekt en daarmee het b -quark. Rechts de originele grafiek waarop de piek is te zien in het invariante massaspectrum van muon-paren van tegengestelde lading bij ongeveer 9.5 GeV, de massa van de Υ .

te veronderstellen dat een volgende generatie fermionen ook een relatief licht neutrino zou hebben. Een extra neutrino is echter experimenteel uitgesloten door het zeer nauwkeurig gemeten verval van het Z-boson (we komen zo dadelijk op het Z-boson terug.) Deze meting sluit een extra neutrino met een massa van minder dan 45 GeV uit. Een tweede argument gaat juist om het zwaarste deeltje. Een volgende generatie fermionen zou dan ook redelijkerwijs een quark analoog aan het top-quark moeten hebben dat een grotere massa heeft dan het top quark. Echter een fermion met een hogere massa dan het top quark stuit op theoretische bezwaren. De koppeling aan het Higgs boson wordt dan zo sterk (omdat die massa-afhankelijk is) dat behoud van waarschijnlijkheid wordt geschonden in de theorie van het Standaard Model. We gaan hier niet verder op in. Het lijkt er dus heel sterk op dat we precies drie generaties fermionen, ook wel families genoemd, als elementaire deeltjes hebben.

Interacties

Zoals we in het vorige hoofdstuk zagen correspondeert de U(1) symmetrie van vermenigvuldiging met een complexe fase met een elektromagnetische kracht die wordt overgebracht door fotonen. Op dezelfde manier kunnen de zwakke en sterke kernkracht ook uit een symmetrie worden verklaard.

De symmetrie van de zwakke wisselwerking is de symmetrie tussen u- en d-quarks en elektronen en elektron-neutrino's. Natuurlijk geldt voor de andere

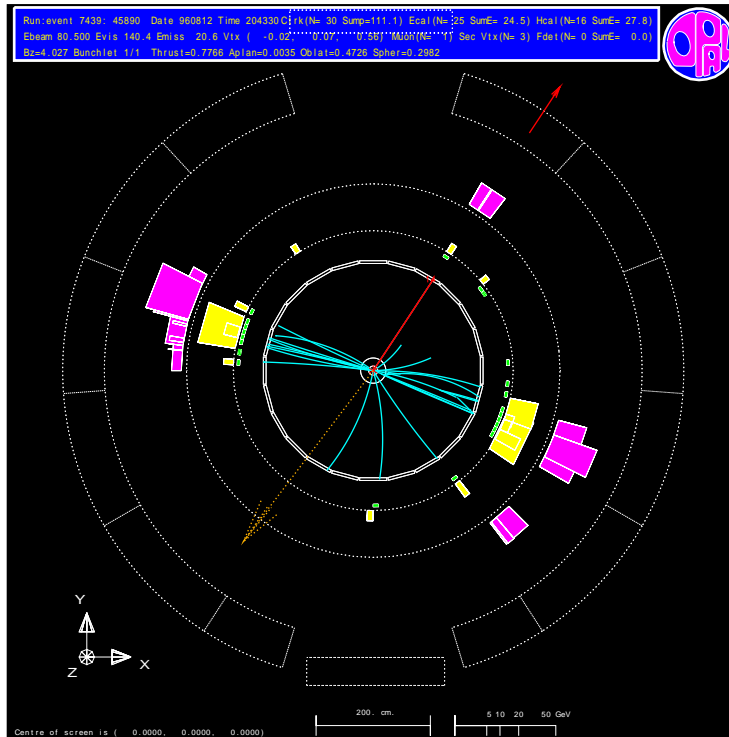
fermion families (kolommen in tabel 5.1) hetzelfde.

In tabel 5.1 hebben we al gezien dat er een quantumgetal voor de zwakke kernkracht wordt toegekend dat zwakke isospin heeft. De derde component (de enige van belang als we even alleen de fermionen beschouwen) van die zwakke isospin wordt aangegeven met T_3 . De toekenning van de waarden $+1/2$ en $-1/2$ is arbitrair. Als we deze twee waarden voor alle fermionen van een $-$ teken voorzien zou de wereld er wat de zwakke wisselwerking betreft niet anders uitzien. Voilà de zwakke symmetrie. We kunnen nu een u- en een d-quark samen en analoog een e en een ν_e samen opvatten als kolomvectoren

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

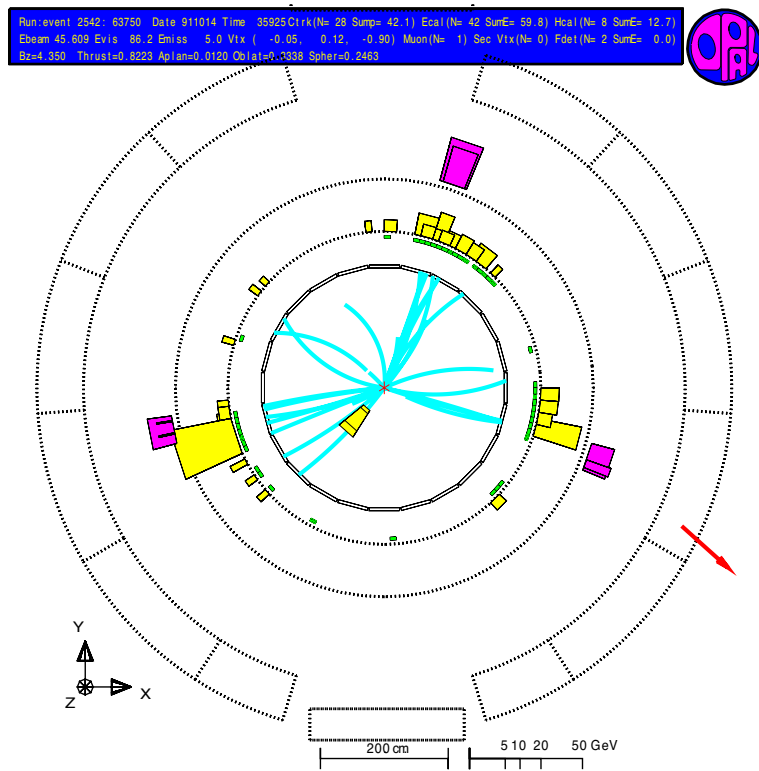
en de wereld is globaal invariant onder een rotatie van deze 2-vectoren. De groep van rotaties van deze 2-vectoren heet $SU(2)$. De groep $SU(2)$ kan worden opgebouwd uit drie onafhankelijke matrices, generatoren, zodat alle groepsleden geschreven kunnen worden als lineaire combinaties van die drie generatoren. We kunnen nu weer door de procedure heen gaan waarbij we deze transformaties lokaal maken, dus afhankelijk van plaats en tijd. In dit geval ligt alles natuurlijk wat ingewikkelder door het feit dat er drie generatoren zijn en niet één zoals bij het elektromagnetisme. Een verdere complicatie in dit geval is dat het blijkt dat we de $SU(2)$ transformaties niet onafhankelijk kunnen beschouwen van de $U(1)$ transformaties van het elektromagnetisme. Het gevolg is dat we in een keer de zogenaamde elektrozwakke symmetrie moeten beschouwen $SU(2) \otimes U(1)$. Om het nog gecompliceerder te maken is ook nog het Higgs mechanisme nodig om te zorgen dat de fermionen verschillende massa's kunnen hebben (de massa's van u- en d-quarks zijn immers niet hetzelfde, dus de $SU(2)$ symmetrie niet exact.) Na veel wiskunde komt er dan uit dat de gecombineerde elektrozwakke wisselwerking vier verschillende deeltjes heeft die in interacties worden uitgewisseld:

- γ Het foton. We kunnen dit verder weer gewoon als het elektromagnetische quantum opvatten.
- Z^0 Een veel zwaardere versie van het foton. Dit deeltje heeft een massa van 91 GeV. Het gedraagt zich in een aantal opzichten net als het foton. Maar er zijn ook verschillen. Zo koppelt het Z^0 wel aan het neutrino en het foton niet.
- W^\pm De W-bosonen. Hiervan is een positief en een negatief geladen exemplaar. Deze bosonen zorgen ervoor dat u-quarks in d-quarks kunnen veranderen, elektronen in elektron-neutrino's en ook omgekeerd. Dit quantum wordt bijvoorbeeld uitgewisseld in het geval van een radioactief bèta verval. Het W-boson heeft ook een grote massa van ongeveer 80 GeV.



Figuur 5.7: Detectie van een $W^+ W^-$ paar. Het ene W -boson vervalt in een muon (te zien als de rode pijl rechts boven) en een neutrino (gedetecteerd door de missende impuls die met de stippellijn links onder staat aangegeven.) Het andere W -boson vervalt in een quark-anti-quark paar die zichtbaar worden als twee stromen deeltjes naar links en naar rechts in de figuur. Uit de invariante massa van het quark paar is de massa van het W -boson te meten, die ongeveer 80 GeV blijkt te zijn. Dit geval is geregistreerd door de OPAL detector bij LEP.

Zoals te zien is hebben de W -bosonen ook elektrische lading. Dat betekent dat ze ook aan het foton koppelen, ze hebben immers elektromagnetische interactie. Het blijkt dat de W - en Z -bosonen ook aan elkaar koppelen. Omdat de W - en Z -bosonen zo'n grote massa hebben, is het effect van die koppelingen onderling bij de energieën waarbij we nu experimenteren nog gering. Het Z -boson kan makkelijk worden gemaakt in e^+e^- botsingen bij hoge energie. Als de invariante massa van de botsing precies de massa van het Z -boson is, wordt het resonant geproduceerd met een grote werkzame doorsnede. De meting van de werkzame doorsnede voor elektron-positron botsingen is te zien in Fig. 4.5 (hfdst. 4). W -bosonen zijn in e^+e^- annihilatie bij nog hogere energieën te produceren. Een voorbeeld van een geval waarin twee W -bosonen zijn geproduceerd staat in Fig. 5.7.



Figuur 5.8: Productie van een eindtoestand met drie jets in e^+e^- verstrooiing, zoals gezien in de OPAL detector bij LEP. De enige mogelijke verklaring van zo'n geval is dat ten minste één van de jets door een gluon is veroorzaakt.

Voor de sterke wisselwerking is er een analoge situatie. In dit geval is het quantumgetal C , ook wel kleur genoemd, waarvan de waarden met r (rood), g (groen) en b (blauw) worden aangegeven. Er zijn dus drie verschillende waarden mogelijk voor het kleur quantumgetal. We kunnen dus voor elke quark de toestand in de kleurruimte schrijven als een drie-vector:

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_g \\ u_b \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Transformaties in deze kleurruimte gaan met drie bij drie matrices. De groep die hierbij hoort heet $SU(3)$. Het mooie van $SU(3)$ is dat er verder geen complicaties zijn met de elektrozwakke symmetrie en met massaverschillen (omdat rode quarks evenveel massa hebben als blauwe quarks.) De $SU(3)$ groep heeft acht generatoren en er zijn dan ook acht verschillende deeltjes die worden uitgewisseld, allen gluonen genoemd (lijmdeeltjes.) Deze gluonen verschillen alleen van kleurlading.

γ	Electromagnetische kracht	}	Electrozwakke kracht
Z^0	} Zwakke kernkracht		
W^\pm			
$g^a (a = 1..8)$			Sterke kernkracht

Tabel 5.2: *De krachtdeeltjes (ijkbosonen) van het Standaard Model.*

Net als bij de elektrozwakke ijkbosonen hebben ook de gluonen onderling interactie, omdat ze zelf een kleurlading hebben. Gluonen koppelen dus aan elkaar. In het geval van de quarks en gluonen heeft dat nogal dramatische gevolgen omdat het effect hiervan niet wordt gedempt door de massa van de gluonen. De massa van de gluonen is nul, net als de massa van het foton. Daarbovenop komt nog dat de koppelingssterkte van de sterke wisselwerking groot is. Het totale effect hiervan is dat quarks zo'n sterk kleurveld om zich heen hebben dat ze niet vrij voor kunnen komen. Zodra er een ander quark in de buurt is zullen de quarks zich gaan groeperen in stelsels die een gezamenlijke kleurlading nul hebben. Hierover meer in de volgende sectie. Het bestaan van gluonen is aangetoond in elektron-positron verstrooiing, waarbij drie deeltjes-jets in de eindtoestand worden geproduceerd. Een voorbeeld van een drie-jet geval wordt gegeven in Fig. 5.8. Deze gevallen zijn niet te verklaren met een eindtoestand met alleen maar quarks, omdat de begintoestand geen quarks bevat en de eindtoestand dus noodzakelijk een even aantal quarks plus anti-quark moet bevatten. Het derde deeltje dat dan een jet veroorzaakt, en dus kennelijk sterke interacties heeft maar geen quark is, moet dan wel het gluon zijn. Vergelijkingen van hoekverdelingen en differentiële werkzame doorsnede bevestigen deze verklaring.

De ijkbosonen (krachtdeeltjes) van het Standaard Model zijn samengevat in tabel 5.2.

Om de massa's correct te krijgen in het Standaard Model is het Higgs mechanisme nodig, waaruit nog een extra deeltje tevoorschijn komt, het Higgs boson, een spin 0 deeltje dat aan alle deeltjes met massa koppelt. We gaan hier niet verder op in.

Mesonen, baryonen en andere sterke verhalen

Zoals we hierboven hebben gezien heeft de sterke interactie maar liefst acht ijkbosonen die kunnen worden uitgewisseld. De sterke interactie heet bovendien "sterk" omdat de koppeling tussen quarks en gluonen sterk is, dat wil zeggen

dat de waarschijnlijkheid van een interactie groot is. Daar komt nog bovenop dat de gluonen ook zelf kleurlading hebben en dus interactie met elkaar hebben. Het gevolg van dit alles is dat de kracht tussen quarks zeer groot is. Door de zelfinteractie van de gluonen neemt de kracht tussen twee objecten (bijvoorbeeld quarks, gluonen of groepjes van quarks en gluonen) zelfs lineair toe als de afstand tussen de kleurladingen groter wordt gemaakt. Het gevolg is dat quarks niet vrij in de natuur voorkomen, maar slechts in groepjes die samen kleur neutraal zijn. Kleur neutraal, of in vakjargon kleursinglet, zijn bijvoorbeeld een kleur samen met dezelfde anti-kleur. Een ander voorbeeld van een kleur neutraal object is het voorkomen van alle kleuren of alle anti-kleuren in gelijke hoeveelheid. Dus bijvoorbeeld drie quarks in een groepje, waarvan één rood is, één groen en één blauw. Vergelijk dit effect met een televisie waarbij als de kleuren rood, groen en blauw in gelijke mate voorkomen wit wordt gevormd.

Uit het feit dat er in de natuur alleen stabiele kleur neutrale combinaties voor kunnen komen is te verklaren dat we twee soorten hadronische deeltjes hebben, dat wil zeggen deeltjes die uit quarks zijn opgebouwd.³ Mesonen bestaan uit een quark en een anti-quark. Voorbeelden van mesonen zijn pionen, die bestaan uit een \bar{u} voor een π^+ , en een \bar{d} voor een π^- . Het neutrale pion bestaat uit een lineaire combinatie van $u\bar{u}$ en $d\bar{d}$, namelijk $\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} - u\bar{u})$. Dit laatste is het gevolg van het feit dat combinaties als $u\bar{u}$ en $d\bar{d}$ dezelfde quantumgetallen hebben en dus interfereren. Natuurlijk is ook de andere onafhankelijke lineaire combinatie te maken, $\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{d} + u\bar{u})$, en dit is het η deeltje.

Het tweede soort hadronen dat we hebben zijn combinaties van drie quarks, zoals bijvoorbeeld het proton dat bestaat uit uud , of het neutron dat bestaat uit udd . Deze combinaties worden baryonen genoemd.

Natuurlijk zijn er met de quarks uit de andere families c,s,b,t nog veel meer combinaties te maken. In het bijzonder zijn dat mesonen zoals het vreemde meson K^+ , dat bestaat uit $u\bar{s}$ en zijn antideeltje K^- dat bestaat uit $\bar{u}s$. Daarnaast zijn er twee neutrale kaonen die van groot belang zijn voor de rest van deze cursus: K^0 bestaand uit $d\bar{s}$ en het corresponderende antideeltje \bar{K}^0 bestaand uit $\bar{d}s$.

Daarnaast kunnen de mesonen en baryonen, omdat het samengestelde deeltjes zijn, nog in allerlei aangeslagen toestanden voorkomen. Deeltjes die corresponderen met dergelijke aangeslagen toestanden worden vaak aangegeven met een ster, bijvoorbeeld K^* . In moderne notatie wordt vaak de naam van het deeltjes in de grondtoestand gebruikt met daarachter een massa in MeV. Hogere aangeslagen toestanden impliceren grotere massa's.

Het feit dat we in het voorgaande jets, of stromen van deeltjes, in gevallen zagen waarin quarks en gluonen worden gemaakt is ook te verklaren uit het gedrag

³Dat wil zeggen tot op eerste orde. Inmiddels zijn er ook combinaties gevonden van vier quarks en een anti-quark, samen ook weer kleur neutraal, de zogenaamde penta-quarks.

van de sterke wisselwerking. Een succesvol model daarvoor is het zogenaamde Lund model. Dit model gaat uit van een lineaire toename van de energie die is opgeslagen in het kleurveld tussen twee quarks als de afstand tussen de quarks groter wordt. Als de quarks nu uit elkaar bewegen zal die energie zo groot worden dat het voordeliger is een deel van die energie te laten materialiseren in nieuwe quarks. Daarbij wordt ervoor gezorgd dat de afstand tussen quark paren weer kleiner wordt. Door dit patroon iteratief te herhalen totdat de beschikbare energie niet meer genoeg is om nog meer nieuwe deeltjes te creëren ontstaat een stroom van quarks. Deze zullen dan combineren tot kleur neutrale sets van quark en anti-quark of quark triplets. De aldus ontstane combinaties van quarks zijn de hadronen die we in de detector zien.

Opgaven

- 5.1: Tel per familie de quantumgetallen op voor alle deeltjes. Valt hier iets aan op?
- 5.2: Verklaar waarom de productie van het J/ψ deeltje in hadron botsingen minder kritisch is dan in elektron-positron botsingen.
- 5.3: Teken het Feynmandiagram voor het verval $\Upsilon \rightarrow \mu^+ \mu^-$.
- 5.4: Teken het Feynmandiagram van een τ verval in een μ . Vergeet de neutrino's niet.
- 5.5: Verklaar met behulp van de Feynmanregels waarom de annihilatie van een elektron-positron paar als functie van de invariante massa de vorm heeft van Fig. 4.5 (hfdst. 4).

Hoofdstuk 6

Een curieus fenomeen: CP schending in het Kaon systeem

C, P en T symmetrie

Symmetrie speelt een belangrijke rol in de natuur. We hebben al gezien dat bepaalde continue symmetrieën aanleiding geven tot de krachten in de natuur. Naast deze continue symmetrieën zijn er ook een aantal discrete symmetrieën die een belangrijke rol spelen. Bij deze discrete symmetrieën gaat het erom dat golf functies, of quantummechanische toestanden onveranderd blijven onder de betreffende symmetrietransformatie. De drie discrete symmetrieën die we hier zullen beschrijven zijn ladingsconjugatie \mathcal{C} , pariteit \mathcal{P} en tijdsomkeer \mathcal{T} .

De \mathcal{C} operator laat deeltjes overgaan in hun anti-deeltje (en dus anti-deeltjes in hun corresponderende deeltje.) Voor deeltjes die niet hun eigen anti-deeltje zijn is dit manifest geen symmetrie voor ééndeeltjes toestanden. Kijken we echter naar het gedrag van deeltjes en anti-deeltjes onderling, dan kunnen we op het eerste gezicht zeggen dat we het gedrag van deeltjes en anti-deeltjes niet kunnen onderscheiden. Met andere woorden wat we deeltje noemen en wat anti-deeltje blijkt een keuze en niet uniek te definiëren.¹ Dus voor de \mathcal{C} operator kunnen we zeggen:

$$\mathcal{C}\Psi(\vec{x}, t) = C\bar{\Psi}(\vec{x}, t). \quad (6.1)$$

Omdat $\bar{\bar{\Psi}} = \Psi$, kunnen we door herhaald toepassen van de \mathcal{C} operator zien dat $\mathcal{C}^2 = 1$. Als Ψ een eigentoestand is van de ladingsconfiguratie operator, dan kan de eigenwaarde dus $C = +1$ of $C = -1$ zijn.

De pariteitsoperator \mathcal{P} spiegelt alle plaatscoördinaten, dus een puntspiegeling

¹Maar niet alles is wat het lijkt, we komen hier later op terug.

in de oorsprong:

$$\mathcal{P}\Psi(\vec{x}, t) = P\Psi(-\vec{x}, t). \quad (6.2)$$

Door herhaald toepassen van P , kunnen we weer zien dat $P^2 = 1$, dus als Ψ een eigentoestand is van de pariteitsoperator, dan zien we dat $P = +1$ of $P = -1$. Van dergelijke eigentoestanden zeggen we dat ze positieve of negatieve pariteit hebben. Omdat het kiezen van de richting in de ruimte willekeurig lijkt, is het redelijk aan te nemen dat de natuur als geheel invariant is onder de pariteitsoperatie.²

De tijdsomkeeroperator, keert het teken van de tijd om:

$$\mathcal{T}\Psi(\vec{x}, t) = T\Psi(\vec{x}, -t). \quad (6.3)$$

Ook hier geldt weer dat als Ψ een eigentoestand is van de tijdsomkeeroperator $T = \pm 1$ moet gelden.

Een belangrijk feit is dat voor alle enigszins redelijke veldentheorieën van puntdeeltjes de gecombineerde operatie \mathcal{CPT} een exacte symmetrietransformatie is op de gehele theorie en dus op de gehele wereld.

Voorts geldt invariantie van deze discrete symmetrieën voor bepaalde typen interacties. Dit staat gegeven in tabel 6.1. We zien dus dat in de zwakke wisselwerking pariteit en ladingsconjugatie niet behouden zijn voor toestanden die eigentoestand van die operatoren zijn. Dat komt wat betreft de pariteit doordat neutrino's alleen met linkshandige chiraliteit aan de W - en Z -bosonen koppelen. Keren de ruimtecoördinaten om van teken, dan keert ook de impulsvector om van teken. De spin wordt hier echter niet door beïnvloed. De relatieve richting van spin en impuls draait hierdoor om. Hierdoor draait de linkshandige chiraliteit naar rechtshandige chiraliteit. Maar op dat moment ontkoppelen de neutrino's van de zwakke interactie en hebben geen Standaard Model interacties meer. Dergelijke verdwijningen zijn nog nooit waargenomen. Voor ladingsconjugatie geldt een dergelijk verhaal. Als de \mathcal{C} operator wordt toegepast op een linkshandig neutrino, dan verandert het in een linkshandig anti-neutrino. Echter, de zwakke wisselwerking koppelt alleen aan rechtshandige anti-neutrino's (in symmetrie met linkshandige neutrino's.) Dus ook hier wordt de symmetrie maximaal geschonden. Experimenteel is het niet behouden zijn van pariteit in de zwakke interactie voor het eerst aangetoond door C.S. Wu [40]. Zij keek in 1957 naar een hoeveelheid ^{60}Co in een dipoolmagneetveld. ^{60}Co vervalst zwak, waarbij een elektron en een neutrino uit de kern worden gestoten. Verder is ^{60}Co makkelijk te polariseren, dat wil zeggen dat in een magneetveld de protonen en neutronen in de kern bij voorkeur hun spin richten langs het magneetveld. In haar experiment nam Wu waar dat er meer elektronen worden uitgestoten in de richting van het

²Weer is niet alles wat het lijkt, we komen hier spoedig op terug.

	\mathcal{P}	\mathcal{C}	\mathcal{T}
Electromagnetische kracht	+	+	+
Zwakke kernkracht	-	-	+
Sterke kernkracht	+	+	+

Tabel 6.1: *Invariantie zoals bekend in 1963 onder elk van de drie discrete symmetrieën \mathcal{C} , \mathcal{P} en \mathcal{T} voor elk van de fundamentele interacties in het Standaard Model. ‘+’ betekent invariantie, ‘-’ betekent schending van behoud van het bijbehorende quantumgetal.*

magneetveld. De zwakke interactie, waarin de elektronen ontstaan, heeft hier dus een voorkeur voor een bepaalde richting en pariteit is niet behouden. Het effect, ook kwantitatief, is geheel te verklaren door aan te nemen dat in de natuur alleen linkshandige neutrino’s en rechtshandige anti-neutrino’s voorkomen.³ Mevrouw Wu is overigens geïnspireerd om dit experiment te doen door T.D. Lee en C.N. Yang die op basis van hun analyse van het feit dat het K^+ meson zowel in twee als in drie pionen kan vervallen tot de conclusie kwamen dat de pariteit in de zwakke wisselwerking best wel eens geschonden zou kunnen zijn [41].

Passen we nu de gecombineerde operatie \mathcal{CP} toe, dus eerst pariteit en dan ladingsconjugatie,⁴ dan verandert een linkshandig neutrino in een rechtshandig anti-neutrino en omgekeerd. Deze gecombineerde transformatie is dus zo op het eerste gezicht wel een invariantie van de zwakke wisselwerking.

Het Kaon experiment

Kaonen zijn mesonen die bestaan uit een quark uit de eerste familie van het Standaard Model en een vreemd quark (s). De samenstelling van de verschillende K-mesonen is gegeven in tabel 6.2.

In dit stuk zullen vooral praten over quantumtoestanden en transformaties daarvan. Om die discussie notationeel wat te vergemakkelijken voeren we de

³We noemen deeltjes linkshandig gepolariseerd als de spin richting tegen de bewegingsrichting in staat. Rechtshandig is als de spinrichting met de bewegingsrichting mee staat. Deze manier van het projecteren van spin op de bewegingsrichting heet de helicheit van een deeltje. We kunnen ook de chiraliteit van een deeltje definiëren als de projectietoestanden op de componenten van Dirac spinoren. In het geval deeltjes met de lichtsnelheid gaan vallen helicheit en chiraliteit samen. Gaan deeltjes langzamer dan de lichtsnelheid, dan kunnen we het teken van de helicheit altijd omklappen door de waarnemer sneller te laten gaan dan het deeltje. De chiraliteit blijft dan echter toch hetzelfde en hangt niet van de waarnemer af.

⁴Andersom mag ook: De \mathcal{CP} operatie is identiek aan de \mathcal{PC} operatie.

K^+	$u\bar{s}$
K^-	$\bar{u}s$
K^0	$d\bar{s}$
\bar{K}^0	$\bar{d}s$

Tabel 6.2: *Spectroscopische samenstelling in quarks van de Kaonen.*

notatie in van zogenaamde *kets*. Een toestand schrijven we bijvoorbeeld als:

$$|K^0\rangle. \quad (6.4)$$

Dus tussen de symbolen $|\dots\rangle$ zetten we informatie die relevant is voor de toestand. Dat kan bijvoorbeeld de impuls en de spin van een deeltje zijn $|p, s\rangle$, maar in het geval van formule 6.4 is de informatie dat het om een neutraal kaon gaat.

Passen we nu de pariteits- en ladingsconjugatie operatoren toe op toestanden van neutrale kaonen dan zien we dat:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}|K^0\rangle &= -|K^0\rangle, & \mathcal{P}|\bar{K}^0\rangle &= -|\bar{K}^0\rangle, \\ \mathcal{C}|K^0\rangle &= |\bar{K}^0\rangle, & \mathcal{C}|\bar{K}^0\rangle &= |K^0\rangle. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Zoals we in de vorige sectie hebben gezien is het gedrag onder de operator \mathcal{CP} interessant, omdat we vermoeden dat die transformatie behouden is onder de zwakke wisselwerking (en ook onder de elektromagnetische en sterke wisselwerkingen.) Voor de \mathcal{CP} operator krijgen we:

$$\mathcal{CP}|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle, \quad \mathcal{CP}|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle. \quad (6.6)$$

De K^0 en \bar{K}^0 zijn dus geen eigentoestanden van de gecombineerde \mathcal{CP} operator, maar we kunnen door superpositie (lineaire combinatie) wel makkelijk twee onafhankelijk eigentoestanden van \mathcal{CP} maken:

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle), \quad |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle). \quad (6.7)$$

zodat geldt:

$$\mathcal{CP}|K_1\rangle = |K_1\rangle, \quad \mathcal{CP}|K_2\rangle = -|K_2\rangle. \quad (6.8)$$

Kaonen vervallen vaak in pionen (π^+ , π^0 , π^-) en in de volgende beschouwingen is het dus van belang te weten wat de \mathcal{C} en \mathcal{P} eigenschappen zijn van pionen. Deze staan getabuleerd in 6.3. Zoals we al in de vorige sectie hebben gehint, was er in de eerste helft van de jaren vijftig van de vorige eeuw de puzzel dat er positief geladen vreemde deeltjes waren die in twee pionen vervielen en positief geladen

	$ \pi^+\rangle$	$ \pi^0\rangle$	$ \pi^-\rangle$
\mathcal{P}	$- \pi^+\rangle$	$- \pi^0\rangle$	$- \pi^-\rangle$
\mathcal{C}	$ \pi^-\rangle$	$ \pi^0\rangle$	$ \pi^+\rangle$

Tabel 6.3: *Pariteit en ladingsconjugatiegedrag van pionen.*

vreemde deeltjes die in drie pionen vervielen. Deze twee deeltjes hadden ook exact dezelfde massa. Lee en Yang begrepen dat dit hetzelfde deeltje moest betreffen. Maar de implicatie daarvan was dat dit deeltje zowel in een $P = +$ (twee pionen) als in een $P = -$ (drie pionen) toestand kan vervallen. In dat geval zou, als het vreemde meson een eigentoestand van P is, pariteit moeten zijn geschonden. Het experiment van C.S. Wu heeft dat bevestigd.

Het neutrale kaon kan ook in zowel twee als drie pionen vervallen. Het is nu vrij makkelijk in te zien dat \mathcal{CP} hierbij behouden is, omdat het verval van de \mathcal{CP} eigentoestanden $|K_1\rangle$ en $|K_2\rangle$ dan verloopt als:

$$K_1 \rightarrow \pi^+\pi^- \quad \text{of} \quad K_1 \rightarrow \pi^0\pi^0 \qquad K_2 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 \quad \text{of} \quad K_2 \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0. \quad (6.9)$$

Een K^0 toestand is nu te ontbinden als:

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_1\rangle + |K_2\rangle). \quad (6.10)$$

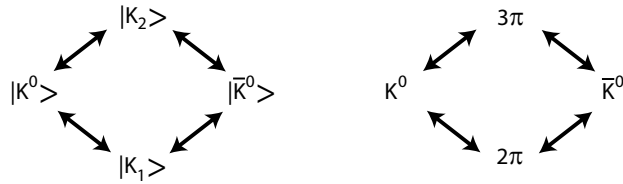
zodat makkelijk is in te zien dat als een K^0 wordt geproduceerd het de helft van de keren uiteenvalt in twee pionen en de andere helft van de keren in drie pionen.⁵

Omdat voor het verval in twee pionen veel meer faseruimte beschikbaar is dan voor het verval in drie pionen, het massaverschil tussen de begintoestand en eindtoestand is in het twee pion verval groter dan in het drie pion verval, gaat het twee pion verval met een kortere levensduur. De levensduur van het K_1 is $\tau = 0.89 \times 10^{-10}$ s en die van het K_2 is $\tau = 5.2 \times 10^{-8}$ s, een verschil van meer dan een factor 500. Dit levensduurverschil is voor het eerst gemeten in een experiment van Lederman *et al* [42]. Door het levensduurverschil is er ook een klein massaverschil tussen de K_1 en K_2 van $\Delta m = 3.49 \times 10^{-6}$ eV.⁶

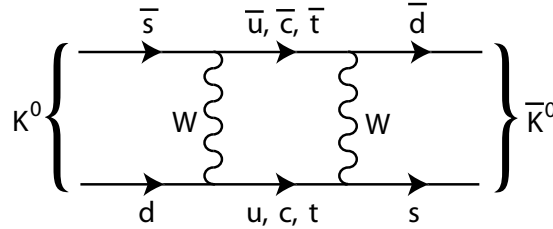
Een gevolg van de constellatie van de neutrale kaonen is dat ze in elkaar oscilleren. Dat wordt duidelijk gemaakt in het diagram van Fig. 6.1.

⁵Natuurlijk moeten we voor deze overgangswaarschijnlijkheden kwadrateren en worden de factoren $1/\sqrt{2}$ dan $1/2$.

⁶Ter vergelijking: de ionisatie potentiaal van een waterstofatoom is 13.6 eV. Een eV is de typische energie van overgangen tussen verschillende niveaus in atomen en moleculen, dus het typische energiegebied van de chemie.



Figuur 6.1: Overgangen van de verschillende neutrale kaon toestanden die ervoor zorgen dat kaonen en anti-kaonen in elkaar oscilleren.



Figuur 6.2: Feynmandiagram van neutrale kaon oscillatie op quark niveau.

Deze mogelijkheid van oscillatie is voor het eerst geopperd door Gell-Mann en Pais [43], en in feite voorspelden zij het levensduurverschil tussen de K_1 en K_2 .

In een Feynmandiagram met onze huidige kennis van de compositie van kaonen in quarks ziet de oscillatie eruit als getekend in Fig. 6.2.

Als we nu een relativistische bundel van neutrale kaonen maken (ze reizen dan met bijna de lichtsnelheid) dan verwachten we dat, ongeacht of we nu met K^0 of \bar{K}^0 beginnen, er na ongeveer 1 m vrijwel alleen nog maar K_2 toestanden over zijn. We zullen dan dus dicht bij het productiepunt vooral het verval in twee pionen zien van de kortlevende K_1 met een kleine achtergrond van drie pion verval van het K_2 . Na 1 m zullen we vrijwel alleen het verval in drie pionen nog zien van het K_2 . Groot was dan ook de verbazing van de heren Christenson, Cronin, Fitch en Turlay toen zij ook op grote afstanden nog een substantiële hoeveelheid vervallen in twee pionen aantreffen [10]. Na ongeveer 19 m (57 feet) troffen zij 45 twee pion vervallen aan tegen 22700 drie pion vervallen. Dat is weinig, maar veel te veel ten opzichte van de verwachting als we de levensduur gebruiken van de K_1 en K_2 . Kennelijk zijn de eigentoestanden van het zwakke verval, die de levensduur bepalen, niet precies hetzelfde als de eigentoestanden voor de \mathcal{CP} operator. We parametriseren dat door een kleine draaiing van de toestanden ten opzichte van elkaar in te voeren:

$$|K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |\epsilon|^2}} (|K_2\rangle + \epsilon|K_1\rangle), \quad (6.11)$$

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} (|K_1\rangle - \epsilon|K_2\rangle). \quad (6.12)$$

De toestanden $|K_L\rangle$ en $|K_S\rangle$ zijn nu de eigentoestanden voor de zwakke interactie die het verval bepaalt, voor respectievelijk de toestand met de langste (*Long*) en kortste (*Short*) levensduur. De parameter ϵ is gemeten en is:

$$\epsilon = (2.28 \pm 0.02) \times 10^{-3}. \quad (6.13)$$

Het effect is dus klein, maar meetbaar.

Het effect van de \mathcal{CP} schending is nog duidelijker in het semileptonisch verval van de K_L :

$$K_L \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e, \quad (6.14)$$

$$\rightarrow \pi^- e^+ \nu_e. \quad (6.15)$$

In een K_L bundel (dus na een zeer lange vervalstijd) komt het tweede verval, dus in een positron 0.33% meer voor.

De consequentie is dat we nu ambiguïteitsvrij kunnen definiëren wat een positieve lading is als de voorkeurslading van het lepton in lang levend neutraal K meson verval. In dat geval beginnen we met een neutrale ladingssituatie en kunnen toch eenduidig onderscheid maken tussen positieve en negatieve lading. Met andere woorden: op deze manier kunnen we ambiguïteitsvrij onderscheid maken tussen materie en anti-materie.⁷

Menging en oscillatie

De evolutie van een vrije toestand wordt bepaald door de energie operator. Dit is het makkelijkst te zien door de vlakke golfoplossing te nemen voor een vrij deeltje:

$$\Psi(\vec{x}, t) = e^{-(i/\hbar)(Et - p_x x - p_y y - p_z z)} \quad (6.16)$$

Voor een deeltje in rust is $p_x = p_y = p_z = 0$ en geldt $E = m$. De vlakke golfoplossing reduceert dan tot:

$$\Psi(\vec{x}, t) = e^{-(i/\hbar)(mt)} \quad (6.17)$$

en dit geeft de evolutie van het deeltje in de tijd. Als het deeltje niet vrij is en interacties heeft dan is er ook de mogelijkheid dat het deeltje verval. Als we dat meenemen in de oplossing blijkt de vlakke golfoplossing te veranderen in:

$$\Psi(\vec{x}, t) = e^{-(i/\hbar)((m-i\Gamma/2)t)} = e^{-(\Gamma/\hbar/2)t} e^{-(i/\hbar)(mt)}, \quad (6.18)$$

⁷Terugkomend op eerdere voetnoten zien we dus dat inderdaad niet alles is wat het lijkt.

waarbij Γ de vervalsbreedte van het deeltje is en de afname van de magnitude van de golf functie door het verval aan de eerste factor in de meest rechtse uitdrukking goed is te zien.

Omdat de $|K^0\rangle$ en $|\bar{K}^0\rangle$ in elkaar kunnen overgaan en mengen treedt er een oscillatie op in het voorkomen van deze twee toestanden. Om dat te zien beschouwen we de tijdevolutie van de $|K_L\rangle$ en $|K_S\rangle$. We verwaarlozen CP-schending hier om lange notaties te voorkomen. CP-schending kan makkelijk worden meegenomen ten koste van een langere uitdrukking. De tijdevolutie wordt gegeven door:

$$|K_L, t\rangle = e^{-iM_L t - \Gamma_L t/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|K^0, t=0\rangle + |\bar{K}^0, t=0\rangle \right), \quad (6.19)$$

$$|K_S, t\rangle = e^{-iM_S t - \Gamma_S t/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|K^0, t=0\rangle - |\bar{K}^0, t=0\rangle \right). \quad (6.20)$$

Stel dat we met een zuivere $|K^0\rangle$ bundel beginnen op tijdstip $t = 0$. Om nu te zien hoeveel $|\bar{K}^0\rangle$ we op tijdstip t hebben doen we dat via de toestanden $|K_L, t\rangle$ en $|K_S, t\rangle$, waarbij we dan alleen de $|\bar{K}^0\rangle$ component beschouwen:

$$|\bar{K}^0, t\rangle = e^{-iM_L t - \Gamma_L t/2} \frac{1}{2} |K^0, t=0\rangle + e^{-iM_S t - \Gamma_S t/2} \frac{1}{2} |K^0, t=0\rangle. \quad (6.21)$$

Het aantal \bar{K}^0 mesonen, de intensiteit $I(\bar{K}^0, t)$, op tijdstip t wordt nu gegeven door de absolute waarde van het kwadraat van de coëfficiënten te nemen:

$$I(\bar{K}^0, t) = \frac{1}{4} \left(e^{-\Gamma_L t} + e^{-\Gamma_S t} - 2e^{-(\Gamma_L + \Gamma_S)t/2} \cos(\Delta m t) \right). \quad (6.22)$$

De negatieve e -machten met de vervalsbreedtes zorgen er voor dat de intensiteit minder wordt. Maar er is ook een term $\cos(\Delta m t)$ die oscilleert in de tijd, en wel met een periode die wordt bepaald door het massaverschil $\Delta m = M_L - M_S$. Door de oscillatielengte te bepalen kunnen we dit massaverschil direct meten en die blijkt te zijn:

$$\Delta_m = (3.49 \pm 0.01) \times 10^{-6} \text{ eV}, \quad (6.23)$$

een extreem klein massaverschil.

Regeneratie

Behalve het effect van de \mathcal{CP} schending is er nog een curieus fenomeen in het neutrale Kaon systeem. Als we een neutrale kaon bundel produceren, bijvoorbeeld door paarproductie van K^0 en \bar{K}^0 , dan houden we na een tijdje een min of meer pure K_L bundel over. Sturen we die bundel vervolgens door een hoeveelheid

materiaal, dan blijkt vlak achter dat materiaal de bundel weer uit gelijke delen K_S en K_L te bestaan. Dit fenomeen heet regeneratie van een neutrale kaon bundel. De reden dat dit optreedt is dat K^0 en \bar{K}^0 verschillende sterke interacties hebben. Het K^0 bevat een \bar{s} quark dat alleen maar elastische verstrooiing ondergaat in de sterke wisselwerking, waarbij het K^0 weliswaar wordt verstrooid, maar als deeltje blijft bestaan. Het \bar{K}^0 bevat een s quark dat behalve elastische verstrooiing te ondergaan ook tussen hadronen kan worden uitgewisseld, bijvoorbeeld in een interactie waarbij een vreemd baryon, Λ , wordt geproduceerd:

$$\bar{K}^0 + p^+ \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+. \quad (6.24)$$

In dat geval wordt het \bar{K}^0 als deeltje vernietigd. Na een hoeveelheid materiaal zal dus wel het K^0 overleven, maar veel minder van de \bar{K}^0 zullen overblijven. De overblijvende K^0 bundel zal weer transformeren in gelijke hoeveelheden K_L en K_S , zodat de bundel weer in de oorspronkelijke toestand is hersteld, albeit met een lagere intensiteit.

Nog meer CP schending

Het neutrale kaon kan in twee of drie pionen vervallen. Die pionen kunnen ook nog geladen zijn of neutraal. Er zijn dus ook nog de volgende verhoudingen die kunnen worden gemeten en die onafhankelijke informatie geven:

$$\eta_{+-} = \frac{\text{Amplitude}(K_L \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\text{Amplitude}(K_S \rightarrow \pi^+\pi^-)}, \quad (6.25)$$

$$\eta_{00} = \frac{\text{Amplitude}(K_L \rightarrow \pi^0\pi^0)}{\text{Amplitude}(K_S \rightarrow \pi^0\pi^0)}. \quad (6.26)$$

Als de reacties naar geladen pionen en neutrale pionen niet zouden interfereren dan zou gelden:

$$\eta_{+-} = \eta_{00} = \epsilon. \quad (6.27)$$

De \mathcal{CP} schending door menging wordt veroorzaakt doordat $\epsilon \neq 0$. Daarnaast blijkt er ook nog directe \mathcal{CP} schending te zijn die voortkomt uit de interferentie van de mogelijke pion vervalstoestanden. Om dat te kunnen begrijpen moeten we de sterke isospin beschouwen. Sterke isospin is een quantumgetal van de sterke interactie. Bijvoorbeeld proton en neutron vormen een sterk isospin doublet met sterke isospin $I = 1/2$, waarbij de projectie van de derde component van de sterke isospin (analoog aan de projectie die we ook bij gewone spin doen) de waarde $I_3 = +1/2$ heeft voor het proton en $I_3 = -1/2$ voor het neutron. De pionen vormen een isospin triplet, $I = 1$, met de projectiewaarden $I_3 = +1$

voor het π^+ , $I_3 = 0$ voor het π^0 , en $I_3 = -1$ voor het π^- . In het neutrale kaon verval zit de $\pi^0\pi^0$ eindtoestand altijd in de isospintoestand $|I, I_3\rangle = |0, 0\rangle$, omdat er slechts één manier is om vectorieel 0 bij 0 op te tellen en het resultaat daarvan altijd 0 is in alle richtingen. De $\pi^+\pi^-$ eindtoestand kent twee mogelijke sterke isospin toestanden $|I, I_3\rangle = |0, 0\rangle$ en $|I, I_3\rangle = |2, 0\rangle$. Dit komt omdat de isospin toestanden van de geladen pionen als vector in I op kunnen tellen tot 1 of 0, terwijl de projectie I_3 altijd nul moet zijn voor de $\pi^+\pi^-$ combinatie want I_3 is een behouden grootte in sterke interacties. We beschouwen nu de overgangsamplitude voor de verschillende sterke isospin toestanden apart:

$$A_2 = \text{Amplitude}(K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-(I=2)), \quad (6.28)$$

$$A_0 = \text{Amplitude}(K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-(I=0)). \quad (6.29)$$

Nemen we nu voor het gemak even aan dat $\epsilon = 0$, dan kunnen we de amplitude voor het $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-$ verval schrijven als:

$$\begin{aligned} \text{Amplitude}(K_L \rightarrow \pi^+\pi^-) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\text{Amplitude}(K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) \right. \\ &\quad \left. - \text{Amplitude}(\bar{K}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left((A_0 + A_2) - (A_0 + A_2)^* \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (2i(\text{Im}A_0 + \text{Im}A_2)). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Nu is een globale fasedraaiing van alle deeltjes niet observabel en we kunnen de fasen altijd zo draaien dat het imaginaire deel van A_0 of A_2 gelijk is aan nul. Echter in het algemeen als A_0 een andere complexe fase heeft als A_2 kunnen we door een globale complexe fasedraaiing de amplitude voor het K_L verval naar twee pionen niet op nul krijgen. Dus ook in het geval dat $\epsilon = 0$ krijgen we dan een \mathcal{CP} schendend verval ! Om te quantificeren hoe groot dit effect is wordt een parameter ϵ' ingevoerd, met als definitie:

$$\epsilon' = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\text{Im}A_2}{A_0} e^{i(\delta_2 - \delta_0)}, \quad (6.31)$$

waarbij δ_0 en δ_2 de complexe fases zijn van de amplitudes A_0 en A_2 respectievelijk. Als we meenemen dat $\epsilon \neq 0$ blijkt dat we de verhoudingen η_{+-} en η_{00} uit kunnen drukken als:

$$\eta_{+-} = \epsilon + \epsilon', \quad (6.32)$$

$$\eta_{00} = \epsilon - 2\epsilon'. \quad (6.33)$$

Hieruit kunnen we zien dat de verhouding ϵ'/ϵ gemeten kan worden door de dubbele verhouding:

$$1 - 6 \operatorname{Re} \left(\frac{\epsilon'}{\epsilon} \right) = \frac{\operatorname{Br}(K_L \rightarrow \pi^0 \pi^0) / \operatorname{Br}(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\operatorname{Br}(K_S \rightarrow \pi^0 \pi^0) / \operatorname{Br}(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)}. \quad (6.34)$$

De factor 6 in deze vergelijking is een gelukkig combinatorisch effect.⁸ Experimenteel is de dubbele verhouding een gouden greep. Door een dergelijke meting vallen vrijwel alle systematische fouten in de metingen tegen elkaar weg, als je bij machte bent de metingen van de verschillende vertakkingsverhoudingen (Br) tegelijkertijd en met hetzelfde apparaat uit te voeren. Dit blijkt ook wel nodig te zijn want het gemeten effect is [44]:

$$\epsilon'/\epsilon = (21.2 \pm 2.8) \times 10^{-4}, \quad (6.35)$$

een extreem klein effect, maar significant verschillend van nul.

⁸Dit effect ontstaat door de zogenaamde Clebsch-Gordon coëfficiënten, die de relatieve waarschijnlijkheden geven voor het voorkomen van verschillende sterke isospincombinaties en met behulp van groepentheorie kunnen worden uitgerekend.

Opgaven

- 6.1: Leid formule 6.22 af uit 6.21.
- 6.2: Teken de hoeveelheid K^0 en \bar{K}^0 als een functie van de tijd als wordt begonnen met een pure K^0 bundel.
- 6.3: Waarom kunnen K^0 en \bar{K}^0 wel in elkaar oscilleren, maar neutron en anti-neutron niet?
- 6.4: Waarom zijn K^0 en \bar{K}^0 eigentoestanden van de sterke wisselwerking, maar niet van de zwakke wisselwerking ?
- 6.5: Bedenk een experiment om nauwkeurig ϵ'/ϵ te meten. Welke experimentele condities zijn hier voor belangrijk ?

Hoofdstuk 7

De CKM matrix: Waarom drie van alles nuttig is

De zwakke wisselwerking

In hoofdstuk 5 hebben we gezien dat de zwakke wisselwerking onder andere twee elektrisch geladen bosonen als intermediaire deeltjes heeft: De W^+ en W^- bosonen. Deze bosonen maken onder andere het verval van een neutron in een proton mogelijk via de interactie:

$$n \rightarrow p^+ e^- \bar{\nu}_e. \quad (7.1)$$

Op het niveau van quarks is deze reactie equivalent met:

$$d \rightarrow u^+ e^- \bar{\nu}_e. \quad (7.2)$$

Deze structuur van de zwakke wisselwerking is er de reden van dat we vaak de quarks in groepjes van twee bij elkaar schrijven als:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Elk van de groepjes wordt een familie genoemd.¹

Op het eerste gezicht lijken alleen overgangen binnen één familie toegestaan, dus $u \rightarrow dW^+$ en $d \rightarrow uW^-$. Maar we bedenken ons dat we hebben gezien dat K-mesonen in twee of drie pionen kunnen vervallen. Een K-meson bevat een s of \bar{s} quark, terwijl pionen alleen u , d , \bar{u} en \bar{d} bevatten. Kennelijk moet er in dit zwakke verval dus een $s \rightarrow dX$ verval of een $s \rightarrow uX$ verval zitten. Als we de verschillende vervallen in detail observeren dan blijkt dat het verval $s \rightarrow uW^-$

¹De bijbehorende lepton doublets horen ook bij de familie.

inderdaad voorkomt, maar dat het verval $s \rightarrow d X$ voor geen enkele eindtoestand X wordt gezien. Dit laatste staat bekend als het niet voorkomen van “flavour changing neutral currents” in het Standaard Model. Quark-smaak veranderende neutrale stromen zijn reacties waarbij een quark verandert in een andersoortig quark terwijl er alleen een elektrisch neutraal deeltje wordt uitgewisseld. De reactie $c \rightarrow u Z^0$ zou daar een voorbeeld van zijn. Dergelijke reacties zijn echter nog nooit gezien, terwijl er wel met zeer gevoelige experimenten naar is gezocht.

In de geladen stromen, de uitwisseling van de elektrisch geladen W -bosonen, moet de smaak (soort) van het quark altijd veranderen, maar kennelijk kan in die reactie ook nog van familie worden gewisseld. Er is geen andere wisselwerking die dit vermogen heeft.

De manier om dit te beschrijven is geopperd door Nicola Cabibbo [45]. Hij poneerde dat de quarks u , d en s (de toen bekende quarks) eigentoestanden zijn van massa, of anders gezegd van de energie operator (in rust is de massa van een deeltje equivalent aan zijn energie), maar dat de zwakke wisselwerking andere eigentoestanden heeft u' , d' en s' . De toestanden kunnen door lineaire combinatie in elkaar worden uitgedrukt:

$$\begin{aligned} |d'\rangle &= \cos\theta_c |d\rangle + \sin\theta_c |s\rangle, \\ |s'\rangle &= -\sin\theta_c |d\rangle + \cos\theta_c |s\rangle. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Hierbij zijn d en s de massa eigentoestanden en d' en s' de zwakke eigentoestanden. Uit het verval van kaonen is gemeten dat

$$\sin\theta_c = 0.220 \pm 0.003. \quad (7.5)$$

De invoering van de Cabibbohoek θ_c is te zien als een draaiing in het vlak dat wordt opgespannen door de toestanden van de d en s quarks. In vector notatie kunnen we dit ook schrijven als:

$$\begin{pmatrix} |d'\rangle \\ |s'\rangle \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix}, \quad (7.6)$$

waarbij \mathbf{R} de rotatie matrix is. De overgangswaarschijnlijkheid voor de zwakke wisselwerking kunnen we ook in vectornotatie brengen. Als we de geroteerde toestanden zo hebben gekozen dat de overgang van $|d'\rangle$ naar $|u\rangle$ wel mogelijk is, maar de overgang van $|s'\rangle$ naar $|u\rangle$ niet, dan zien we dat voor het proces:

$$d \rightarrow uW^- \quad (7.7)$$

de overgangswaarschijnlijkheid evenredig wordt met:

$$\langle u|W|d'\rangle = \cos\theta_c \langle u|W|d\rangle + \sin\theta_c \langle u|W|s\rangle = \cos\theta_c \langle u|W|d\rangle, \quad (7.8)$$

waarin $\langle u|$ de toestand van het uitgaande u quark is en W de operator die een d quark in een u quark overvoert.² Het proces

$$s \rightarrow uW^- \quad (7.9)$$

is dan evenredig met:

$$\langle u|W|d' \rangle = \cos \theta_c \langle u|W|d \rangle + \sin \theta_c \langle u|W|s \rangle = \sin \theta_c \langle u|W|s \rangle, \quad (7.10)$$

We vatten de toestanden $|d\rangle$ and $|s\rangle$ als vector op zoals in formule (7.6) en we vatten de toestanden $\langle u|$ en $\langle c|$ op als corresponderende vector. Deze corresponderende vector voor uitgaande deeltjes schrijven we als:

$$(\langle u| \langle c|). \quad (7.11)$$

De hele uitdrukking die zowel proces (7.7) als proces (7.9) omvat kan dan als vector uitdrukking worden geschreven als:

$$(\langle u| \langle c|)W \begin{pmatrix} |d'\rangle \\ |s'\rangle \end{pmatrix} = (\langle u| \langle c|)W \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix}. \quad (7.12)$$

Uit symmetrie overwegingen zouden we nu kunnen verwachten dat in het vlak van de u en c quarks een soortgelijke draaiing kan worden uitgevoerd, en dat is correct. In het algemene geval is de overgangswaarschijnlijkheid van een willekeurige combinatie van d en s quarks naar een willekeurige combinatie van u en c quarks gegeven door:

$$(\langle u| \langle c|) \mathbf{R}_2^T W \mathbf{R}_1 \begin{pmatrix} |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix}, \quad (7.13)$$

waarbij de rotatiematrix \mathbf{R}_1 de rotatie in de $\begin{pmatrix} |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix}$ ruimte geeft en \mathbf{R}_2 de rotatiematrix in het $\begin{pmatrix} |u\rangle \\ |c\rangle \end{pmatrix}$ vlak is. De rotatiematrix \mathbf{R}_2 is getransponeerd (\mathbf{R}_2^T) omdat die op de eindtoestand van het u en c quark moet werken en niet op de begintoestand. Voor deze rotatiematrices geldt dat de getransponeerde gelijk is aan de inverse $\mathbf{R}_2^T = \mathbf{R}_2^{-1}$ en die is weer gelijk aan het draaien over de hoek

²De operator W werkt op de zwakke doublet toestanden, bijvoorbeeld op $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$. De W^+ operator kan worden opgevat als de matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in de $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ doublet ruimte. De W^- operator is dan de hermitisch geconjugeerde $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. De zwakke doublet ruimte $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ moet niet worden verward met de ruimte waarop de rotatiematrix R werkt, $\begin{pmatrix} |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix}$.

met tegengesteld teken. We kunnen nu de volgorde van de \mathbf{R}_2^T matrix en de W operator omwisselen en dan krijgen we:

$$(\langle u | \langle c |) W \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1 \begin{pmatrix} |d\rangle \\ |s\rangle \end{pmatrix}. \quad (7.14)$$

De combinatie $\mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1$ is eerst een rotatie over de rotatiehoek θ_1 die hoort bij \mathbf{R}_1 en dan over de hoek $-\theta_2$, waarbij θ_2 de rotatiehoek is die hoort bij \mathbf{R}_2 . Het netto resultaat is dat er éénmaal geroteerd wordt over een hoek $\theta_3 = \theta_1 - \theta_2$. We zien zelfs dat we alleen de hoek θ_3 kunnen meten en niet de afzonderlijke hoeken θ_1 en θ_2 . We kunnen nog kiezen of we rotatie over de hoek θ_3 toepassen op de ruimte van de d en s quarks of de rotatie over $-\theta_3$ op de ruimte van de u en c quarks. Conventioneel kiezen we voor een rotatie in de (d, s) ruimte.

We hebben de rotatiematrix volgens Cabibbo geparametriseerd als:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix}. \quad (7.15)$$

Hier komt maar één hoek in voor. De rotatie is in een complexe toestandsruimte.

Laten we de meest algemene lineaire transformatie (dus een die met een matrix kan worden gedaan) beschouwen in een complexe twee-dimensionale ruimte. De meest algemene complexe 2×2 matrix heeft acht vrij te kiezen reële getallen, bijvoorbeeld vier absolute waarden en vier complexe fasen. We willen in ieder geval dat er behoud van waarschijnlijkheid is onder de transformatie. Eén s quark mag dus wel één d quark worden, maar met twee s quarks. Dit impliceert dat de transformatie unitair moet zijn, dat wil zeggen dat moet gelden:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^\dagger = 1. \quad (7.16)$$

Dit geeft vier randvoorwaarden, zodat nu vier van de acht getallen (vrijheidsgraden) in de matrix vastliggen.

Zoals we al in hoofdstuk 4 hebben gezien is een globale complexe fase voor de toestanden van alle deeltjes niet observabel. In het geval van de 2×2 matrix hebben we 4 deeltjesvelden in het geding. Een complexe fasedraaiing van een veld ten opzichte van een ander veld verandert de situatie wel echt. Bij vier velden kunnen we dus 3 relatieve fasedraaiingen doorvoeren. Als we dat éénmalig globaal doen dan is dat een soort beginvoorwaarde die in de rest van wat we zien geen rol meer speelt. Op deze manier kunnen we nog drie vrijheidsgraden in onze 2×2 matrix vastleggen en blijft er nog maar precies één vrij te kiezen getal over. Het is dus mogelijk de rotatie matrix met één hoek te karakteriseren zoals in formule 7.8.

Nu weten we dat we behalve u, d, c en s quarks ook nog t en b quarks hebben. We moeten het formalisme dus uitbreiden naar drie dimensies. We kiezen er weer voor om de eigentoestanden d' , s' en b' van de zwakke wisselwerking te draaien naar de massa eigentoestanden d, s en b. In dit geval gaat dat met een 3×3 matrix die voor het eerst is ingevoerd door Kobayashi en Maskawa en die de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa matrix of kortweg CKM-matrix wordt genoemd

$$\begin{pmatrix} |d'\rangle \\ |s'\rangle \\ |b'\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |d\rangle \\ |s\rangle \\ |b\rangle \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

In het geval van een 3×3 matrix zijn er 18 getallen vrij te kiezen. Willen we waarschijnlijkheid behouden dan worden er door de unitariteitseis 9 getallen vastgelegd. Vervolgens hebben we 6 quarkvelden, waarbij we 5 relatieve complexe fasen kunnen gebruiken om nog eens vijf getallen in de CKM-matrix vast te leggen. Er blijven dus $18-9-5=4$ vrij te kiezen getallen over in de CKM-matrix. Deze blijkt te parametriseren als rotatie om drie verschillende hoeken θ_{12} , θ_{13} en θ_{23} die we kunnen zien als rotaties over de desbetreffende hoek om de as die loodrecht staat op de twee indices die zijn gegeven, dus θ_{12} is de rotatie om de derde as, die om de as van het b quark dus. In tegenstelling tot het twee dimensionale geval blijkt er nu ook precies één irreducibele complexe fase te zijn. We kunnen vrij willekeurig kiezen waar die fase opduikt (er zijn wel relaties tussen de complexe fasen van de verschillende CKM-matrix elementen die worden geforceerd door het feit dat het een unitaire matrix moet zijn met determinant 1.) Als we de afkortingen

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \cos \theta_{ij} \\ s_{ij} &= \sin \theta_{ij} \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (7.18)$$

gebruiken kunnen we de CKM matrix volgens de standaard conventie schrijven als:

$$\mathbf{V}_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

Hierin is δ de irreducibele complexe fase.³ De absolute waarden van de CKM-matrix elementen zijn op dit moment bekend als:

$$\mathbf{V}_{\text{CKM}}^{\text{abs.}} = \begin{pmatrix} 0.9741 - 0.9756 & 0.219 - 0.226 & 0.0025 - 0.0048 \\ 0.219 - 0.226 & 0.9732 - 0.9748 & 0.038 - 0.044 \\ 0.004 - 0.014 & 0.037 - 0.044 & 0.9990 - 0.9993 \end{pmatrix}. \quad (7.20)$$

³In deze parametrisering wordt δ ook wel δ_{13} genoemd, naar de keuze van de plaats waar die dominant opduikt.

De complexe fase in de CKM-matrix is nu juist wat CP-schending veroorzaakt in het Standaard Model. Het moet dus mogelijk zijn om iets over de complexe fase te zeggen door CP-schending te bestuderen. Maar allereerst zullen we laten zien hoe een complexe fase tot CP-schending leidt.

Complexe overgangsamplitudes en CP-schending

Hoe de tijdevolutie verloopt in het K^0 systeem hebben we al laten zien in hoofdstuk 6 op blz. 75 en verder. De massa eigentoestanden $|K_L\rangle$ en $|K_S\rangle$ worden in termen van de toestanden $|K^0\rangle$ en $|\bar{K}^0\rangle$ gegeven door:

$$\begin{aligned} |K_L\rangle &= p|K^0\rangle - q|\bar{K}^0\rangle \\ |K_S\rangle &= p|K^0\rangle + q|\bar{K}^0\rangle \end{aligned} \quad (7.21)$$

Omdat $|K_L\rangle$ en $|K_S\rangle$ massa eigentoestanden zijn, ze propageren immers vrij door de ruimte, worden de constanten p en q bepaald door de eigenwaarde vergelijking:

$$\begin{pmatrix} M_{11} - i\Gamma_{11}/2 & M_{12} - i\Gamma_{12}/2 \\ M_{21} - i\Gamma_{21}/2 & M_{22} - i\Gamma_{22}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \quad (7.22)$$

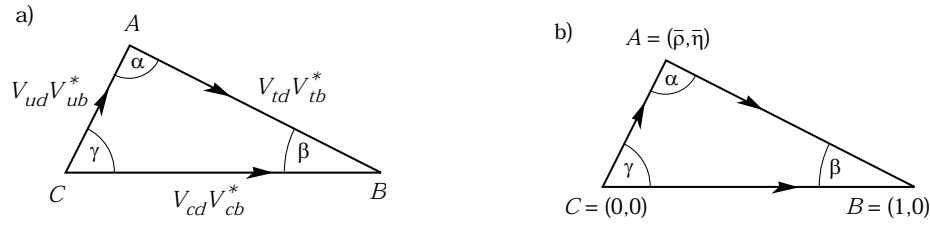
Hierbij is Γ_{12} de vervalsbreedte van de toestand $|K^0\rangle$ in $|\bar{K}^0\rangle$, etc. Wegens het behoud van de gecombineerde CPT transformatie, wat we zullen aannemen, moet gelden $M_{11} = M_{22}$ en $\Gamma_{11} = \Gamma_{22}$. Met enig rekenwerk is dan af te leiden dat

$$\frac{p}{q} = \sqrt{\frac{M_{12} - i\Gamma_{12}/2}{M_{21} - i\Gamma_{21}/2}}. \quad (7.23)$$

Uit berekeningen blijkt dat de termen Γ_{12} en Γ_{21} in absolute waarde klein zijn ten opzichte van M_{12} en M_{21} . Verder kunnen M_{12} en M_{21} worden berekend uit de menging diagrammen zoals in Fig. 6.2. Als intermediaire quark propagator blijkt hier het c quark de grootste bijdrage te geven aan het matricelement. Het antwoord is dus in redelijke benadering:

$$\frac{p}{q} \propto \sqrt{\frac{M_{12}}{M_{21}}} \propto \frac{V_{cd}^* V_{cs}}{V_{cd} V_{cs}^*}. \quad (7.24)$$

(waarin \propto evenredig aan betekent.) De vertices in Fig. 6.2 geven elk een factor evenredig aan V_{cd} of V_{cs} . Afhankelijk van de richting voor de W propagatoren die we lezen is de ene een W^- en de andere een W^+ , of omgekeerd. Het teken van de W bepaalt of de CKM elementen complex moeten worden geconjugerd of niet,



Figuur 7.1: (a) Unitariteitsdriehoek van de CKM matrix. (b) Unitariteitsdriehoek van de CKM matrix met de zijden genormeerd op $|V_{cd}V_{cd}^*|$.

de W^+ en W^- zijn immers anti-deeltjes van elkaar. De ratio tussen p en q wijkt alleen af van 1 als geldt:

$$V_{cd}^*V_{cs} \neq V_{cd}V_{cs}^*. \quad (7.25)$$

Dus als alle elementen van de CKM matrix reëel zouden zijn, of dezelfde complexe fase zouden hebben zou er geen CP-schending zijn. Dat gebeurt alleen als de complexe fase van V_{cd} en V_{cs} verschillend zijn. Dit is het geval door de verschillende coëfficiënten die voor de factor $e^{i\delta}$ staan in de twee CKM-matrix elementen. In het geval van K-oscillatie wordt het effect van CP-schending vooral onderdrukt door de factor $\sin\theta_{13} \approx 0.004$ die voor de $e^{i\delta}$ staat. De waarde van δ is:

$$\delta = 59^\circ \pm 13^\circ \quad (7.26)$$

en is dus helemaal niet zo klein.

De unitariteitsdriehoek

Behalve een directe meting van de complexe fase δ door het meten van CP-schending is deze complexe fase ook op een andere manier te meten. De CKM-matrix is een unitaire matrix. Dat betekent dat we bepaalde unitariteitsvoorwaarden op kunnen leggen. Deze zijn allemaal af te leiden uit het feit dat de complex geconjugeerde en getransponeerde matrix de inverse moet zijn. Zoals al eerder genoemd geeft dit negen mogelijke vergelijkingen. De interessantste zijn die die met de waarde 0 in het product corresponderen. Daarvan is de vergelijking met het meest uitgesproken gedrag voor de complexe fase:

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0. \quad (7.27)$$

In het complexe vlak kunnen we dat tekenen als in Fig. 7.1(a). De *lengte* van de zijden is te meten door de *absolute waarden* van de betreffende combinaties van CKM-matrix elementen te meten. Deze zijn observabel. We kunnen deze driehoek

zo normeren dat de onderste zijde lengte 1 krijgt. De andere zijden worden dan verhoudingen van combinaties van CKM-matrix elementen. We kunnen er ook door een complexe fase draaiing voor zorgen dat de onderste zijde helemaal op de x -as ligt, dus de reële as. Dat doen we door $V_{cd}V_{cb}^*$ reëel te kiezen. Deze verhoudingen zijn in slimme experimenten te meten zodat de meeste systematische meetfouten in de ratio tegen elkaar wegvallen. De genormeerde driehoek is te zien in Fig. 7.1(b). In deze figuur zijn ook de waarden $\bar{\rho}$ en $\bar{\eta}$ gedefinieerd. De hoeken β en γ zijn dan gedefinieerd door

$$V_{td} = |V_{td}|e^{-i\beta}, V_{ub} = |V_{ub}|e^{-i\gamma}, \quad (7.28)$$

zodat ook onmiddellijk duidelijk is dat

$$\gamma = \delta. \quad (7.29)$$

De meting van ϵ voor de CP-schending in het neutrale K-meson systeem geeft informatie over de complexe fase van V_{cd} , omdat het diagonale CKM matrix element V_{cs} een dominante reële bijdrage blijkt te hebben die bijna 1 is (zie formule 7.24.) In de normeerde unitariteitsdriehoek met onderste zijde langs de reële as en lengte 1 geeft dit vooral een beperking op de normering van de andere zijden van de unitariteitsdriehoek.

Hoe de verschillende waarden van de unitariteitsdriehoek worden gemeten wordt in het volgende hoofdstuk uit de doeken gedaan. Deze metingen worden vooral met b quarks gedaan.

Opgaven

- 7.1: Teken het equivalent van het Feynmandiagram in Fig. 6.2 voor neutrale B mesonen (die bestaan uit $\bar{b}d$ en voor het anti-B meson $b\bar{d}$.)
- 7.2: Ga door gebruik te maken van het Feynmandiagram van Fig. 6.2 na aan welk product van CKM-matrix elementen uitgedrukt in de menghoeken θ_{ij} de neutrale kaon oscillatie overgangswaarschijnlijkheid proportioneel is. (Zie ook de afleiding van formule 7.24.)
- 7.3: Schat de grootte van $V_{cd}^*V_{cs} - V_{cd}V_{cs}^*$ af met behulp van de gegevens in formules 9.6 en 7.26.
- 7.4: Zijn er nog andere systemen dan die van neutrale kaonen te bedenken waarin CP schending waar te nemen zou moeten zijn ? Zo ja, geef een voorbeeld.
- 7.5: Hoeveel complexe fases voor quark menging zouden er zijn als er vier families van fermionen zouden zijn ?

Hoofdstuk 8

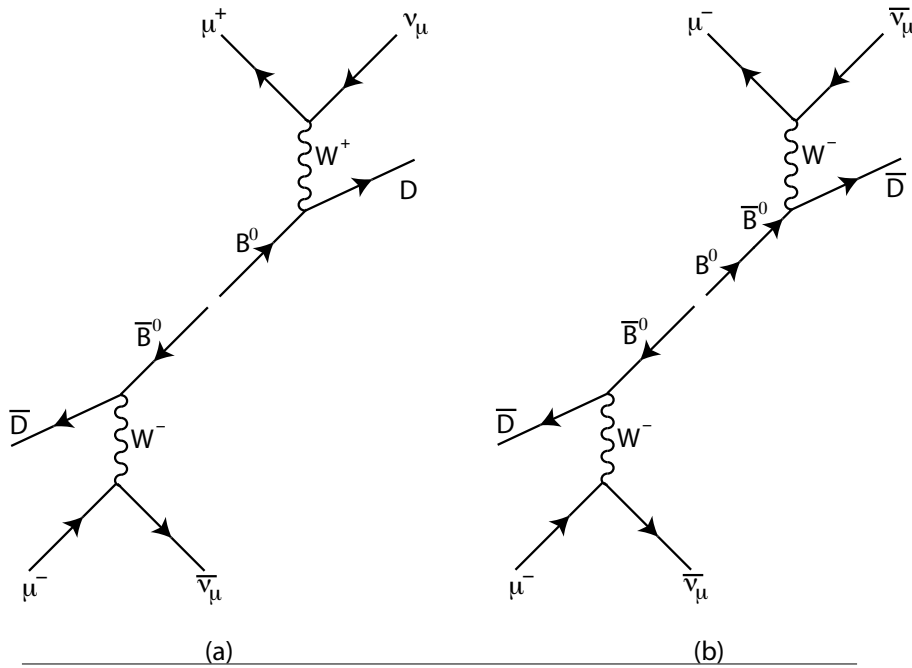
De derde generatie: CP schending met b quarks

De enige meting van CP-schending is voor lange tijd die in het neutrale Kaon systeem geweest. Om de hypothese dat CP-schending in het Standaard Model wordt verklaard door de complexe fase in de CKM matrix, is het van belang om CP schending ook in andere onafhankelijk processen te zien. In de praktijk blijken effecten van CP schending het grootst in processen met b quarks. Eén van de processen die direct iets zegt over de unitariteitsdriehoek is de menging van neutrale B mesonen. In het geval van B mesonen zijn er twee verschillende neutrale B mesonen in een niet aangeslagen toestand die van belang zijn:¹

$$\begin{aligned} B_d^0 &= \bar{b}d, & \bar{B}_d^0 &= b\bar{d}, \\ B_s^0 &= \bar{b}s, & \bar{B}_s^0 &= b\bar{s}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Net als in het neutrale K systeem kunnen ook deze neutrale B mesonen in hun bijbehorende anti-deeltjes oscilleren. Oscillaties van neutrale B mesonen naar hun anti-deeltjes zijn voor het eerst gezien in het UA1 experiment [52] en in het ARGUS experiment [53] in 1987. De hierboven genoemde neutrale B mesonen kunnen semi-leptonisch vervallen. Het verval vindt plaats doordat het b-quark in een c-quark wordt getransformeerd onder uitzending van een W boson. Het W boson kan vervolgens in een geladen lepton en een neutrino vervallen. Met name het verval in een muon of elektron is interessant, omdat die deeltjes goed kunnen worden geïdentificeerd in een detector. Dit proces is schematisch weergegeven in Fig. 8.1(a). De UA1 en ARGUS experimenten observeerden onafhankelijk van elkaar dat in de productie van $b\bar{b}$ paren gevallen te zien waren met twee muonen in de eindtoestand die van het verval van een b quark afkomstig waren, maar die

¹Natuurlijk is er ook nog een meson dat bestaat uit $\bar{b}b$, maar dat is voor de discussie hier niet relevant.



Figuur 8.1: Schematische voorstelling van de productie van een B en een \bar{B} meson en het daaropvolgende semileptonische verval. In (a) zonder menging en in (b) met een voorbeeld van menging, waarbij een B meson overgaat in een \bar{B} . Zonder menging in (a) zijn er een μ^+ en μ^- in de eindtoestand. In (b) zorgt de oscillatie van de B naar de \bar{B} ervoor dat er twee μ^- deeltjes in de eindtoestand zijn.

dezelfde elektrische lading hadden. Dit ogenschijnlijke geval van schending van ladingssymmetrie is te verklaren doordat een van de b quarks in zijn anti-deeltje oscilleert doordat het bijbehorende neutrale B meson in zijn anti-deeltje oscilleert waardoor er soms twee b quarks of twee \bar{b} quarks in de eindtoestand zitten. Dit is geïllustreerd in Fig. 8.1(b).

Om de totale hoeveelheid B mesonen te meten die overgaan in hun anti-deeltje (of vice versa) kan het aantal gevallen met gelijk teken voor de muonen in de eindtoestand worden vergeleken met het aantal gevallen met ongelijk teken. Er moet dan nog wel rekening worden gehouden met het feit dat zowel de B als de \bar{B} in hun anti-deeltje kunnen overgaan in hetzelfde geval. De waarschijnlijkheid voor oscillatie van een B naar een \bar{B} (die we aannemen hetzelfde te zijn als de waarschijnlijkheid dat een \bar{B} naar een B oscilleert) is gedefinieerd als:

$$\chi = \frac{Br(b \rightarrow \bar{B}^0 \rightarrow B^0 \rightarrow \ell^+ X)}{Br(b \rightarrow \ell^\pm X)}. \quad (8.2)$$

De waarde van χ die gemeten wordt hangt af van de oscillatiefrequentie, maar

ook van de levensduur van het betreffende B meson. De oscillatiefrequentie wordt net als in het neutrale K meson systeem bepaald door het massaverschil Δm van de twee massa-eigentoestanden die te maken zijn van het mengsel van meson en anti-meson. We kunnen dan χ uitdrukken in dat massaverschil en de levensduur als:

$$\chi = \frac{x^2 + y^2}{2(x^2 + 1)}, \quad (8.3)$$

waarbij y proportioneel aan het verschil in vervalsbreedte tussen de massa-eigentoestanden is:

$$y = \frac{\Delta\Gamma}{2\Gamma} \quad (8.4)$$

en x wordt gegeven door:

$$x = \frac{\Delta m}{\Gamma} = \Delta m \tau, \quad (8.5)$$

met $\tau = 1/\Gamma$ de levensduur van het meson (Γ is de vervalsbreedte) en Δm het massaverschil tussen de twee massa-eigentoestanden. De parameter χ is dus verschillend voor de B_d^0 en de B_s^0 , die we dan ook apart noteren als χ_d en χ_s .

Uit metingen blijkt dat [51]:

$$\chi_d = 0.186 \pm 0.004 \quad (8.6)$$

en de meting van χ_s is niet van exact een half te onderscheiden. Omdat de levensduur van B_d^0 en B_s^0 mesonen maar weining verschillend is, volgt hier meteen uit dat de oscillatie voor de B_d^0 veel trager gaat dan voor de B_s^0 .

Het massaverschil tussen de langlevende B_{qL}^0 en kortlevende B_{qS}^0 ($x = d, s$) wordt bepaald door de overgangen van Feynmandiagrammen analoog aan 6.2, waarbij de s quarks vervangen zijn door b quarks en de belangrijkste bijdrage aan de overgang komt van de intermediaire toestand met een t quark. Het massaverschil wordt voornamelijk bepaald door:

$$\Delta m \propto |V_{tb}^* V_{tq}|. \quad (8.7)$$

Als op het tijdstip $t = 0$ een B_q^0 wordt gemaakt, dan is de waarschijnlijkheid dat op tijd t er nog een B_q^0 is gelijk aan:

$$P(B_q^0, t) = \Gamma_q e^{-\Gamma_q t} (1 + \cos(\Delta m_q t)) / 2 \quad (8.8)$$

en de waarschijnlijkheid dat de B_q^0 naar een \bar{B}_q^0 is geoscilleerd is:

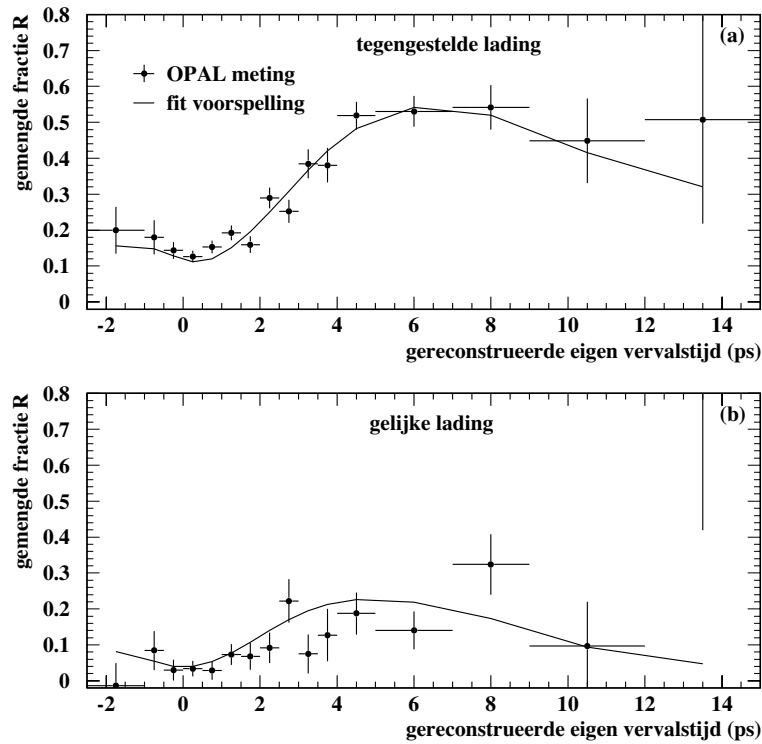
$$P(\bar{B}_q^0, t) = \Gamma_q e^{-\Gamma_q t} (1 - \cos(\Delta m_q t)) / 2. \quad (8.9)$$

Door in een experiment waarbij een Z-boson resonant wordt gevormd in een e^+e^- botsing en vervolgens vervalft in een $b\bar{b}$ paar aan de ene kant te kijken of

er een B meson of een \bar{B} meson vervalt (we kunnen dat aan de ladingen van de vervalsproducten zien) en vervolgens aan de andere kant te kijken of we daar een B of \bar{B} zien als functie van de vervalslengte, en dus de levensduur, kunnen we de oscillatieterm meten.

Als voorbeeld van een meting van B_d oscillatie bij LEP wordt hier een meting van OPAL besproken. Voor de andere LEP experimenten gaan de metingen analoog, hoewel details van de analyses verschillen. De meting die we hier bespreken gebeurt door een $B_d^0 \rightarrow D^{*+}\ell^-\bar{\nu}$ verval te reconstrueren. Het lepton ℓ kan hier zowel een elektron als een muon zijn, die beiden goed in de detector kunnen worden geïdentificeerd. Het teken van het lepton bepaalt of we hier met een B_d^0 verval of een \bar{B}_d^0 verval te maken hebben. Omdat we willen weten of er een $B_d^0 \leftrightarrow \bar{B}_d^0$ overgang is geweest moeten we ook weten of bij productie een b of een \bar{b} quark was geproduceerd in de richting waarin we kijken. Dat laatste is van cruciaal belang. Bij LEP worden Z bosonen geproduceerd die vervallen in $Z \rightarrow b\bar{b}$. De Z bosonen worden in rust geproduceerd, dus het b en \bar{b} quark zullen in tegengestelde richting in de detector gaan. Om te weten of naar de kant waarin het $B_d^0 \rightarrow D^{*+}\ell^-\bar{\nu}$ verval wordt gezien een b of \bar{b} quark ging kijken we in de andere richting, waar het anti-quark dus naar toe ging. De halfruimte tegenover het $B_d^0 \rightarrow D^{*+}\ell^-\bar{\nu}$ verval wordt “de andere kant” genoemd. Vaststellen of aan de andere kant een b of \bar{b} was wordt gedaan aan de hand van de meting van de elektrische lading.

In Fig. 8.2 is de oscillatie in de bovenste figuur goed te zien. In deze meting wordt het teken van het b quark aan de *andere kant* van de detector gemeten op verschillende manieren. De eerste manier is door meting van de lading van de sporen aan de andere kant waarbij de lading per spoor wordt gewogen met de impuls van het spoor. Dit wordt “jet lading” (jet charge) genoemd. De tweede manier is door een secundaire vertex aan de andere kant te reconstrueren. Hadronen met b quarks vervallen gemiddeld na zo’n 1.5 ps, lang genoeg om enkele millimeters in de detector af te leggen. Het verval kan dan worden herkend omdat de sporen uit een onderscheidbaar ander punt komen dan de andere sporen in de gebeurtenis. De totale lading in de secundaire vertex is natuurlijk in principe een goede meting van de lading van het hadron dat verviel. In het derde geval wordt het semileptonisch verval gebruikt, zoals dat ook aan de kant van het signaal het geval is. In dat geval vertelt de lading van het lepton in principe welke lading het vervallen b quark had. Het vermelden van de woorden *in principe* geeft al aan dat in de praktijk de situatie niet zo eenvoudig ligt en dat geen van de drie methodes volledig efficiënt en achtergrond-vrij is. In de praktijk wordt de informatie van de drie methoden dan ook gecombineerd en leveren ze gezamenlijk een betrouwbaarheid van ongeveer 70%. Dat moet worden vergeleken met 50% als we gewoon zouden gokken. Dat is behelpen dus, maar is genoeg voor een



Figuur 8.2: *Fractie van het aantal gevallen waarin menging is geconstateerd bij waarneming van een B_d meson als functie van de vervalstijd van de B_d . In de bovenste figuur staan signaal gevallen uit. In de onderste figuur dezelfde verdeling voor achtergrond. Figuur overgenomen uit [47].*

betrouwbare meting als we maar voor dit effect corrigeren. Een hoop moeite gaat dan ook zitten in het nauwkeurig vaststellen van de betrouwbaarheid, iets waar we hier niet verder op in gaan.

Hebben we eenmaal de lading van het quark aan de andere kant vastgesteld, dan kunnen we aan de hand van de lading van het lepton de $B_d^0 \rightarrow D^{*+} \ell^- \bar{\nu}$ reconstructie zeggen of er menging is opgetreden of niet. Overigens moeten we er ook rekening mee houden dat we de originele smaak weer terug kunnen krijgen na twee keer mengen, etc. Ook daar wordt voor gecorrigeerd.

Het resultaat voor de fractie van het aantal gebeurtenissen waarin menging optrad ten opzichte van alle geïdentificeerde gebeurtenissen als functie van de eigen vervalstijd van het B meson is te zien in Fig. 8.2. In de bovenste grafiek zijn de signaalgebeurtenissen weergegeven, waarbij de lading van het lepton en het reconstrueerde D meson tegengesteld zijn. Dit wijst op een correcte reconstructie van een B_d^0 meson. In de onderste grafiek wordt dezelfde verdeling gegeven voor

het geval dat de lading van het lepton en D meson hetzelfde zijn. In dat geval komen die niet beiden van het verval van hetzelfde B_d^0 meson en hebben we te maken met een achtergrond. We zien dat we ook in de achtergrond nog een klein effect van menging wordt gemeten, omdat deze achtergrond ook uit B mesonen bestaat en bijvoorbeeld een neutraal B meson aan de *andere kant* gemengd kan zijn en zo de meting van de begintoestand kan beïnvloeden, ook als aan de andere kant helemaal geen neutraal B meson is gevormd en er dus ook niets mengt.

Tezamen met de andere LEP experimenten en het SLD experiment bij de SLC versneller op SLAC wordt uit dergelijke metingen als waarde voor het massaverschil tussen de langlevende en kortlevende B_d mesonen gevonden [51]:

$$\Delta m_d = 0.502 \pm 0.007 \text{ ps}^{-1}. \quad (8.10)$$

Hieruit volgt:

$$|V_{tb}^* V_{td}| = 0.0083 \pm 0.0016. \quad (8.11)$$

Dit is juist de lengte van de zijde AB in de unitariteitsdriehoek van Fig. 7.1.

Een dergelijke meting kan in principe ook worden gedaan voor het B_s^0 meson. Alleen blijkt de oscillatie hier zo snel te zijn dat de experimenten niet genoeg oplossend vermogen hebben in de reconstructie van de vervalstijd. Er kan hier dus alleen een onderlimiet worden gegeven:

$$\Delta m_s > 14.4 \text{ ps}^{-1} \quad \text{voor 95\% waarschijnlijkheid.} \quad (8.12)$$

Die meting resulteert in een bovenlimiet op de lengte van V_{td} :

$$|V_{td}| < 0.011 \quad \text{voor 95\% waarschijnlijkheid.} \quad (8.13)$$

Een andere belangrijke meting die we kunnen doen in een systeem met neutrale B mesonen is die van de hoek β in de unitariteitsdriehoek. Beschouwen we het verval $B_d^0 \rightarrow J/\Psi K_S^0$, dan is de eindtoestand een CP eigentoestand. Deze vervallen zijn recentelijk met hoge statistiek bestudeerd in de BaBar en Belle experimenten. Beiden zijn experimenten bij een asymmetrische e^+e^- versneller, waarbij ervoor wordt gezorgd dat het zwaartepunt van de botsende e^+ en e^- ten opzichte van de detector beweegt, maar dat de zwaartepuntsenergie van het systeem precies genoeg is om een $B_d^0 \bar{B}_d^0$ toestand in rust in het zwaartepuntsysteem te maken. De B_d^0 en \bar{B}_d^0 zullen nu met dezelfde snelheid in de detector bewegen. Het feit dat ze bewegen maakt dat we de vervalstijd kunnen vaststellen (als de vervalsafstand.) Er treedt hier overigens weer een van die quantumcuriositeiten op. De $B_d^0 \bar{B}_d^0$ toestand is verstrengeld. Dat betekent dat de twee mesonen niet onafhankelijk kunnen mengen. Pas als één van de twee is vervallen kan de andere mengen. Dat betekent dat niet de vervalstijd van een individueel B meson ertoe

doet, maar het tijdsverschil van de twee vervallen. Het Standaard Model, met behulp van de CKM matrix voorspelt nu dat de fractie van gevallen die gemengd zijn, f_+ , en ongemengd zijn, f_- , worden gegeven als functie van het tijdsverschil tussen de vervallen, δt , door:

$$f_{\pm}(\Delta t) = \frac{e^{-|\Delta t|/\tau_{B_d^0}}}{4\tau_{B_d^0}} (1 \pm \sin(2\beta) \sin(\Delta m_d \Delta t)). \quad (8.14)$$

Uit combinaties van deze fracties kunnen we makkelijk construeren:

$$\sin(2\beta) \sin(\Delta m_d \Delta t) = \frac{f_+(\Delta t) - f_-(\Delta t)}{f_+(\Delta t) + f_-(\Delta t)}. \quad (8.15)$$

Ook hier zijn weer allerlei experimentele problemen te overwinnen waar we niet op in zullen gaan. Het huidige resultaat is [51]:

$$\sin(2\beta) = 0.736 \pm 0.049. \quad (8.16)$$

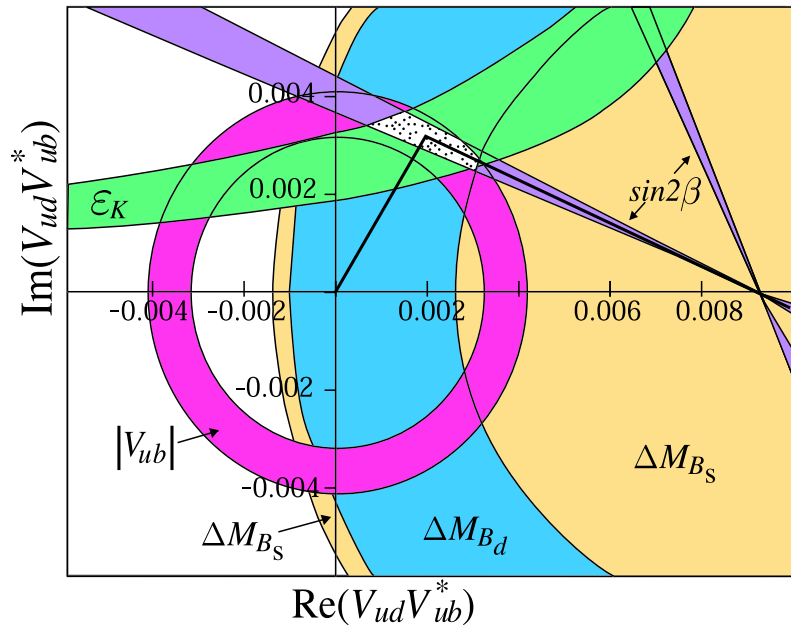
Dit vertaalt in twee mogelijke hoeken voor β namelijk ongeveer 24° of ongeveer 66° .

Het CKM matrix element V_{ub} kan worden gemeten door vervallen van B mesonen in deeltjes met charm te onderscheiden van vervallen waarin uitsluitend deeltjes opgebouwd uit u en d quarks voorkomen. Ook kan V_{ub} worden bepaald uit exclusieve vervallen zoals $B \rightarrow \pi \ell \nu_\ell$ en $B \rightarrow \rho \ell \nu_\ell$, waarbij $\ell = \mu, e$ een meetbaar lepton is en π en ρ mesonen die uit lichte (u,d) quarks bestaan. Uit een combinatie van deze metingen wordt als waarde voor V_{ub} verkregen [51]:

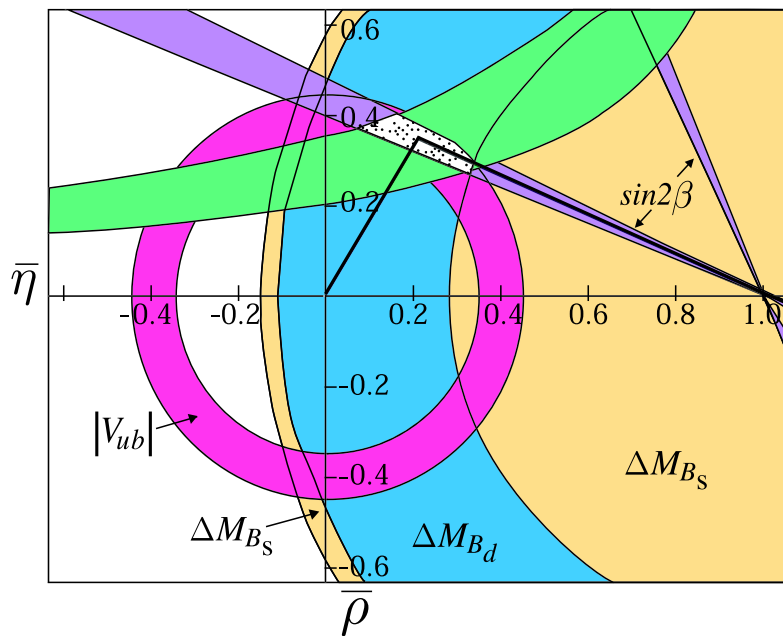
$$|V_{ub}| = (3.67 \pm 0.47) \times 10^{-3}. \quad (8.17)$$

Het gecombineerde resultaat van deze metingen is nu grafisch weer te geven als in Fig. 8.3 In deze figuur is de meting van ϵ in het neutrale K systeem te onderscheiden die een niet-triviale vorm heeft. Dat komt door de keuze om de unitariteitsdriehoek door het inproduct van de laatste twee kolommen van de CKM matrix te laten vormen, waardoor de relatie met b quark metingen doorzichtig wordt, maar die voor metingen met s quarks minder doorzichtig. Makkelijker is de interpretatie van de Δm_d meting te zien die de lengte is van de AB zijde en dus door een cirkel om het punt B kan worden gegeven. De interpretatie van de Δm_s meting is net zo eenvoudig, maar omdat hier alleen een bovenlimiet is gevonden wordt niet een cirkelschil, maar een volle schijf als mogelijkheden gevonden. De meting van de hoek β wordt door de wiggen vanuit punt B gegeven. DE meting van $|V_{ub}|$ geeft de lengte van de zijde AC en dus een cirkelschijf rond het punt C.

In de genormeerde unitariteitsdriehoek ziet het resultaat voor η en ρ er uit als in Fig. 8.4.



Figuur 8.3: *Meting van de unitariteitsdriehoek van de CKM matrix. Figuur uit [51].*



Figuur 8.4: *Meting van de unitariteitsdriehoek van de CKM matrix. Figuur uit [51].*

In de toekomst zullen de CKM matrix elementen nog veel nauwkeuriger worden gemeten door de experimenten LHCb [48] en BTeV [49], die beiden zo rond 2007 een aanvang zullen nemen.

Kwalitatief goed, kwantitatief fout

De CP-schending door de complexe fase van de CKM verklaart kwalitatief en kwantitatief de metingen die we tot nu toe aan CP-schending hebben gedaan. CP-schending was een van de drie voorwaarden van Sacharov [6] om tot een overschot van deeltjes ten opzichte van anti-deeltjes te komen. Kwalitatief is dit dus allemaal in overeenstemming.

We kunnen nu kijken of het ook kwantitatief klopt. Daarvoor beschouwen we het aantal baryonen (protonen), n_b , in het heelal relatief aan het aantal anti-baryonen, $n_{\bar{b}}$, en aan het aantal fotonen, n_γ . Zoals we al gezien hebben in hoofdstuk 4 is het aantal anti-materie deeltjes ten opzichte van het aantal materie deeltjes te verwaarlozen met een ratio van [1]:

$$\frac{n_{\bar{b}}}{n_b} < 10^{-6}. \quad (8.18)$$

Recente metingen van de WMAP satelliet bepaalt ook de verhouding tussen baryonische materie en het aantal fotonen in het heelal:

$$\frac{n_{\bar{b}} + n_b}{n_\gamma} = \frac{n_b}{n_\gamma} = (6.1^{+0.3}_{-0.2}) \times 10^{-10}. \quad (8.19)$$

Deze relatieve abundantie van materie (baryonen) ten opzichte van straling (fotonen) kan worden voorspeld met kosmologische modellen, waarin de interactie tussen deeltjes wordt uitgerekend met het Standaard Model als theorie, en dan met name ook met de CP-schending van de CKM matrix als ingrediënt. Deze berekening is complex en heeft ook een flink aantal aannamen in zich. De uitkomst is dat:

$$\frac{n_b}{n_\gamma} = \mathcal{O}\left(0.01 \times \frac{J}{T^{12}}\right), \quad (8.20)$$

waarbij J de zogenaamde Jarlskog is [50, 51]:

$$J = s_{12}s_{13}s_{23}c_{12}c_{13}^2c_{23}\sin(\delta) = (30 \pm 3) \times 10^{-6} \quad (8.21)$$

en T de temperatuur (in GeV eenheden) van de elektrozwakke faseovergang die wordt gekarakteriseerd door de massa van de W- en Z-bosonen. Voor T nemen we $T \approx 100$ GeV. We krijgen dan voor het relatieve aantal baryonen ten opzichte van fotonen:

$$\frac{n_b}{n_\gamma} \approx 10^{-21}. \quad (8.22)$$

Dit getal is niet erg precies, maar zit er toch ook niet meer dan een factor of 100 tot 1000 naast. Het is dus onmogelijk met deze verklaring in de buurt te komen van de gemeten hoeveelheid baryonen ten opzichte van fotonen in het heelal. Er zijn dus kennelijk aanvullende mechanismen nodig van CP-schending om tot een verklaring te komen van de gemeten baryon asymmetrie. We hebben het tot nu toe alleen over quarks gehad. Leptonen komen ook in drie families voor en wellicht is ook daar CP-schending mogelijk. We zullen dat in het volgende hoofdstuk onderzoeken.

Opgaven

- 8.1: Wat is de kans dat in een geval waarin een B_d en een \bar{B}_d als paar worden geproduceerd, beide mesonen in hun anti-deeltje overgaan voordat ze vervallen ?
- 8.2: Kan in het individuele geval van de vorige vraag experimenteel worden vastgesteld dat er menging is ?
- 8.3: Een spectaculaire meting van de hoek β in de unitairteitsdriehoek staat op naam van het OPAL experiment, die een waarde $\sin(2\beta) < -1$ maten. Waarom is deze meting eigenlijk een probleem ? Hoe kan een goede meting toch een dergelijk resultaat op leveren ?
- 8.4: Waarom levert de meting van $\sin(2\beta)$ in Fig. 8.3 en 8.4 twee mogelijke kegels op ?
- 8.5: Bij welke temperatuur zou de verhouding tussen het aantal baryonen en het aantal fotonen in het heelal wel goed uitkomen in formule 8.20 ?

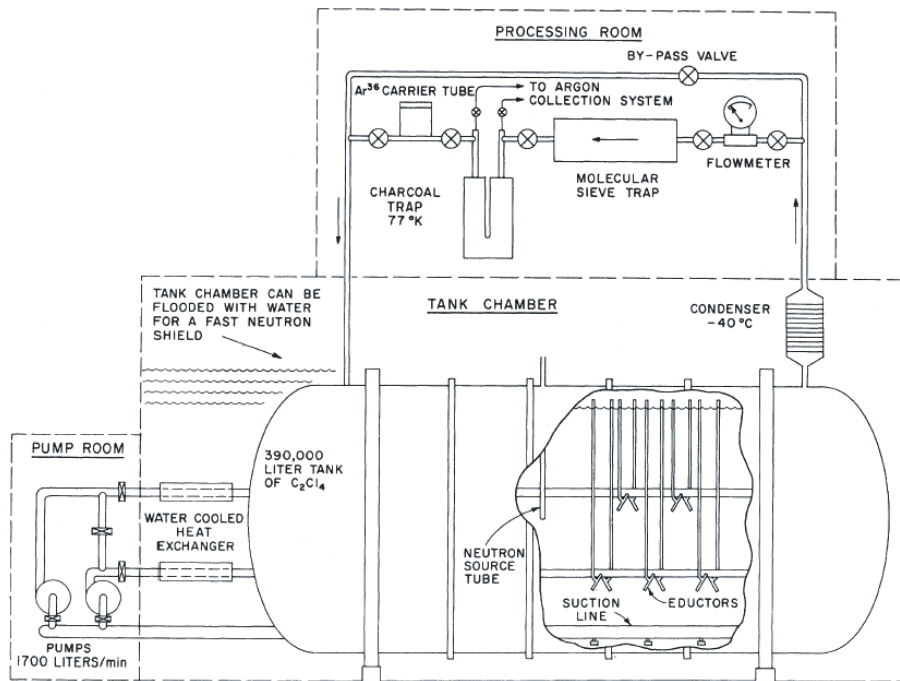
Hoofdstuk 9

Genoeg quarks: Hoe zit het met leptonen?

In de vorige hoofdstukken hebben we het steeds over quarks gehad. De reden dat leptonen in eerste instantie niet tot het aandachtsgebied behoorden voor CP-schending is dat als de neutrino's massaloos zijn, zoals we tot nu toe hebben aangenomen, er geen menging tussen de lepton families kan plaatsvinden. Een dergelijke menging kan alleen maar als de massaverschillen tussen de deeltjes in de verschillende families ongelijk zijn aan nul. CP-schending in de lepton sector op dezelfde manier als we hebben gezien in de quark-sector kan dus alleen maar als de leptonen uit de verschillende families een massaverschil hebben.

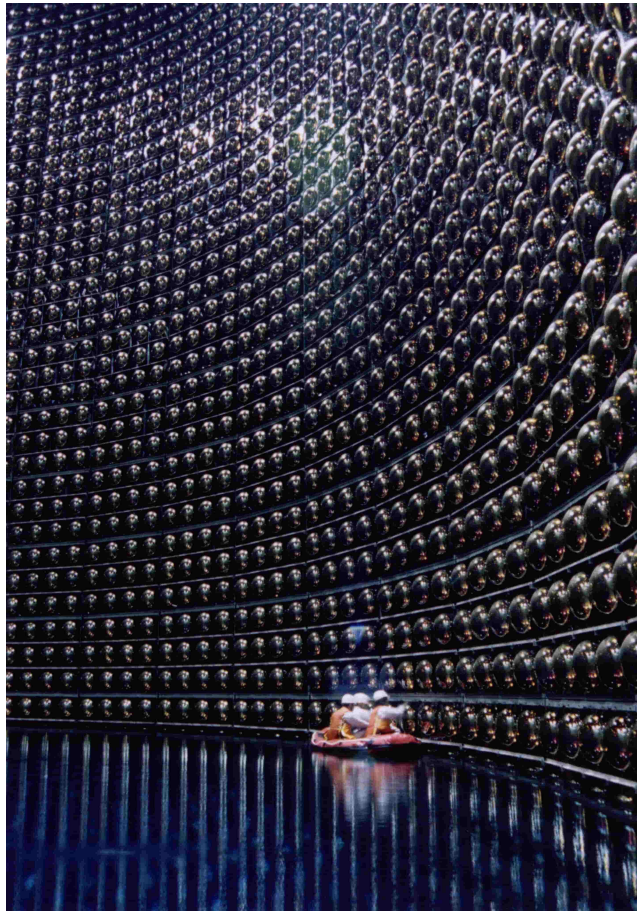
Een recente verrassing: Neutrino massa

Een opmerkelijk experiment werd in de jaren 60 van de vorige eeuw uitgevoerd door Raymond Davis [54]. In 1964 rekende John Bahcall [55] uit dat in het Standaard Zonnemodel een grote hoeveelheid neutrino's wordt geproduceerd en dat een deel van dergelijke neutrino's kan worden waargenomen als ze in botsing komen met een ^{37}Cl kern, die onder invloed van de zwakke wisselwerking dan kan worden omgezet in een ^{37}Ar atoom en een elektron. Bij deze reactie wordt dus een neutron in een proton omgezet en de energiedrempel daarvoor is tamelijk laag, dus een neutrino heeft maar een beetje energie nodig om deze overgang kinematisch te kunnen bewerkstelligen. Omdat het hier een pure zwakke interactie betreft is de kans op een dergelijke interactie echter zeer klein. Raymond Davis stelde een experiment voor om zonneneutrino's te meten met een grote tank met perchloorethyleen [56]. Dit experiment is schematisch weergegeven in Fig. 9.1. Het ^{37}Ar atoom is radioactief met een halfwaardetijd van 35 dagen. Deze atomen ^{37}Ar worden chemisch uit de C_2Cl_4 vloeistof waarmee de detectietank is gevuld



Figuur 9.1: *Schema van het experiment van Raymond Davis om neutrino's van de zon te detecteren. Figuur uit [54].*

onttrokken en geteld via hun radioactief verval. Een probleem hierbij vormt achtergrond van andere kosmische straling, dus hij stelde ook voor om het experiment in een diepe mijn uit te voeren. Dit werd uiteindelijk de Homestake mijn in de VS. De eerste meting uit 1964 [56] leverde geen bewijs voor neutrino detectie op. Het kostte uiteindelijk een aantal jaren extra meten voordat een significant signaal werd gevonden in 1968 [54]. Het experiment zelf is een voorbeeld van een uiterst delicate methode om telkens het gevormde ^{37}Ar uit de tank te extraheren en nauwkeurig te tellen, waarbij het overigens cruciaal is dat ^{37}Ar radioactief is. Het gevonden resultaat is echter beduidend minder neutrino's dan op grond van berekeningen mag worden verwacht. Voor de dertig jaar daarop heeft dat geleid tot speculaties dat het experiment niet goed was uitgevoerd of dat het Standaard Zonnemodel niet klopt. Beide zaken zijn in die tijd uitvoerig en nauwkeurig onderzocht en geen aanwijzingen zijn gevonden voor noemenswaardige problemen met het experiment of met de theorie. Inmiddels is de discrepantie ook door andere experimenten bevestigd. Al in een vroeg stadium is geopperd dat het gebrek aan elektron-neutrino's dat wordt geobserveerd een gevolg zou kunnen zijn van neutrino oscillatie. Dit is echter nooit serieus genomen omdat iedereen altijd aannam dat neutrino's massaloos zijn. Een gegeven dat ondersteund wordt door



Figuur 9.2: *Het SuperKamiokande experiment. Hier worden de fotomultiplicatorbuizen onderhouden. De servicemonteurs zitten in een rubberbootje in de enorme tank die is omgeven door fotomultiplicatorbuizen. Het waterniveau correspondeert hier met een gedeeltelijke vulling, die telkens wordt opgehoogd om een nieuwe laag fotobuizen te kunnen inspecteren.*

directe metingen aan neutrino massa's die een bovengrens voor de massa van de neutrino's opleveren van $m_{\nu_e} < 3$ eV, $m_{\nu_\mu} < 190$ keV en $m_{\nu_\tau} < 18.2$ MeV [51]. Er is nu ook een limiet vanuit de astrofysica op de som van de neutrino massa's voor alle "stabiele" neutrino's samen van 1.8 eV [58]. (Overigens was al in 1957 door Pontecorvo geopperd dat neutrino's en anti-neutrino's kunnen mengen [57].)

In 1998, dus dertig jaar later, vond de SuperKamiokande Collaboratie [59] een opmerkelijk variatie in de waarneming van het aantal neutrino's dat in de atmosfeer wordt geproduceerd. In een experiment dat geïllustreerd is met een foto in Fig. 9.2 worden neutrino's gemeten in een grote watertank. Deze neu-

trino's veranderen van muon-neutrino in muon via een zwakke wisselwerking. Het zo ontstane muon zendt licht uit terwijl het door het water beweegt, omdat de snelheid van deze muonen groter is dan de lichtsnelheid in water. Dit is de zogenaamde Cerenkov-straling. Deze Cerenkov-straling wordt gemeten met behulp van fotomultiplicatorbuizen die rondom het watervolume zijn geplaatst. Omdat er door het muon dat uit de reactie komt onder een vaste hoek fotonen worden uitgezonden kan het muon worden gereconstrueerd. Omdat het muon het grootste gedeelte van de neutrino impuls overneemt is daarmee ook de richting waarvan het neutrino komt duidelijk. Atmosferische neutrino's worden gemaakt door hoog-energetische kosmische straling die interacties heeft met het gas in de atmosfeer rond de aarde. In deze reacties worden zowel elektron- als muon-neutrino's geproduceerd en wel in een vaste verhouding, ongeacht het model dat wordt gebruikt. De SuperKamiokande detector, diep in de Kamioka mijn in Japan, is oorspronkelijk ontworpen om protonverval te bestuderen, iets waar we hier niet verder op in gaan. Het blijkt dat deze detector ook heel geschikt is om muon-neutrino's waar te nemen. Als nu de muon-neutrino flux als functie van de zenith-hoek¹ wordt bekeken dan blijkt dat er veel meer muon-neutrino's van boven komen dan van beneden. Nu verwachten we dat overal in de atmosfeer evenveel neutrino's worden gemaakt, zeker als je het over een etmaal middelt. Neutrino's hebben verder zo'n zwakke interactie dat ze nauwelijks door de aarde worden geabsorbeerd. Het verschil tussen neerkomende muon-neutrino's en omhoog komende muon-neutrino's zoals gemeten in het SuperKamiokande experiment is echter zo groot dat dit niet kan worden verklaard met absorptie door de aarde. De enige plausibele verklaring die overblijft is ook hier dat de muon-neutrino's in andere neutrino's oscilleren, dus van familie veranderen. De oscillatiewaarschijnlijkheid wordt gegeven door:

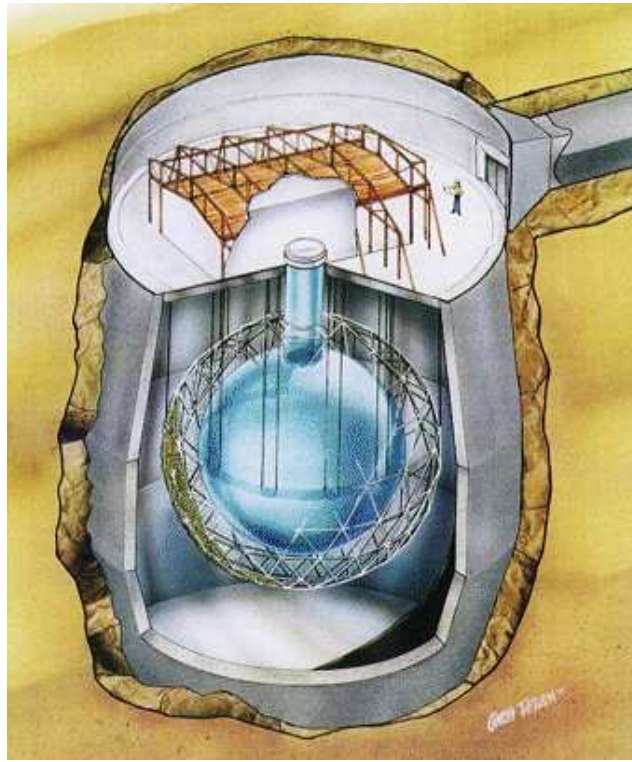
$$P_{\nu_{\mu} \leftrightarrow \nu_{\tau}} = \sin^2(2\theta) \sin^2 \left(\frac{1.27 \Delta m^2 [\text{eV}^2] L [\text{km}]}{E_{\nu} [\text{GeV}]} \right). \quad (9.1)$$

Onder de aanname dat hier sprake is van muon-neutrino naar tau-neutrino oscillatie wordt een massaverschil in het kwadraat gemeten van $5 \times 10^{-4} < \Delta m^2 < 6 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$. Dit is een heel klein massaverschil, maar tevens significant groter dan nul. Onder dezelfde aanname is de sterkte van de oscillatie een verrassing, $\sin^2(2\theta) > 0.82$, dus bijna maximale sterkte.

De doorslag heeft het Sudbury Neutrino Observatory experiment gegeven [60] met eerste resultaten in 2001. In dit experiment, weer diep ondergronds in een mijn, wordt gekeken naar een groot volume zwaar water,² waarin Cerenkovstra-

¹De zenith-hoek is de hoek die wordt gemaakt met het horizontale vlak dat aan de aarde raakt. Recht omhoog de lucht in wordt met nul graden geassocieerd en recht de grond in met 180°.

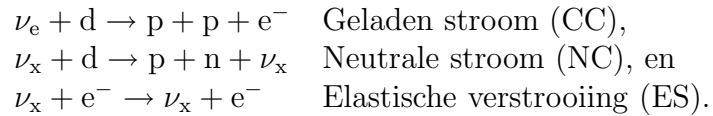
²Zwaar water is water waarin de waterstofatomen grotendeels door deuterium zijn vervangen.



Figuur 9.3: *Impressie van het Sudbury Neutrino Observatory (SNO) experiment.*

ling wordt waargenomen door fotomultiplicatorbuizen. Een impressie van het experiment is te zien in Fig. 9.3.

In het experiment is het mogelijk om drie typen interacties te onderscheiden:



Hierin is ν_x een willekeurig neutrino van het type ν_e , ν_μ of ν_τ . Wat nu wordt waargenomen is dat het aantal neutrino's dat wordt gedetecteerd in neutrale stroomgebeurtenissen precies is wat wordt verwacht door het Standaard Zonnemodel. In de geladen stroom gevallen wordt echter maar de helft van de flux gemeten van het aantal elektron-neutrino's dat wordt verwacht op basis van het Standaard Zonnemodel. Kennelijk verdwijnt dus de helft van alle elektron-neutrino's, maar klopt het totaal als we over alle soorten neutrino's integreren.

Deuterium heeft vrijwel dezelfde chemische eigenschappen als waterstof, maar heeft een kern van een proton en een neutron in plaats van alleen een proton. Zwaar water is daardoor circa 10% zwaarder dan gewoon water.

De enige en in dit geval onontkoombare verklaring is dat elektron-neutrino's van de zon onderweg naar de detector in andere neutrino's ν_μ of ν_τ veranderen. Dit lost meteen het probleem met de meting van Davis op.

Deze drie metingen, die intussen ook door andere experimenten zijn bevestigd, leveren het bewijs dat neutrino's oscilleren van de ene naar de andere soort. De experimenten geven ook een meting van de massaverschillen. Ze geven echter geen meting van de absolute massa van neutrino's. In ieder geval moeten dus twee soorten neutrino's een massa ongelijk aan nul hebben. Deze bevinding was de reden in 2002 de Nobelprijs te geven aan Davis voor zijn oorspronkelijk experiment en Masatoshi Koshiba voor zijn bijdrage aan het SuperKamiokande experiment. Zij moesten de prijs delen met Riccardo Giacconi die hem kreeg voor zijn bijdragen aan de Röntgenastronomie.

De experimenten die tot nu toe zijn uitgevoerd wijzen op neutrino-oscillatie tussen de drie neutrinofamilies die we kennen: elektron-neutrino's, muon-neutrino's en tau-neutrino's. Met deze experimenten kunnen we echter alleen maar massaverschillen meten. In totaal zijn twee verschillende massaverschillen gemeten, de ene groter dan de andere. Kennelijk zijn er dus twee neutrino massa eigentoesstanden die vlak bij elkaar liggen wat massa betreft en één toestand die wat verder van de andere twee ligt. Het is niet duidelijk of de lichtste of zwaarste neutrino's een massa hebben die bij elkaar in de buurt ligt. Ook van de absolute massa van de neutrino's is nog geen meting. Hier is dus nog een hoop experimenteel werk te verrichten.

De Maki-Nakagawa-Sakata (MNS) matrix: We weten nog niets !

Neutrino oscillatie laat zien dat we in de lepton sector ook een mengingsmatrix hebben. De heren Maki, Nakagawa en Sakata hebben de mogelijkheid van een mengingsmatrix in de lepton sector al voorzien in 1962 [61], dus nog voordat Cabibbo de menging van de quarks invoerde met de Cabibbo-hoek. De mengingsmatrix begint dan ook bekend te worden als de Maki-Nakagawa-Sakata (MNS) matrix (en soms ook als de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) matrix) en beschrijft de menging van neutrino's als:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U_{\text{mns}} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (9.2)$$

met

$$U_{\text{MNS}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13}e^{i\alpha_1/2} & s_{12}c_{13}e^{i\alpha_2/2} & s_{13}e^{-i\delta} \\ (-s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta})e^{i\alpha_1/2} & (c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta})e^{i\alpha_2/2} & s_{23}c_{13} \\ (s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta})e^{i\alpha_1/2} & (c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta})e^{i\alpha_2/2} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \quad (9.3)$$

Dit is bijna identiek aan de CKM matrix, behalve dat er twee complexe fases bij komen α_1 en α_2 , die beiden ook aanleiding kunnen geven tot CP-schending. Deze twee fases geven geen observabel effect in neutrino menging, maar hebben wel een mogelijk effect in bijvoorbeeld neutrinoloos dubbel bèta verval, iets waar we hier niet verder op in gaan.³ De toestanden ν_1 , ν_2 en ν_3 zijn hier de massa eigentoestanden.

Uit reactor experimenten is er een bovengrens op de menging van elektron- en tau-neutrino's, equivalent met $s_{12} < 0.03$ [62]. Uit de menging van atmosferische neutrino's waarvan we aannemen dat muon-neutrino's en tau-neutrino's mengen, volgt dat:

$$\sin^2(2\theta_{23}) > 0.92 \Rightarrow 0.6 < s_{23} < 0.7, \quad 0.7 < c_{23} < 0.8. \quad (9.4)$$

De neutrino-menging van de zon wordt dan verklaard door de hoek θ_{12} , waarvoor als limieten gelden:

$$0.2 < \tan^2 \theta_{12} < 0.5 \Rightarrow 0.4 < s_{12} < 0.6, \quad 0.8 < c_{12} < 0.9. \quad (9.5)$$

Dit geeft voor de absolute waarden van de MNS matrix elementen het volgende beeld:

$$U_{\text{MNS}}^{\text{abs.}} = \begin{pmatrix} 0.8 - 0.9 & 0.4 - 0.6 & < 0.03 \\ 0.3 - 0.5 & 0.5 - 0.7 & 0.6 - 0.7 \\ 0.3 - 0.5 & 0.5 - 0.7 & 0.7 - 0.8 \end{pmatrix}. \quad (9.6)$$

Hier is geen informatie uit te halen over een unitariteitsdriehoek, omdat de metingen niet nauwkeurig genoeg zijn. Er is verder geen enkele directe meting van de complexe fases δ , α_1 en α_2 . Over het CP-schendend karakter is dus niets bekend. Echter omdat de matrix elementen allemaal, op s_{13} na, van de orde van 1 zijn, is het goed mogelijk dat het effect van CP-schending van de MNS matrix op de materie–anti-materie asymmetrie veel groter is dan die van de CKM matrix (zie het argument van de Jarlskog invariant rond formule 8.21.)

Het zal niet makkelijk zijn om de elementen van de MNS matrix en hun complexe fase te meten.

Maar dat was het dertig jaar geleden ook niet voor de CKM matrix.

³In neutrinoloos dubbel bèta verval verandert een neutrino in een anti-neutrino. Dat kan gebeuren als een neutrino niet een Dirac deeltje is, maar een zogenaamd Majorana deeltje. Iets waar we hier ook niet verder op in gaan.

Opgaven

- 9.1: Als een elektron-neutrino door gewone materie gaat kan die ook interactie hebben met elektronen via de geladen stroom (W boson uitwisseling.) Bedenk wat het gevolg hiervan is voor neutrino oscillaties, als neutrino's door materie gaan.
- 9.2: Bereken bij welke bundelenergie voor het neutrino de oscillatie maximaal is als de detector 800 km van de neutrinobron af staat. We beginnen met een zuivere muon-neutrino bundel.
- 9.3: Bij een vaste afstand van een neutrino detector tot de neutrino bron en bij een vaste neutrino energie kan toch de oscillatiewaarschijnlijkheid bij de detector worden beïnvloed door de bundel niet helemaal precies op het experiment te richten. Beredeneer waarom dat zo is. Wat is het nadeel van deze methode ?
- 9.4: Op dit moment worden twee neutrino massaverschillen gemeten. Het kan nu zo zijn dat de lichtste twee neutrino's een klein massaverschil hebben en het derde neutrino een stuk zwaarder is, of dat de zwaarste twee neutrino's een klein massaverschil hebben en het lichtste een stuk lichter is. Bedenk welke meting nodig is, of welke metingen nodig zijn, om eenduidig vast te stellen hoe de massa hiërarchie precies in elkaar zit.
- 9.5: Bedenk experimenten om elk van de complexe fases van de MNS matrix te meten.

Appendix A

Wiskunde: De taal van de natuurkunde

Complex is reëler

Iedereen kent intuïtief de reële getallen. Zij vormen de continue getallenlijn. Ze bevatten alle gehele getallen, ook de negatieve, maar ook alle breuken en nog veel meer getallen daartussenin.

Laten we nu eens een vergelijking beschouwen van een polynoom die gelijk is aan nul, bijvoorbeeld:

$$x^2 = 1. \tag{A.1}$$

Er zijn nu twee reële getallen, $x = -1$ en $x = 1$ die aan deze vergelijking voldoen. Beschouwen we nu:

$$x^2 = -1, \tag{A.2}$$

dan zien we dat er geen reële getallen zijn die aan deze vergelijking voldoen. Kortom er zijn polynoomvergelijkingen die opgelost kunnen worden met reële getallen, maar er zijn er ook waarvoor dat niet geldt.

Als er nu een getal zou bestaan waarvoor geldt:

$$i^2 = -1, \tag{A.3}$$

dan is het natuurlijk evident dat de vorige vergelijking is op te lossen, maar ook dat het getal i geen element is van de reële getallen.

Laten we een nieuwe verzameling van getallen invoeren die kunnen worden geschreven als:

$$x = a + b \cdot i, \tag{A.4}$$

waarin a en b reële getallen zijn. Deze verzameling van de getallen die zo geschreven kunnen worden, zullen we de complexe getallen noemen. Het blijkt

dan dat alle polynoomvergelijkingen kunnen worden opgelost, en verder dat het aantal nulpunten precies gelijk is aan de graad van het polynoom, dat wil zeggen de hoogste macht die in het polynoom voorkomt. (Soms moeten we hiervoor dan wel hetzelfde nulpunt meerdere keren tellen.)

Het is natuurlijk leuk dat deze complexe getallen ervoor zorgen dat alle polynoomvergelijkingen zijn op te lossen, maar de betekenis strekt toch echt verder. Om dat in te zien zullen we eerst wat eigenschappen van complexe getallen bekijken.

Complexe getallen kunnen we dus opvatten als paren van reële getallen. Ze zijn dus ook in het platte vlak te tekenen, omdat elk punt daar precies twee reële coördinaten heeft. Het eerste getal van het paar wordt opgevat als de coëfficiënt van de reële as, die conventioneel horizontaal wordt getekend. Het tweede getal wordt opgevat als de coëfficiënt van de imaginaire as, de as die met i vermenigvuldigt. Dit verklaart ook meteen de keuze van het symbool i als *imaginaire factor*. Behalve dat we complexe getallen op kunnen vatten als een punt in het twee-dimensionale vlak, kunnen we ze ook opvatten als een vector, namelijk de vector van de oorsprong $(0, 0)$ naar het punt dat door de coördinaten van het complexe getal worden gegeven.

Complexe getallen kunnen bij elkaar worden opgeteld. Als $x = a + bi$ en $y = c + di$ complexe getallen zijn, met a, b, c, d reëel, dan geldt voor hun som:

$$z = x + y = (a + c) + (b + d)i. \quad (\text{A.5})$$

De reële coëfficiënten worden dus paarsgewijs opgeteld. In het platte vlak ziet dat eruit als de optelling van twee vectoren.

Complexe getallen kunnen ook met elkaar worden vermenigvuldigd:

$$z = x \cdot y = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \quad (\text{A.6})$$

Dit resultaat kan makkelijk worden bereikt door de haakjes uit te werken en uit te vermenigvuldigen, de factor i^2 door -1 te vervangen, en vervolgens de coëfficiënten met en zonder i bij elkaar te vegen.

Laten we weer terug gaan naar de mogelijkheid om een complex getal als een vector te schrijven. Een vector kunnen we ook zien als een lijnstuk met een lengte en een richting. Precies zo kunnen we een complex getal ook zien als een lengte en een richting. Alleen heet de lengte van een complex getal de absolute waarde en de richting wordt gegeven door de complexe fase.

De absolute waarde van een complexe getal, $|x|$, volgt makkelijk uit de interpretatie als vector met de stelling van Pythagoras:

$$|x| = |(a + bi)| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (\text{A.7})$$

De fase van een complex getal, $\phi(x)$, wordt gegeven door de hoek die de corresponderende vector in het platte vlak maakt met de reële as:

$$\phi(x) = \phi(a + bi) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right). \quad (\text{A.8})$$

Een complex getal is in termen van reële getallen dus behalve als $x = a + bi$ ook te schrijven als $x = |x| \cos(\phi(x)) + |x| \sin(\phi(x)) i$, waarbij de relatie tussen a, b en $|x|, \phi(x)$ hierboven werd gegeven. Kortweg wordt de tweede vorm ook wel geschreven als $x = r \cos(\phi) + r \sin(\phi) i$, dus $r = |x|$ en $\phi = \phi(x)$.

Door gebruik te maken van een e-macht kunnen we dit nog compacter schrijven. Het blijkt dat er geldt:

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi). \quad (\text{A.9})$$

zodat we een complex getal ook kunnen schrijven als:

$$x = a + bi = r \cos(\phi) + r \sin(\phi) i = r e^{i\phi}. \quad (\text{A.10})$$

Maken we gebruik van de gewone eigenschappen van de e-macht dan kunnen we de vermenigvuldiging van twee complexe getallen ook schrijven als:

$$x_1 \cdot x_2 = (r_1 e^{i\phi_1}) \cdot (r_2 e^{i\phi_2}) = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}. \quad (\text{A.11})$$

Dus de absolute waarden worden met elkaar vermenigvuldigd en de complexe fasen worden bij elkaar opgeteld.

Extra dimensies

Afbeeldingen in de ruimte kunnen op de elegante manier in de wiskunde worden voorgesteld met matrices. Een matrix is een groep getallen die bij elkaar worden gehouden door haakjes. Voordat we hier formules voor op gaan schrijven kijken we eerst naar de meetkundige interpretatie van matrices. In Fig. A.1a) wordt een punt in het platte vlak uitgebeeld. Een punt in het platte vlak, dat twee dimensies heeft, kan worden beschreven met twee coördinaten die de afstand vanaf de oorsprong aangeven in twee verschillende richtingen. De twee richtingen die we daarvoor gebruiken moeten natuurlijk niet in elkaars verlengde liggen, ze moeten *onafhankelijk* zijn. Verder is het gebruikelijk de richtingen van de coördinaatassen loodrecht op elkaar te kiezen. In dat geval spreken we van een orthogonaal assenstelsel. Het is verder gebruikelijk de afstandsmaat langs de twee assen dezelfde te nemen. Het assenstelsel heet dan orthonormaal (als het ook al orthogonaal was.) Het is natuurlijk ook van belang te weten waar de oorsprong

van het assenstelsel ligt, dat definieert het punt met $x = 0$ en $y = 0$. Hebben we dit allemaal afgesproken, dan ligt elk punt precies vast door het twee coördinaten toe te kennen.

Nu kunnen we afbeeldingen maken van het platte vlak op een ander plat vlak. Een speciale groep van afbeeldingen, zijn de lineaire afbeeldingen. Voor lineaire afbeeldingen van het platte vlak geldt:

$$\begin{cases} x' = a_{11} x + a_{12} y, \\ y' = a_{21} x + a_{22} y, \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

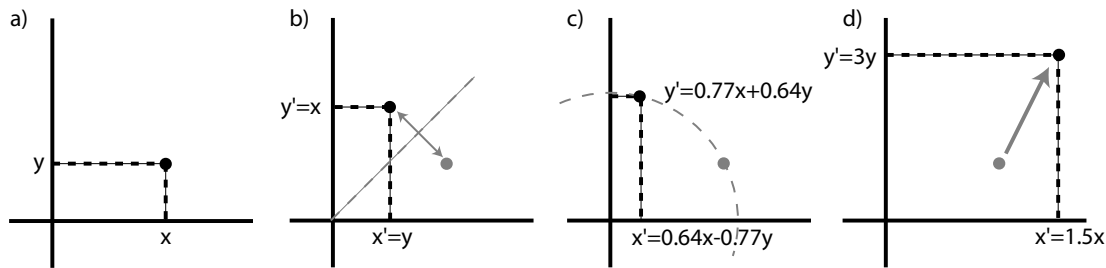
waarbij (x', y') de coördinaten zijn van de afbeelding in het nieuwe vlak en (x, y) de coördinaten van het punt in het oude vlak dat wordt afgebeeld. De coëfficiënten a_{ij} , $i, j = 1, 2$ zijn willekeurige getallen waarmee de oude coördinaten worden vermenigvuldigd. Voor het gemak tekenen we vaak het nieuwe vlak over het oude heen en identificeren we dus de twee vlakken met elkaar. Een belangrijke eigenschap van lineaire transformaties is dat de oorsprong weer op de oorsprong wordt afgebeeld.

In Fig. A.1b) wordt het oorspronkelijk punt (x, y) afgebeeld door te spiegelen in de diagonaal tussen de x - en y -as in, zoals staat aangegeven. In formulevorm kunnen we dat beschrijven met:

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x, \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

en de coëfficiënten nemen dus de simpele vorm aan:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0, & a_{12} &= 1, \\ a_{21} &= 1, & a_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$



Figuur A.1: Voorbeelden van lineaire transformaties in twee dimensies (ofwel het platte vlak). In figuur a) wordt een punt in het platte vlak uitgebeeld met coördinaten (x, y) . In b) wordt dat punt gespiegeld in een diagonale lijn door de oorsprong. In c) wordt het punt geroteerd over een hoek van 50° tegen de klok in. In d) wordt een willekeurige schaal transformatie uitgevoerd die de lengtes in de x richting met 1.5 vermenigvuldigt en in de y richting met 3.

Laten we nu de notatie wat veranderen om het afbeeldingskarakter te accentueren. Formule A.12 kan ook worden geschreven als:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

De objecten:

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

heten *vectoren* en stellen een punt in de ruimte voor. Het object:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

heet een *matrix* (meervoud *matrices*). De correspondentie tussen formules A.15 en A.12 wordt gegeven door de vermenigvuldingsregel voor matrices en vectoren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

en de regel dat een gelijkheid van vectoren een gelijkheid van *alle componenten* van die vectoren betekent:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x' = x, \\ y' = y. \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

De vermenigvuldigingsregel voor matrices in woorden is dat *de matrixcoëfficiënten per rij worden vermenigvuldigd met de vectorcomponenten per kolom en dat de producten van elke matrixcoëfficiënt en vectorcomponent bij elkaar worden opgeteld*.

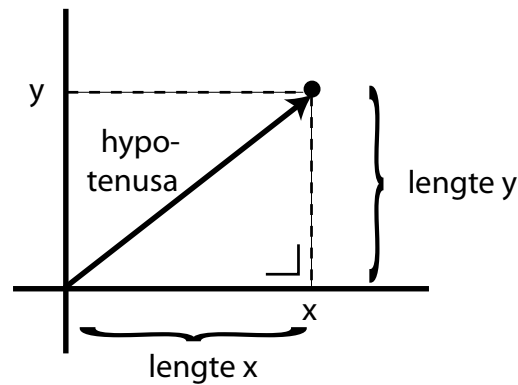
We kunnen formule A.15 nu samenvatten als:

$$\vec{r}' = \mathbf{A}\vec{r}. \quad (\text{A.20})$$

De pijltjes boven de r geven aan dat het om een vector gaat. De vette letter \mathbf{A} dat het om een matrix gaat. Dit is puur een notationele conventie die ik zal gebruiken. In andere boeken worden andere notaties gebruikt.

We hadden al gezien dat een spiegeling in de diagonaal tussen de x - en y -as correspondeert met de matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.21})$$



Figuur A.2: *Illustratie van de stelling van Pythagoras. Omdat de x -as loodrecht op de y -as staat is de afstand van het punt (x, y) tot de oorsprong gegeven door de lengte van de hypotenusa van de gevormde driehoek, h , en geeft de stelling van Pythagoras voor deze lengte $h = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Een rotatie van punten in het platte vlak over een hoek ϕ tegen de klok in kan nu worden voorgesteld met de matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

en dit geldt voor een willekeurige rotatiehoek ϕ . In Fig. A.1c) is dit uitgebeeld voor een rotatie over een hoek van 50° .

Als verder voorbeeld is in Fig. A.1d) de transformatie uitgebeeld die correspondeert met de matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.23})$$

Een belangrijk verschil tussen de laatste afbeelding en de voorbeelden van spiegeling en rotatie die eraan voorafgingen is dat in spiegeling en rotatie de afstand van de punten tot de oorsprong voor en na de afbeelding hetzelfde is. Een equivalente formulering hiervan is dat de lengte van vectoren invariant is:

$$|\vec{r}'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\vec{r}|, \quad (\text{A.24})$$

waarbij de stelling van Pythagoras is gebruikt voor de lengte van de vectoren, een lengte die hetzelfde is als de afstand van het corresponderende punt tot de oorsprong. Dit is geïllustreerd in Fig. A.2. Matrices die de lengte van vectoren behouden worden *unitair* genoemd. Binnen de groep van de unitaire matrices kunnen we nog twee subgroepen onderscheiden. Bij rotatie wordt de notie van links en rechts, de oriëntatie, behouden in de afbeelding. Bij spiegeling is dat niet

zo. Bij spiegeling van twee punten kan vanuit het ene punt gezien het andere van links naar rechts verhuizen. De wiskundige manier om deze twee subgroepen uit elkaar te houden is het teken van de *determinant*. De determinant van de matrix \mathbf{A} wordt gegeven door:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}. \quad (\text{A.25})$$

Voor unitaire matrices is dit getal altijd ± 1 . Voor spiegelingen is het -1 en voor rotaties $+1$ (zie opgave A.7). De subgroep van matrices waarvoor de determinant $+1$ is worden de *speciale unitaire* matrices genoemd.

Indachtig de uitbreiding van de reële getallen naar de complexe getallen kunnen we de matrices nu generaliseren naar afbeeldingen van bijvoorbeeld vectoren van twee complexe getallen. De matrixelementen zelf kunnen dan uiteraard ook complex zijn. In dat geval kunnen we in twee dimensies de afbeelding niet makkelijk meer grafisch voorstellen, maar het werkt niet onredelijk om het tot nu toe gegeven grafische beeld in het achterhoofd te houden. De groep van unitaire matrices wordt aangegeven met het symbool $U(N)$, waarbij N het aantal dimensies is van de ruimte waarop de bijbehorende matrices werken. Voor speciale unitaire matrices wordt die groep aangegeven met $SU(N)$. In bovenstaande voorbeelden vormen de spiegelingen en rotaties in twee dimensies samen de groep $U(2)$, terwijl de rotaties alleen in twee dimensies de groep $SU(2)$ zijn. Deze groepen werken op de desbetreffende ruimtes van N dimensies van complexe getallen. Een speciaal geval vormt de groep $U(1)$. Deze afbeeldingen kunnen worden voorgesteld als de vermenigvuldiging van een complex getal (een element van de een-dimensionale complexe ruimte) met een getal dat absolute waarde 1 heeft. Zoals we konden zien bij formule A.10 in sectie A kan die transformatie dus worden voorgesteld als de vermenigvuldiging met een getal van de vorm:

$$e^{i\phi}, \quad (\text{A.26})$$

waarbij ϕ een reëel getal is. Een dergelijke afbeelding wordt een complexe faseverschuiving genoemd.

Opgaven

A.1:

$$\begin{aligned}(1 + 2i) + (2 + i) &= \\(5 - 4i) + (3.5 + 2i) &= \\(-3.5 - 1.5i) + (-0.5 + 0.5i) &= \end{aligned}$$

A.2:

$$\begin{aligned}(1 + 2i) \cdot (2 + i) &= \\(5 - 4i) \cdot (3.5 + 2i) &= \\(-3.5 - 1.5i) \cdot (-0.5 + 0.5i) &= \end{aligned}$$

A.3: Bepaal van de complexe getallen in opgave A.2 de absolute waarde en de complexe fase.

A.4: Bereken de producten van opgave A.2 in termen van absolute waarden en complexe fasen.

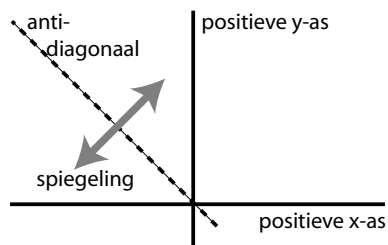
A.5: Laat met behulp van formule A.12 zien dat in lineaire transformaties de oorsprong weer op de oorsprong wordt afgebeeld.

A.6: Ga na aan welke eisen de coëfficiënten a_{ij} in formule A.12 moeten voldoen, zodat elk punt in het oude vlak op een uniek punt van het nieuwe vlak wordt afgebeeld en zodat alle punten in het nieuwe vlak door de afbeelding worden bereikt.

A.7: Bereken de determinant van de spiegeling van formule A.21 en de rotatie van formule A.22.

Voor de rotatie kan worden gebruikt dat voor alle hoeken ϕ geldt: $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$.

A.8: Schrijf de matrix op die hoort bij spiegeling in de anti-diagonaal van het platte vlak. De anti-diagonaal is de lijn die precies tussen de negatieve x -as en de positieve y -as loopt, zie de figuur rechts.



Appendix B

Deeltjes versnellers: Een bron van deeltjes

De voortgang in de elementaire deeltjesfysica is voor een niet gering gedeelte te danken aan de mogelijkheid deeltjes te versnellen en vervolgens aan botsingen te laten deelnemen bij hoge energie. Aan deze bezigheid dankt de elementaire deeltjesfysica zijn alternatieve naam: de hoge energiefysica.

Een hoge energie, en dus een grote impuls, heeft twee voordelen. Quantummechanisch gezien hoort een grote impuls bij een grote ruimtelijke resolutie, oftewel een groot vermogen om kleine details in de ruimte te onderscheiden. Hoog-energetische deeltjes zijn dus bruikbaar als een microscoop om kleine structuren te kunnen bestuderen. Het ruimtelijk oplossend vermogen van een versneller van ongeveer 1 TeV, de hoogste energie nu in gebruik, is minder dan 10^{-15} m. Dit is meer dan een miljoen keer kleiner dan de nanofysicaschaal die tegenwoordig in de fysica in de mode is.

Vanuit het oogpunt van de relativiteitstheorie geeft een hoge energie de mogelijkheid deeltjes te produceren met een grote massa, via $E = mc^2$. Het blijkt dat er allemaal (elementaire) deeltjes bestaan met een grote massa die niet direct relevant zijn voor de fysica van het dagelijks leven, maar een enorme impact hebben op de structuur van de theorie.

Deeltjesbronnen

Deeltjesbronnen voor geladen elementaire deeltjes zijn er in feite twee.

Elektronen worden over het algemeen geproduceerd door ze te verdampen uit een gloeidraad. Dit is de techniek die ook wordt gebruikt in televisiebeeldbuizen. Het idee is de draad zo warm te stoken dat de kinetische energie van de elektronen in het metaalrooster boven de bindingsenergie van de elektronen in dat rooster

uitkomt. De snelste elektronen zullen dan uit het metaal schieten. De elektronen die uit het metaalrooster komen plegen zich in de buurt daarvan op te houden. Om ze “op te pakken” wordt een spanningsverschil aangelegd tussen de gloeidraad en een ander metalen voorwerp in de buurt. Als dat voorwerp een ringvorm heeft worden de elektronen erdoor aangetrokken, maar door alle delen van de ring evenveel. Het effect is dat veel elektronen door het gat van de ring zullen schieten. We hebben dan het begin van een deeltjesbundel. Ook dit principe wordt in de televisiebeeldbuis gebruikt.

Protonen zijn de andere “elementaire” deeltjes die met een deeltjesbron kunnen worden gemaakt. Dat kan bijvoorbeeld door waterstofgas in een volume te plaatsen met een grote negatieve potentiaal ten opzichte van aarde. De negatieve potentiaal betekent dat er een elektronen overschot in de omgeving is. Waterstofatomen plegen dan af en toe een extra elektron op te pikken en vormen dan een H^- ion. Door de vorming van het H^- ion vervalt de binding in de H_2 moleculen waaruit waterstofgas normaal bestaat. Door het negatief geladen volume van een ontsnappingsgat te voorzien zullen de H^- ionen uit het gat worden geblazen door het potentiaalverschil van het negatief geladen volume en de omgeving die geaard is. Dit is het begin van een proton bundel. Als de H^- ionen op snelheid zijn kunnen de elektronen van het proton worden gestript door de bundel door een metalen folie heen te schieten. Een populaire manier om een negatief geladen volume te maken is met een Van de Graaf generator.

Er kunnen ook bronnen worden gemaakt voor zware atoomkernen, zoals zwavel, goud en lood. We gaan daar hier niet verder op in. Ook atomaire en moleculaire bundels die we kunnen maken vallen buiten het bestek van deze appendix.

Lineaire versnellers

De gangbare techniek om elektronen en protonen na de bron verder te versnellen is een lineaire versneller. Een lineaire versneller bestaat uit een serie metalen cilindres, of ringen, waardoor de deeltjes als een bundel bewegen. Door telkens tussen twee opeenvolgende cilindres een spanningsverschil aan te leggen worden de geladen deeltjes versneld. Om te voorkomen dat uiteindelijk hele hoge spanningen nodig zijn wordt de spanning van teken gedraaid op het moment dat de geladen deeltjes in de cylinder zitten. De cylinder werkt als een kooi van Faraday en van die spanningswisseling merken de deeltjes die zich erin bevinden niets. Bij de volgende overgang tussen twee cilindres gekomen merken ze echter wel dat ze “de wind weer mee hebben”. Om deze truc te kunnen toepassen is het wel noodzakelijk dat de deeltjes in pakketjes komen, en niet als continue stroom.

Circulaire versnellers

Een alternatief voor een lineaire versneller aan het begin van de versnellerketen is een cyclotron. Een cyclotron bestaat uit twee halve holle schijven waartussen een spanningsverschil is aangelegd. De herhaalde versnelling door de overgang tussen de schijven herhaaldelijk te laten doorlopen wordt bereikt door het geheel in een magneetveld op te stellen dat de deeltjes afbuigt. Bij gelijke impuls zullen de deeltjes een cirkelpad doorlopen. Door de versnelling wordt de straal van die cirkel echter steeds groter en spiraliseren de deeltjes uit het cyclotron, maar niet nadat ze dus ook grote energie hebben gekregen.

Een variant op het cyclotron is het synchrotron. Ook hierin zorgen magneten ervoor dat de geladen deeltjes een cirkel doorlopen. Op het cirkelpad staan dan versneller eenheden, meestal stukjes lineaire versneller. In het geval van het synchrotron wordt echter de sterkte van het magneetveld opgevoerd, zodat bij toenemende energie van de deeltjes ze op een cirkel met dezelfde diameter blijven bewegen. De toename van het magneetveld is synchroon aan de toename van de energie van de deeltjes, vandaar de naam van deze versnellertechniek. Met synchrotrons worden op dit moment de hoogste energieën gehaald. Een nadeel van synchrotrons is dat de deeltjes met hele grote energie op een cirkelbaan voortdurend energie verliezen door het uitzenden van straling, de zogenaamde synchrotronstraling. De maximale energie die in synchrotrons kan worden gehaald wordt beperkt door dit stralingsverlies dat evenredig is aan $(E/m)^4$, waarbij E de energie van de deeltjes is en m hun massa. Het energieverlies is ook evenredig met het magneetveld dat wordt gebruikt voor de afbuiging en kan worden beperkt door dit zwakker te maken. Dat levert dan wel een grotere cirkelbaan op, met als exponent van dit gedrag een versnellertunnel van 27 km die gebruikt is voor de Large Electron Positron collider (LEP) en gebruikt zal gaan worden voor de Large Hadron Collider (LHC).

Een belangrijke versnellerparameter, behalve de bundelenergie, is de luminositeit. Dit wordt gegeven als het aantal deeltjes per vierkante centimeter per seconde. De luminositeit bepaalt hoeveel botsingen er plaats zullen vinden bij een gegeven werkzame doorsnede.

Appendix C

Deeltjes detectoren: De ogen van de fysicus

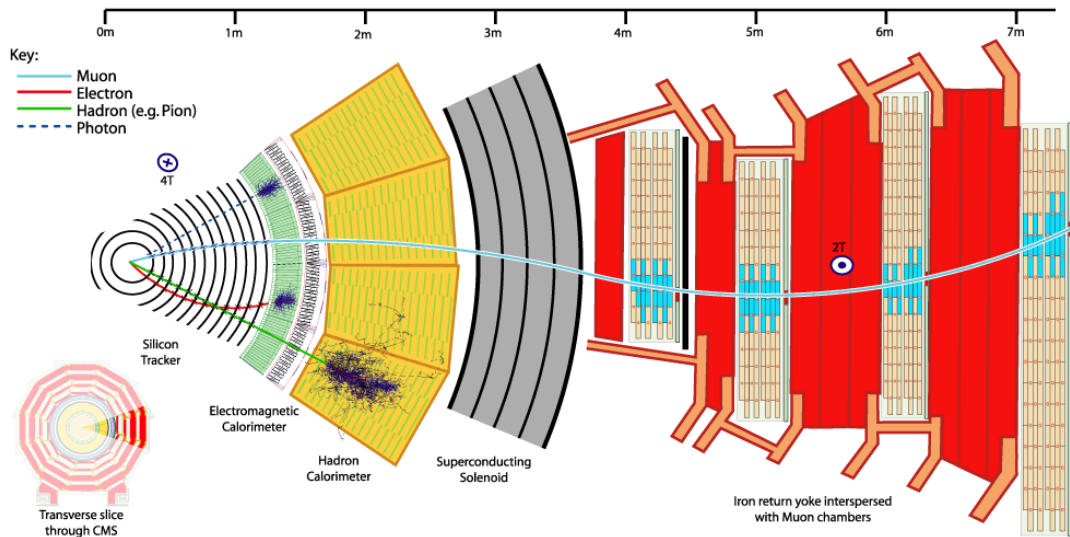
Experimenten met hoog energetische deeltjes uit versnellers kunnen grofweg op twee manieren worden gedaan. De simpelste is een hoog energetische bundel op een trefplaatje sturen. Dit staat bekend als “fixed target” experimenten.¹ De andere manier is om twee bundels tegen elkaar in te sturen en zo te botsen. Voor relativistische energieën levert die laatste methode veel meer energie op om nieuwe deeltjes te produceren, immers als de bundel met dezelfde impuls tegen elkaar in bewegen is de netto impuls nul en kan alle energie worden omgezet in de massa van nieuwe deeltjes. Botsende bundel experimenten zijn dan ook zeer populair sinds we dat kunnen. Een voordeel van botsende bundels in synchrotrons is verder dat alle deeltjes die geen interactie hebben rond blijven draaien en de volgende ronde weer kans maken op een interactie. De luminositeit wordt daardoor verschrikkelijk veel hoger met hetzelfde aantal deeltjes.

Experimenteren bij “fixed target” en botsende bundel is wat verschillend, hoewel dezelfde basistechnieken voor deeltjesdetectie worden gebruikt. De verschillende deeltjesdetectietechnieken zullen we hier demonstreren aan een experiment bij botsende proton bundels, het CMS experiment.²

In Fig. C.1 zijn de verschillende detectietechnieken gedemonstreerd. Geladen deeltjes worden zo dicht mogelijk bij het productiepunt gedetecteerd. Dat gebeurt door gebruik te maken van het feit dat geladen deeltjes in materiaal een spoor van ionisatie achterlaten. Die ionisatie is maar een kleine hoeveelheid lading, dus moet met gevoelige elektronica worden opgenomen en versterkt. Hoe meer materiaal er is, hoe meer lading er door het deeltje wordt achtergelaten. Echter, materiaal

¹Bij gebrek aan een Nederlands woord.

²Om alle partijdigheid uit te sluiten is hier voor een experiment gekozen waarin Nederland niet deelneemt.



Figuur C.1: *Deeltjesdetectie technieken gedemonstreerd aan de hand van het CMS experiment bij de LHC. Eén sector in r - ϕ is uitvergroet. De patronen die in de detector zichtbaar worden voor de verschillende deeltjes zijn geïllustreerd.*

verstoort ook het pad dat het deeltje volgt. Om de oorspronkelijke informatie die het deeltje bevatte niet te verstoren moeten we dus zo min mogelijk materiaal gebruiken bij de detectie van geladen deeltjes. Deze tegenstrijdigheid voor de hoeveelheid materiaal in detectoren voor geladen deeltjes wordt opgelost door weinig materiaal te gebruiken hetgeen mogelijk wordt gemaakt door zeer gevoelige technieken om zeer kleine ladingen te registreren. Het summum hiervan op dit moment zijn technieken in halfgeleiders die slechts een ruis hebben van enkele tientallen elektronen en dus signalen van enkele honderden elektronen kunnen registreren. Een andere gangbare truc is door gebruik te maken van gasversterking in ionisatiekamers. De detectiedraden worden daar op een hoge spanning gezet, zodat ze de lading sterk aantrekken en de draden worden ook heel dun gemaakt, zodat het elektrisch veld vlak bij de draden een extreem hoge waarde bereikt. De ladingen worden daardoor versneld en ioniseren op hun beurt het gas in de omgeving. Die ladingen worden ook weer versneld, enz. Hierdoor treedt een lawine-effect op en worden versterkingsfactoren van 10^8 bereikt. Door de ionisatie die een geladen deeltje achterlaat op een heleboel aparte punten te meten kan het spoor van het deeltje worden gereconstrueerd.

Neutrale deeltjes kunnen niet worden gemeten door middel van ionisatie, want zij gaan geen reacties aan die materiaal ioniseren. Deze deeltjes gaan wel andere reacties aan met materiaal, zeldzamer maar heftiger. Om deze reacties uit te

lokken is een grote materiaaldichtheid nodig. Een gevolg is dat behalve dat die deeltjes een detecteerbaar signaal achterlaten, ze in dat proces ook zelf worden verwoest. Detectoren die op deze manier de energie van deeltjes meten heten calorimeters. Ze meten de energie van deeltjes, waarbij de deeltjes zelf helemaal worden geabsorbeerd. Behalve neutrale deeltjes ondergaan geladen deeltjes hetzelfde lot. In een calorimeter is het verschil tussen een geladen en neutraal deeltje dus niet te zien. Door een geladen deeltjesdetector voor de calorimeter te plaatsen en te kijken of een geladen spoor geassocieerd kan worden met een blob energie in de calorimeter kan alsnog informatie worden verkregen over zowel de energie van het deeltje als de lading.

Er is één type geladen deeltje dat zich anders gedraagt in een calorimeter: het muon. Muonen worden normaal gesproken niet verwoest in een calorimeter en laten er maar een bescheiden hoeveelheid energie in achter. Door nu achter al het materiaal van een calorimeter nog een detector voor geladen sporen te plaatsen kunnen we muonen zien.

Er is een type deeltje dat zich van alle detectiemethoden niets aantrekt: het neutrino. Neutrino's hebben alleen zwakke interactie, en slechts enkele neutrino's (sub-ppm niveau) zullen in een detector met een beheersbare hoeveelheid materiaal een interactie aangaan. Het opsporen van neutrino's gaat dan ook veeleer door te kijken naar een onbalans in de energieverdeling in de detector. In een botsende bundelexperiment is de netto impuls van de begintoestand nul en moet wegens behoud van impuls de eindtoestand ook totale impuls nul hebben. Een netto impuls in de detector duidt dan dus op deeltjes die ongezien ontsnappen.

In Fig. C.1 staat voor verschillende deeltjes aangegeven welk patroon ze in de verschillende subdetectoren vertonen. Door de informatie van verschillende subdetectoren te combineren kunnen we niet alleen de energie en impuls van deeltjes achterhalen, maar vaak ook een uitspraak doen over het type deeltje. Met name muonen en elektronen kunnen goed als zodanig worden geïdentificeerd.

Appendix D

Vals spelen: De oplossingen van de opgaven

Hoofdstuk 1

- 1.1: Waarom moet een experiment, zoals AMS, dat anti-helium in het heelal wil meten buiten de dampkring worden gelanceerd en kan een dergelijk experiment niet op aarde plaatsvinden?

Als er anti-helium in het heelal zou voorkomen dan zou het in de dampkring annihilieren met het daar aanwezige helium (en andere materie), voordat het de kans zou krijgen gedetecteerd te worden.

- 1.2: Waardoor zouden de andere druppels en druppeltjes in Fig. 1.2 veroorzaakt kunnen zijn?

Deze druppels en druppeltjes worden veroorzaakt door onregelmatigheden in de wand van de nevelkamer en op de loodplaat, alsook door verontreinigingen van de damp met bijvoorbeeld stofdeeltjes.

- 1.3: Waarom is het wenselijk dat de anti-protonen zo langzaam mogelijk gaan in het ATHENA experiment?

De kans dat een positron wordt ingevangen neemt toe als het anti-proton langer in de buurt is, en als de energie van anti-proton en positron allebei laag is, dat wil zeggen als de kinetische energie in het systeem van anti-proton en positron laag is, is de kans dat de binding tussen de twee meteen weer wordt opgebroken kleiner.

- 1.4: Waar zou de energie in het heelal vandaan kunnen zijn gekomen?

Het bewijsbaar goede antwoord hierop levert hoogst waarschijnlijk een prestigieuze prijs op. Er zijn wel speculaties, zoals bijvoorbeeld de mogelijkheid

van een zich afsplitsend stuk van een heelal dat een vacuümfaseovergang ondergaat en zich zo als losstaand stuk heelal kan ontwikkelen. De achterblijvers zien dat dan als een zwart gat.

Hoofdstuk 2

2.1: Hoe kunnen we in de quantummechanica achterhalen wat de kracht is die op een systeem wordt uitgeoefend als we de golffunctie daarvan kennen?

We moeten dan op de verschillende tijdstippen de verwachtingswaarde van de impuls, \vec{p} , berekenen. Vervolgens volgt de kracht uit $\vec{F} = d\vec{p}/dt$.

Het is niet altijd mogelijk om dit te doen. De toestand is niet altijd een eigentoestand van de impuls, waardoor de impuls geen observabele is. In dat geval is ook de kracht niet te achterhalen, c.q. niet gedefinieerd.

2.2: Reken zelf na dat de Schrödingervergelijking 2.11 kan worden verkregen door in de klassieke energierelatie $E = p^2/(2m)$ de energie E en impuls p te vervangen zoals in formule 2.21. Voor het gemak kan p 1 dimensionaal worden genomen.

We beginnen met de klassieke relatie tussen energie en impuls (in 1-dimensie)

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

En dan vullen we de quantumsubstitutie uit 2.21 in

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2$$

geeft wat vereenvoudigd $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

Beide kanten van het = teken van rechts met Ψ vermenigvuldigen geeft dan de Schrödingervergelijking $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$

2.3: Laat zien dat voor een vlakke golfoplossing $\Psi(x, t) = e^{-(i/\hbar)(\omega t - p_x x)}$ (analoog in 1 ruimtedimensie aan formule 2.13 die in 3 ruimtedimensies is) geldt dat $I = \Psi\Psi^*$ overal en altijd gelijk is aan 1. Waarom is deze golffunctie niet te normeren op de hele ruimte?

$$I = \Psi\Psi^* = e^{-(i/\hbar)(\omega t - p_x x)} e^{-(-i/\hbar)(\omega t - p_x x)} = e^{(i/\hbar)(\omega t - p_x x) - (i/\hbar)(\omega t - p_x x)} = e^0 = 1$$

Om te normeren op de hele ruimte nemen we de integraal van de absolute waarde in het kwadraat over de hele ruimte zoals in formule 2.23

$$\int_{\text{hele ruimte}} I(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dx = x|_{-\infty}^{\infty} = 2\infty$$

Dit antwoord levert dus oneindig op en is daarom niet goed interpreteerbaar als waarschijnlijkheid. Verder is normeren door te delen door oneindig ook niet gedefinieerd.

- 2.4: Als de plaats van een elektron bekend is tot beter dan 10^{-15} m (de afmeting van een proton), bereken dan de minimale onzekerheid op de impuls in eenheden eV ?

$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 \Rightarrow \Delta p \geq \hbar/(2\Delta x) = 1.054 \times 10^{-34}/(2 \times 10^{-15})$ kgm/s = $1.054 \times 10^{-34}/(2 \times 10^{-15}) \times 3 \times 10^8/(1.6 \times 10^{-19})$ eV = 0.1 GeV *waarbij de laatste vermenigvuldiging met de lichtsnelheid gedeeld door de lading van het proton in Coulomb wordt gebruikt om de eenheden naar GeV te brengen.*

- 2.5: Laat zien dat als de golffuncties f en g oplossingen zijn van de Schrödinger-vergelijking 2.11 de functie $h = f + g$ dat ook is. Waaraan moet de potentiaal U voldoen om dat zo te maken?

$$i\hbar \frac{\partial(f+g)}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial(f)}{\partial t} + i\hbar \frac{\partial(g)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 f}{\partial \vec{x}^2} + U f - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 g}{\partial \vec{x}^2} + U g = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2(f+g)}{\partial \vec{x}^2} + U(f+g)$$

mits $U f + U g = U(f+g)$. Dat laatste is het geval als U een zogenaamde lineaire operator is. Een speciaal geval daarvan is als U een gewone functie is van alleen \vec{x} en t . In dat geval is $U f$ een gewone vermenigvuldiging van complexe getallen en die is associatief, zodat geldt $U f + U g = U(f+g)$.

Hoofdstuk 3

- 3.1: Laat zien dat $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ invariant is onder Lorentztransformaties. (Doe dat door een willekeurige Lorentztransformatie toe te passen en te laten zien dat $c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$.)

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 (t - (v/c^2)x)^2 - (x - vt)^2 - y^2 - z^2 = c^2 t^2 - 2vtx + v^2 x^2 - x^2 + 2vtx - v^2 t^2 - y^2 - z^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

- 3.2: Beredeneer waarom de zogenaamde invariante massa $E^2 - \vec{p}\vec{p} c^2$ ook invariant moet zijn onder Lorentztransformaties.

$E^2 - \vec{p}^2 c^2$ is voor een vrij deeltje de (rust)massa van dat deeltje. Over de rustmassa van een deeltje zijn alle waarnemers het eens. Natuurlijk kunnen we ook, net als in de vorige opgave, de Lorentztransformaties expliciet toepassen. Ook dan zullen we vinden dat deze combinatie invariant is. $(E^2 - \vec{p}^2 c^2)/c^4$ wordt daarom ook wel de invariante massa genoemd.

- 3.3: Beschouw twee deeltjes met $(E_1/c, p_{x1}, p_{y1}, p_{z1})$ en $(E_2/c, p_{x2}, p_{y2}, p_{z2})$ als vierimpulsen. Bereken de invariante massa van het twee deeltjes systeem. Gebruik daarbij dat energie en impuls behouden zijn. Wat zou de betekenis van de invariante massa van het twee deeltjessysteem kunnen zijn?

Wegens energie en impulsbehoud geldt voor de energie en impuls van het tweedeeltjes systeem $E_{tot} = E_1 + E_2$ en $\vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Voor de invariante massa geldt dan

$$M_{tot}^2 c^2 = E_{tot}^2 / c^2 - \vec{p}_{tot}^2$$

Zelfs als de deeltjes 1 en 2 massaloos zijn en voor hun energie en impuls dus geldt dat $E = pc$, dan geldt nog:

$$M_{tot}^2 c^2 = 2E_1 E_2 / c^2 (1 - \cos \phi_{12})$$

waarbij ϕ_{12} de hoek in de drie-dimensionale ruimte tussen de deeltjes is. Deze laatste uitdrukking hoeft helemaal niet nul te zijn. De invariante massa van een twee deeltjessysteem is de totale energie van het systeem in het coördinatenstelsel waarin het zwaartepunt van het systeem stil staat.

- 3.4: Leid de oplossingen voor ω van formule 3.22 af door de vlakke golfoplossing van formule 3.21 in te vullen in de Klein-Gordon vergelijking 3.20.

We doen dit in 1 ruimtelijke dimensie voor. De generalisatie naar drie ruimtelijke dimensies is recht-toe-recht-aan. Invullen geeft

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + m^2 c^4 \Psi \Rightarrow \omega^2 c^2 \Psi = c^2 p_x^2 \Psi + m^2 c^4 \Psi \Rightarrow \omega = \pm \sqrt{p_x^2 + m^2 c^4}$$

- 3.5: Waarom heeft de Dirac vergelijking 3.31 vier onafhankelijke oplossingen?

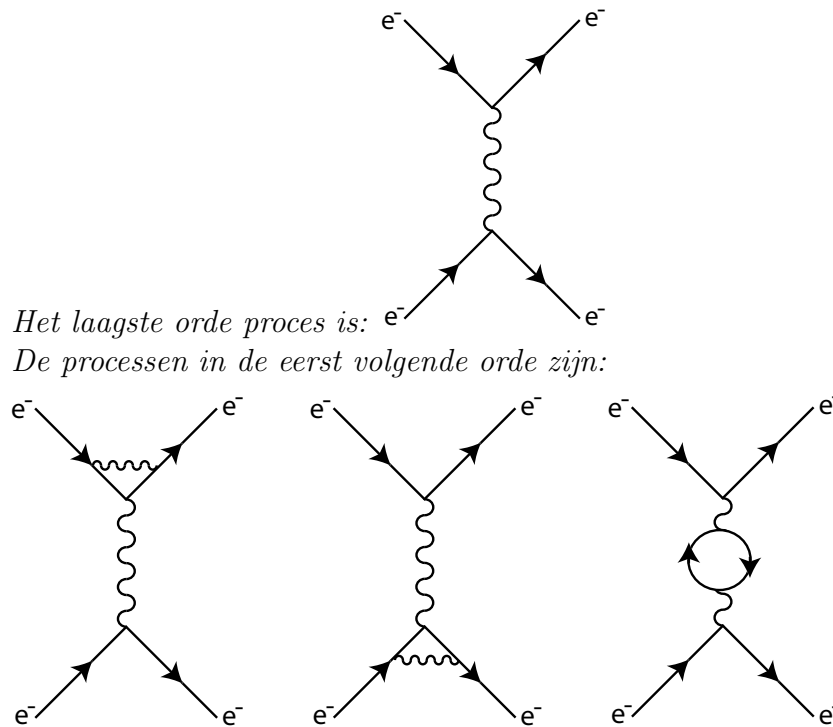
De Dirac vergelijking bestaat in feite uit vier vergelijkingen voor de vier componenten van de spinor die eraan voldoet. Als een of meer van de componenten van een spinor vast zou liggen bij keuze van de andere componenten, zouden drie of minder vergelijkingen nodig zijn. Dit is echter in tegenspraak met het feit dat de γ matrices ten minste vier dimensionaal moeten zijn om de vergelijking correct te laten zijn. Ergo, een Dirac spinor heeft vier onafhankelijke componenten.

Hoofdstuk 4

- 4.1: Behalve de U(1) symmetrie voor de complexe fase van golf functies, is natuurlijk ook de groep van Lorentztransformaties een symmetriegroep (de wereld is invariant onder Lorentztransformaties.) Bedenk welke interactie er bij de lokale ijsymmetrie van Lorentztransformaties hoort.

Dat is gravitatie. Maar zo makkelijk komen we er niet af. Als geprobeerd wordt een quantumveldentheorie te maken met als ijsymmetrie de lokale Lorentzgroep gaat er zoveel fout dat het nog niemand is gelukt dat te repareren.

- 4.2: Teken het laagste orde Feynmandiagram voor de verstrooiing van twee elektronen aan elkaar. Teken ook de volgende orde Feynmandiagrammen voor dit proces.



- 4.3: Probeer een Feynmandiagram te tekenen voor een proces met twee (anti-)fermionen die inkomen en drie (anti-)fermionen die uitgaan. De keuze voor fermion en anti-fermion mag voor elke externe lijn anders zijn.

Waarom lukt dit niet?

Dit lukt niet omdat het aantal deeltjes min het aantal anti-deeltjes niet behouden is. Dit verschil tussen aantallen deeltjes en anti-deeltjes is altijd behouden, bij elke interactie die we hier tegen zullen komen.

- 4.4: Probeer een Feynmandiagram te tekenen voor een proces met twee fermionen die inkomen en twee anti-fermionen die uitgaan.

Waarom lukt dat niet?

Dit lukt niet om dezelfde reden als voor opgave 4.3.

- 4.5: Bedenk waarom het belangrijk is om een grote luminositeit te bewerkstelligen voor botsingsexperimenten en hoe we die hoge luminositeit kunnen krijgen.

Bij gelijke werkzame doorsnede (en dat is een gegeven van de natuur), geeft een hogere luminositeit een groter aantal verstrooide, en dus te meten gevallen. De meetnauwkeurigheid zal door een beter statistische precisie in het algemeen toenemen (verbetert als de wortel uit het aantal waargenomen

vervallen.) Een hogere luminositeit kan worden bewerkstelligd door een zo groot mogelijk aantal inkomende deeltjes en doeldeeltje door een zo klein mogelijk oppervlak te laten gaan. Dat kan worden bereikt met intense bundels van inkomende deeltjes in een zo nauw mogelijke bundel en door een dicht doel. Het nadeel van een dicht doel is over het algemeen dat het dik moet worden gemaakt waardoor de plaats van de interactie moeilijker te voorspellen is.

Hoofdstuk 5

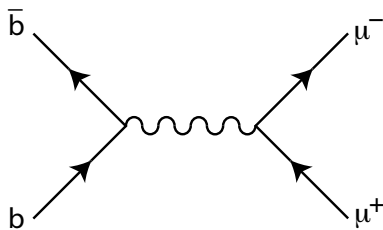
- 5.1: Tel per familie de quantumgetallen op voor alle deeltjes. Valt hier iets aan op?

De quantumgetallen voor de drie interacties tellen alledrie op tot nul of iets neutraals als we over alle deeltjes sommeren. Dit is een diep principe van ijtheorieën die bekend staat als de 't Hooft anomalie. Als deze sommaties niet nul op zouden leveren kunnen processen in hogere orde van de storingstheorie niet meer worden uitgerekend.

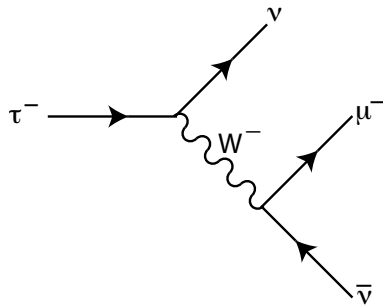
- 5.2: Verklaar waarom de productie van het J/ψ deeltje in hadron botsingen minder kritisch is dan in elektron-positron botsingen.

Hadronen zijn opgebouwd uit quarks. Deze quarks in het hadron hebben niet een bepaalde energie, maar hebben een verdeling over mogelijke energieën in een bepaald gebied. Hierdoor zijn er altijd wel combinaties van quark energieën in twee botsende hadronen die precies resonant een J/ψ kunnen maken, mits de energie van de hadronen hoog genoeg is om te beginnen. De hadron energie hoeft dus alleen maar hoog genoeg te zijn om J/ψ 's te produceren. Bij elektron-positron mikt dat veel nauwer. Als de energie niet precies de massa van de J/ψ is wordt die vrijwel niet geproduceerd, zelfs niet, of ook juist niet, als de energie (veel) hoger is dan de J/ψ massa.

- 5.3: Teken het Feynmandiagram voor het verval $\Upsilon \rightarrow \mu^+ \mu^-$.



- 5.4: Teken het Feynmandiagram van een τ verval in een μ . Vergeet de neutrino's niet.



5.5: Verklaar met behulp van de Feynmanregels waarom de annihilatie van een elektron-positron paar als functie van de invariante massa de vorm heeft van Fig. 4.5 (hfdst. 4).

Voor lage energie volgt de curve het $1/s^2$ gedrag van de foton propagator. Voor hogere energieën komt daar de Z -propagator bij die de vorm $1/(s - M_Z^2)^2$ heeft. Voor hele hoge energie valt het geheel weer af als $1/s^2$.

Hoofdstuk 6

6.1: Leid formule 6.22 af uit 6.21.

Allereerst stellen we vast dat:

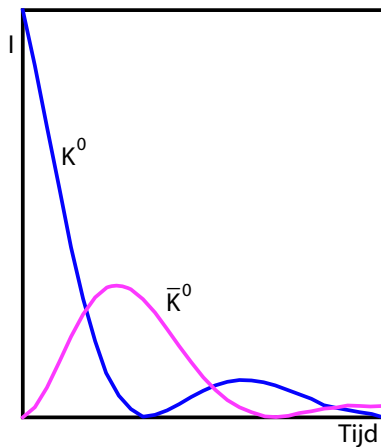
$$\begin{aligned}
 I(\bar{K}^0, t) &= \langle \bar{K}^0, t | \bar{K}^0, t \rangle \\
 &= \left(e^{+iM_L t - \Gamma_L t/2} \frac{1}{2} \langle K^0, t=0 | + e^{+iM_S t - \Gamma_S t/2} \frac{1}{2} \langle K^0, t=0 | \right) \\
 &\quad \times \left(e^{-iM_L t - \Gamma_L t/2} \frac{1}{2} |K^0, t=0\rangle + e^{-iM_S t - \Gamma_S t/2} \frac{1}{2} |K^0, t=0\rangle \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(e^{+iM_L t - \Gamma_L t/2} + e^{+iM_S t - \Gamma_S t/2} \right) \left(e^{-iM_L t - \Gamma_L t/2} + e^{-iM_S t - \Gamma_S t/2} \right) \\
 &\quad \times \langle K^0, t=0 | K^0, t=0 \rangle
 \end{aligned}$$

We gebruiken nu dat $\langle K^0, t=0 | K^0, t=0 \rangle = 1$ en werken de haakjes uit en krijgen:

$$I(\bar{K}^0, t) = \frac{1}{4} \left(e^{-\Gamma_L t} + e^{-\Gamma_S t} - 2e^{-(\Gamma_L + \Gamma_S)t/2} \cos(\Delta m t) \right).$$

Hierbij is gebruikt dat $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$.

6.2: Teken de hoeveelheid K^0 en \bar{K}^0 als een functie van de tijd als wordt begonnen met een pure K^0 bundel.



De totale hoeveelheid kaonen en anti-kaonen neemt exponentieel af in de tijd door het verval van deze deeltjes. Verder oscilleren de kaonen en anti-kanonen in elkaar. Bij elkaar leidt dat kwalitatief tot het plaatje dat hier wordt getoond.

- 6.3: Waarom kunnen K^0 en \bar{K}^0 wel in elkaar oscilleren, maar neutron en anti-neutron niet?

Een van de verschillen is dat neutron bestaat uit drie quarks en als het een anti-neutron zou worden uit drie anti-quarks zou bestaan. In dat geval is het aantal deeltjes min anti-deeltjes niet behouden. In het geval van neutrale kaonen is het aantal deeltjes min anti-deeltjes wel behouden.

- 6.4: Waarom zijn K^0 en \bar{K}^0 eigentoestanden van de sterke wisselwerking, maar niet van de zwakke wisselwerking ?

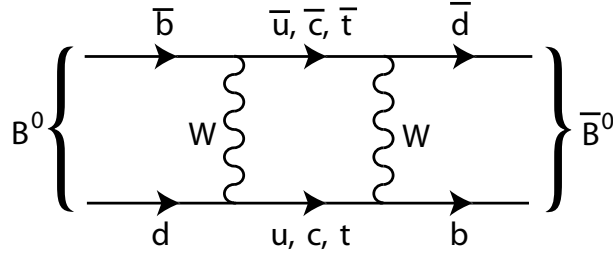
De mesonen K^0 en \bar{K}^0 worden door de sterke wisselwerking gemaakt en zijn pure eigentoestanden in termen van de verschillende quarks waaruit ze bestaan. Deze mesonen vervallen door de zwakke wisselwerking en wel in een 2- of 3-pion toestand. Dit zijn min of meer de CP eigentoestanden die dan dus kennelijk de zwakke eigentoestanden zijn.

- 6.5: Bedenk een experiment om nauwkeurig ϵ'/ϵ te meten. Welke experimentele condities zijn hier voor belangrijk ?

Belangrijk voor een meting van ϵ'/ϵ is dat zoveel mogelijk systematische onzekerheden in het experiment tegen elkaar wegvallen. Dit kan worden bereikt door op dezelfde tijd met dezelfde detector de verschillende vervallen te meten. Dus we willen een K^0 en een \bar{K}^0 bundel over elkaar heen in het experiment hebben, maar wel van elk verval weten of dat van een K^0 of een \bar{K}^0 was. Er zijn mogelijkheden om dat vast te stellen bij productie. Het NA35 experiment was het eerste experiment dat een dergelijke methode gebruikte.

Hoofdstuk 7

- 7.1: Teken het equivalent van het Feynmandiagram in Fig. 6.2 voor neutrale B mesonen (die bestaan uit $\bar{b}d$ en voor het anti-B meson $b\bar{d}$.)



- 7.2: Ga door gebruik te maken van het Feynmandiagram van Fig. 6.2 na aan welk product van CKM-matrix elementen uitgedrukt in de mixinghoeken θ_{ij} de neutrale kaon oscillatie overgangswaarschijnlijkheid proportioneel is. (Zie ook de afleiding van formule 7.24.)

*De overgangsamplitude is evenredig aan $V_{cd}^*V_{cs}$, dus de overgangswaarschijnlijkheid is evenredig aan het kwadraat van de absolute waarde daarvan:*

$$\begin{aligned} & V_{cd}^*V_{cs}V_{cd}V_{cs}^* \\ &= |V_{cd}|^2|V_{cs}|^2. \end{aligned}$$

Invullen van de hoeken met behulp van formule 7.19 geeft:

$$\begin{aligned} & |(-s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta})|(c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta})|^2 \\ &= (s_{12}^2c_{23}^2 + c_{12}^2s_{23}^2s_{13}^2 + 2s_{12}c_{23}c_{12}s_{23}s_{13}\cos\delta) \\ &\quad \times (c_{12}^2c_{23}^2 + s_{12}^2s_{23}^2s_{13}^2 - 2c_{12}c_{23}s_{12}s_{23}s_{13}\cos\delta) \\ &\approx s_{12}^2c_{12}^2c_{23}^2, \end{aligned}$$

waarbij de laatste benadering gebruik maakt van het feit dat termen met s_{13} te verwaarlozen zijn in vergelijking met termen waarin een dergelijke factor niet voorkomt.

- 7.3: Schat de grootte van $V_{cd}^*V_{cs} - V_{cd}V_{cs}^*$ af met behulp van de gegevens in formules 9.6 en 7.26.

$$\begin{aligned} V_{cd}^*V_{cs} &= (-s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta})(c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta}) \\ &= c_{23}s_{23}s_{13} [(s_{12}^2 - c_{12}^2)\cos\delta + i\sin\delta] \text{ en dus} \\ V_{cd}^*V_{cs} - V_{cd}V_{cs}^* &= 2c_{23}s_{23}s_{13}\sin\delta \approx 2 \times 1 \times 0.04 \times 0.004 \times \sin\delta \approx 3 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

- 7.4: Zijn er nog andere systemen dan die van neutrale kaonen te bedenken waarin CP schending waar te nemen zou moeten zijn? Zo ja, geef een voorbeeld. *Ja, ook in het neutrale B meson systeem of in het neutrale D meson systeem kan CP schending optreden. In het neutrale B meson systeem is dat heel duidelijk en kan ook goed worden gemeten (zie het volgende hoofdstuk). In*

het D meson systeem blijkt het CP schendingseffect heel klein te zijn en experimenteel praktisch niet te meten.

- 7.5: Hoeveel complexe fases voor quark menging zouden er zijn als er vier families van fermionen zouden zijn ?

In totaal zijn er in een SU(4) systeem (4×4 unitaire matrices met determinant 1) $4 \times 4 \times 2$ reële getallen vrij te kiezen, met 4×4 randvoorwaarden vanwege het unitaire karakter met determinant 1. Van de 16 overgebleven vrijheidsgraden kunnen we vier reële hoeken kiezen, de vier Eulerhoeken, en blijven er nog 12 complexe fases om te kiezen over. Daarvan kunnen we zeven relatieve complexe fases elimineren, omdat we in dit geval acht verschillende quarks hebben en dus zeven relatieve fases. Er blijven dan dus nog 5 complexe fases over die vrij te kiezen zijn en verder niet te elimineren.

Hoofdstuk 8

- 8.1: Wat is de kans dat in een geval waarin een B_d en een \bar{B}_d als paar worden geproduceerd, beide mesonen in hun anti-deeltje overgaan voordat ze vervallen ?

De kans dat beide B mesonen naar hun anti-deeltje mengen is:

$$\chi_d^2 = 0.186^2 = 3.5\%.$$

- 8.2: Kan in het individuele geval van de vorige vraag experimenteel worden vastgesteld dat er menging is ?

De menging kan niet worden vastgesteld door naar het verval van de B mesonen te kijken. Wel kan worden gekeken naar de rest van de hadron jet waarin het B meson is geproduceerd. Bijvoorbeeld, in een aantal gevallen is het neutrale B meson het vervalsproduct van een aangeslagen toestand van het B meson en wordt in het verval een ander geladen deeltje, zoals een pion, geproduceerd, die de oorspronkelijke lading van het geproduceerde b-quark verraadt.

- 8.3: Een spectaculaire meting van de hoek β in de unitairteitsdriehoek staat op naam van het OPAL experiment, die een waarde $\sin(2\beta) < -1$ maten. Waarom is deze meting eigenlijk een probleem ? Hoe kan een goede meting toch een dergelijk resultaat op leveren ?

De waarde van een sin moet natuurlijk tussen -1 en 1 liggen en kan dus nooit kleiner zijn dan -1. Dat dit in een experimentele meting toch mogelijk is komt doordat er achtergrond moet worden afgetrokken van de meting. In dit geval is kennelijk teveel achtergrond afgetrokken, maar moest dat teveel toch als beste schatting worden beschouwd. Dat kan als de onzekerheid op

de achtergrond bepaling groot is. In dit geval was die onzekerheid groter dan het verschil tussen de gemeten waarde voor $\sin(2\beta)$ en het fysisch mogelijke interval.

- 8.4: Waarom levert de meting van $\sin(2\beta)$ in Fig. 8.3 en 8.4 twee mogelijke kegels op ?

Voor een vaste waarde $\sin(2\beta)$ zijn er telkens twee hoeken β tussen -90° en 90° die voldoen. Daarbij komen dan ook nog de corresponderende hoeken plus 180° . Bijvoorbeeld voor $\sin(2\beta) = 0.5$ voldoen de hoeken 15° en 75° en dan dus ook de hoeken 195° en 255° . Omdat de onzekerheid zich als een wig om de hoeken laat zien, ziet elk paar van hoek en hoek plus 180° er uit als een kegel.

- 8.5: Bij welke temperatuur zou de verhouding tussen het aantal baryonen en het aantal fotonen in het heelal wel goed uitkomen in formule 8.20 ?

Het gemeten aantal $n_b/n_\gamma = 6.1 \times 10^{-10}$. Formule 8.20 geeft dit getal als: $n_b/n_\gamma = 0.01 J/T^{12}$, met het Jarlskog getal $J = 3 \times 10^{-5}$. Invullen geeft dan $T^{12} \approx 3 \times 10^{-7} / (6 \times 10^{-10}) = 500$. Dat correspondeert met $T = 1.68 \text{ GeV}$. Het is niet duidelijk met welke faseovergang deze temperatuur (energie) dan moet corresponderen.

Hoofdstuk 9

- 9.1: Als een elektron-neutrino door gewone materie gaat kan die ook interactie hebben met elektronen via de geladen stroom (W boson uitwisseling.) Bedenk wat het gevolg hiervan is voor neutrino oscillaties, als neutrino's door materie gaan.

Dit effect is analoog aan het regeneratieeffect bij een kaon bundel. Als een neutrino bundel die naar elektron-neutrino's mengt door materie gaat zullen er dus weer evenveel neutrino's van de verschillende massa eigentstanden verschijnen. Dit heet het GSW effect.

- 9.2: Bereken bij welke bundelenergie voor het neutrino de oscillatie maximaal is als de detector 800 km van de neutrinobron af staat. We beginnen met een zuivere muon-neutrino bundel.

Hiervoor kunnen we formule 9.1 gebruiken. De factor $\sin^2(2\theta)$ is een factor die er niet toe doet. De oscillatiewaarschijnlijkheid is het grootst als het argument van de andere sinus functie $\pi/2$ ($= 90^\circ$ is. Dus als $1.27\Delta m^2 L/E_\nu = \pi/2$ met de verschillende getallen in de eenheden zoals in de formule aangegeven. In ons geval is $L = 800 \text{ km}$ en is $\Delta m^2 \approx 3 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$ voor muon-tau-

neutrino oscillatie. Invullen geeft dan: $E_\nu = (2.54/\pi) \times 3 \times 10^{-3} \times 800 \approx 2 \text{ GeV}$.

- 9.3: Bij een vaste afstand van een neutrino detector tot de neutrino bron en bij een vaste neutrino energie kan toch de oscillatiewaarschijnlijkheid bij de detector worden beïnvloed door de bundel niet helemaal precies op het experiment te richten. Beredeneer waarom dat zo is. Wat is het nadeel van deze methode ?

De neutrino's worden gemaakt in het verval van een pion in een muon en een muon-neutrino. In het ruststelsel van het pion gebeurt dat verval in alle richtingen voor het neutrino. Als de beweging van het pion wordt meegenomen krijgen de neutrino's die in de richting van de pionbeweging vervallen een veel grotere energie dan de neutrino's die in andere richtingen vervallen. De verschillende vervalsrichtingen van het neutrino veroorzaakt ook een zekere spreiding in openingshoek voor de neutrino bundel. De neutrino energie is gecorreleerd met de hoek die het neutrino maakt ten opzichte van de centrale as van de neutrino bundel. Dus kan de neutrino energie gevarieerd worden door naar neutrino's te kijken die een bepaalde hoek maken met de centrale bundel as. Dus door de bundelas iets van het experiment af te richten kan een andere gemiddelde neutrino energie worden bereikt en daarmee volgens formule 9.1 een andere oscillatielengte. Het nadeel van deze methode is dat de neutrino-flux afneemt van de bundelas af. Dus dat het aantal gemeten gevallen afneemt.

- 9.4: Op dit moment worden twee neutrino massaverschillen gemeten. Het kan nu zo zijn dat de lichtste twee neutrino's een klein massaverschil hebben en het derde neutrino een stuk zwaarder is, of dat de zwaarste twee neutrino's een klein massaverschil hebben en het lichtste een stuk lichter is. Bedenk welke meting nodig is, of welke metingen nodig zijn, om eenduidig vast te stellen hoe de massa hiërarchie precies in elkaar zit.

Als de oscillatie, en daarmee het massaverschil kan worden gemeten voor welbepaalde overgang, bijvoorbeeld die van muon-neutrino naar die van tau-neutrino, en dan voor elke mogelijke overgang, dan kan de hiërarchie precies worden vastgelegd. Als we er van uit gaan dat er maar drie neutrino soorten zijn hoeven we maar twee overgangen te bepalen want dan volgt de derde er uit. Wel moeten we dus zowel de begin als de eindtoestand weten, dus hebben we verschijningsexperimenten nodig die eenduidig kunnen vaststellen bijvoorbeeld hoeveel tau-neutrino's er in een muon-neutrino bundel zijn verschenen op een bepaalde afstand bij een bepaalde bundelenergie. We kunnen niet volstaan met alleen maar het vaststellen van het verdwijnen van bijvoorbeeld muon-neutrino's uit een muon-neutrino bundel.

9.5: Bedenk experimenten om elk van de complexe fases van de MNS matrix te meten.

Een directe meting van de complexe fase δ in de MNS matrix kan bijvoorbeeld analoog aan die voor het kaon systeem worden gedaan door te kijken naar de CP eigentoestanden van een muon-neutrino en een muon en de oscillatie daartussen. Dit is praktisch niet uitvoerbaar, want een muon en een muon-neutrino vormen niet een voldoende stabiele gebonden toestand. De enige andere manier is dus om de verschillende matrix elementen van de MNS matrix te meten en vast te stellen dat ze in de unitariteitsdriehoek niet op één lijn liggen, maar dat de drie zijden ene driehoek vormen met positieve oppervlakte.

De complexe Majorana fases zijn zeer moeilijk experimenteel toegankelijk. Eén van de manieren om in ieder geval een combinatie ervan te meten is in zogenaamd neutrino- β verval. In dit proces vervallen twee kerntegelijk en absorbeert het ene verval het neutrino van het andere verval als anti-neutrino (dat kan dus alleen als het neutrino zijn eigen anti-deeltje is, dus als het neutrino een Majorana deeltje is.) Naar deze mogelijkheid wordt naarstig gezocht, maar experimenten worden bemoeilijkt door de lage energie niveaus die er bij betrokken zijn en de bewegingsenergie van de kern zelf die van dezelfde grootte is en makkelijk een signaal nadoet.

Appendix A

A.1:

$$\begin{aligned}(1 + 2i) + (2 + i) &= 3 + 3i \\ (5 - 4i) + (3.5 + 2i) &= 8.5 - 2i \\ (-3.5 - 1.5i) + (-0.5 + 0.5i) &= -4 - i\end{aligned}$$

A.2:

$$\begin{aligned}(1 + 2i) \cdot (2 + i) &= 5i \\ (5 - 4i) \cdot (3.5 + 2i) &= 25.5 - 4i \\ (-3.5 - 1.5i) \cdot (-0.5 + 0.5i) &= 2.5 - i\end{aligned}$$

A.3: Bepaal van de complexe getallen in opgave A.2 de absolute waarde en de complexe fase.

$$\begin{array}{llll} |1 + 2i| &= \sqrt{5} \approx 2.24 & \text{fase}(1 + 2i) &= \arctan(2) \approx 1.11 \\ |2 + i| &= \sqrt{5} \approx 2.24 & \text{fase}(2 + i) &= \arctan(1/2) \approx 0.464 \\ |5 - 4i| &= \sqrt{41} \approx 6.40 & \text{fase}(5 - 4i) &= \arctan(-4/5) \approx -0.675 \\ |3.5 + 2i| &= \sqrt{16.25} \approx 4.03 & \text{fase}(3.5 + 2i) &= \arctan(4/7) \approx 0.519 \\ |-3.5 - 1.5i| &= \sqrt{14.5} \approx 3.81 & \text{fase}(-3.5 - 1.5i) &= \arctan(3/7) \approx 0.405 \\ |-0.5 + 0.5i| &= \sqrt{0.5} \approx 0.707 & \text{fase}(-0.5 + 0.5i) &= \arctan(-1) \approx -0.785\end{array}$$

A.4: Bereken de producten van opgave A.2 in termen van absolute waarden en complexe fasen.

$$\begin{aligned} 2.24e^{1.11i} \cdot 2.24e^{0.464i} &= 5e^{1.57i} \\ 6.40e^{-0.675i} \cdot 4.03e^{0.519i} &= 25.8e^{-0.156i} \\ 3.81e^{0.405i} \cdot 0.707e^{-0.785i} &= 2.69e^{-0.38i} \end{aligned}$$

A.5: Laat met behulp van formule A.12 zien dat in lineaire transformaties de oorsprong weer op de oorsprong wordt afgebeeld.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 0 \\ a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A.6: Ga na aan welke eisen de coëfficiënten a_{ij} in formule A.12 moeten voldoen, zodat elk punt in het oude vlak op een uniek punt van het nieuwe vlak wordt afgebeeld en zodat alle punten in het nieuwe vlak door de afbeelding worden bereikt.

Een manier om hier tegenaan te kijken is dat de betreffende matrix een inverse moet hebben. Dat is dan en slechts dan het geval als de determinant ongelijk is aan nul. Dus voor de coëfficiënten moet dan gelden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \Leftrightarrow a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$$

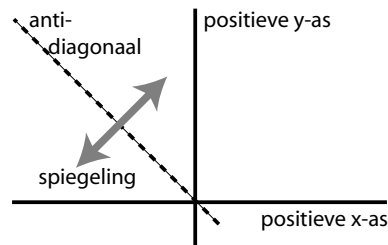
A.7: Bereken de determinant van de spiegeling van formule A.21 en de rotatie van formule A.22.

Voor de rotatie kan worden gebruikt dat voor alle hoeken ϕ geldt: $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$$

$$\begin{vmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{vmatrix} = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$$

A.8: Schrijf de matrix op die hoort bij spiegeling in de anti-diagonaal van het platte vlak. De anti-diagonaal is de lijn die precies tussen de negatieve x -as en de positieve y -as loopt, zie de figuur rechts.



De positieve x-as gaat naar de negatieve y-as en de positieve y-as gaat naar

de negatieve x -as, dus

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bibliografie

- [1] AMS Collaboration, *Search for Antihelium in Cosmic Rays*, Phys. Lett. B461 (1999) 387–396;
AMS Collaboration, *The Alpha Magnetic Spectrometer (AMS) on the International Space Station, Part I, Results from the test flight on the Space Shuttle*, Physics Reports, Vol. 366/6 (2002) 331–404.
- [2] Meer informatie over de Alpha Magnetic Spectrometer is te vinden op het WWW: “http://ams.cern.ch/AMS/ams_homepage.html”.
- [3] C. D. Anderson, *The apparent existence of easily deflectable positives*, Science 76 (1932) 381;
C. D. Anderson, *The positive electron*, Phys. Rev. 43 (1933) 491.
- [4] M. Amoretti et al., *Production and detection of cold antihydrogen atoms*, Nature 419 (2002) 456.
- [5] Afbeelding overgenomen van het WWW: “<http://athena.web.cern.ch/athena/>”.
- [6] A. D. Sakharov, *Violation of CP invariance, C Asymmetry, and Baryon Asymmetry of the Universe*, JETP Lett. 5 (1967) 24–27.
- [7] J.C. Evans Jr. en R.I. Steinberg, Science 197 (1977) 989.
- [8] G. 't Hooft, *Symmetry Breaking through Bell-Jackiw Anomalies*, Phys. Rev. Lett. 37 (1976) 8.
- [9] Referentie naar de originele paper van de wet van Hubble.
- [10] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, R. Turlay, Phys. Rev. Lett. 13 (1964) 138–140.
- [11] J. J. Thomson, *Cathode Rays*, Phil. Mag. 44 (1897) 293.
Deze publicatie kan worden gevonden op het WWW als “<http://webserver.lemoyne.edu/faculty/giunta/thomson1897.html>”.

- [12] M. Planck, *Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum* Verhandl. Deutsch. Phys. Ges. 2 (1900) 237.
- [13] A. Einstein, Ann. Phys. 17 (1905) 132.
- [14] C. Jönsson, Zeitschrift für Physik 161 (1961) 454.
- [15] Louis de Broglie, *Radiations – Ondes et quanta*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Vol. 177 (1923) 507.
- [16] C. J. Davisson, *Are Electrons Waves?*, Franklin Institute Journal 205 (1928) 597.
- [17] Deze figuur is overgenomen van het WWW:
“<http://hackensackhigh.org/~rkc2/diffraction.jpg>”.
- [18] Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687, vertaald in het Engels door Andrew Motte, *The Principia*, Prometheus Books (Great minds series), New York, 1995.
- [19] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A133 (1931) 60.
- [20] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B79 (1974) 276;
A. Polyakov, JETP Lett. 20 (1974) 194.
- [21] W. Pauli and V. Weisskopf *Über die Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung* Helv. Phys. Acta 7 (1934) 708-731.
- [22] Richard P. Feynman, *QED de theorie van licht en materie*, Aramith Uitgevers, 1988.
- [23] E. Rutherford, *The Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom*, Phil. Mag. 21 (1911) 669.
- [24] H. Geiger en E. Marsden, Phil. Mag. 25 (1913) 604.
- [25] E. Rutherford, *Collision of Alpha Particles with Light Atoms*, Phil. Mag. 37 (1919) 537.
- [26] E. Rutherford, *Nuclear Constitution of Atoms*, Proc. of the Royal Soc., A97 (1920) 374.
- [27] J. Chadwick, *Possible Existence of a Neutron*, Nature 129 (1932) 312;
J. Chadwick, *The Existence of a Neutron*, Proc. of the Royal Soc., A136 (1932) 692.

- [28] C.L. Cowan, Jr., F. Reines, F.B. Harrison, H.W. Kruse and A.D. McGuire, *Detection of the Free Neutrino: A Confirmation* Science 124 (1956) 103.
- [29] J.C. Street en E.C. Stevenson, *New Evidence for the Existence of a Particle Intermediate Between the Proton and Electron*, Phys. Rev. 52 (1937) 1003.
- [30] G.D. Rochester, C.C. Butler, *Evidence for the existence of new unstable elementary particles*, Nature 160 (1947) 855.
- [31] A. Pais, *Some remarks on the V particles*, Phys. Rev. 86 (1952) 663;
M. Gell-Mann, *Isotopic Spin and New Unstable Particles*, Phys. Rev. 92 (1953) 833.
- [32] G. Danby *et al.*, Phys. Rev. Lett. 9 (1962) 36.
- [33] J.E. Augustin *et al.*, *Discovery of a Narrow Resonance in e^+e^- Annihilation*, Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 1406.
- [34] J.J. Aubert *et al.*, *Experimental Observation of a Heavy Particle J*, Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 1404.
- [35] S.L. Glashow, J. Iliopoulos, L. Maiani, *Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry*, Phys. Rev. D2 (1970) 1285.
- [36] G.S. Abrams *et al.*, *The Discovery of a Second Narrow Resonance in e^+e^- Annihilation*, Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 1453.
- [37] DONUT Collab., K. Kodama *et al.*, Phys. Lett. B504 (2001) 218.
- [38] S.W. Herb *et al.*, *Observation of a Dimuon Resonance at 9.5 GeV in 400 GeV Proton-Nucleus Collisions*, Phys. Rev. Lett. 39 (1977) 252.
- [39] CDF Collab., F. Abe *et al.*, *Evidence for Top Quark Production in $\bar{p}p$ Collisions at $\sqrt{s} = 1.8$ TeV*, Phys. Rev. D50 (1994) 2966; Phys. Rev. Lett. 73 (1994) 225;
DØ Collab., S. Abachi *et al.*, *Observation of the Top Quark*, Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 2632.
- [40] C.S. Wu, Phys. Rev. 105 (1957) 1413.
- [41] T.D. Lee en C.N. Yang, Phys. Rev. 104 (1956) 254.
- [42] K. Lande *et al.*, Phys. Rev. 103 (1956) 1901.
- [43] M. Gell-Mann, A. Pais, Phys. Rev. 97 (1955) 1387.

- [44] H. Burkhardt *et al.*, Phys. Lett. B206 (1988) 169;
G.D. Barr *et al.*, Phys. Lett. B317 (1993) 233;
L.K. Gibbons *et al.*, Phys. Rev. Lett. 70 (1993) 1203;
V. Fanti *et al.*, Phys. Lett. B465 (1999) 335.
- [45] N. Cabibbo, *Unitary symmetry and leptonic decays*, Phys. Rev. Lett. 10 (1963) 531.
- [46] M. Kobayashi and T. Maskawa, *CP-violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction*, Prog. Theor. Phys. 49 (1973) 652.
- [47] OPAL Collab., G. Abbiendi *et al.*, Phys. Lett. B493 (2000) 266.
- [48] LHCb Collab., R. Antunes Nobrega *et al.*, Technical Proposal and Technical Design Reports, 1998-2003,
WWW: “<http://lhcb.web.cern.ch/lhcb/TDR/TDR.htm>”.
- [49] BTeV Collab., A. Kulyavtsev *et al.*, *Proposal for an Experiment to Measure Mixing, CP Violation and Rare Decays in Charm and Beauty Particle Decays at the Fermilab Collider – BTeV*, Mei 2000,
WWW: “<http://www-btev.fnal.gov/DocDB/0000/000066/002/index.html>”.
- [50] C. Jarlskog, Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 1039.
- [51] Particle Data Group, K. Hagiwara *et al.*, Phys. Rev. D66 (2002) 010001.
- [52] UA1 Collab., C. Albajar *et al.*, Phys. Lett. B186 (1987) 247.
- [53] ARGUS coll., H. Albrecht *et al.*, Phys. Lett. B192 (1987) 245.
- [54] R. Davis Jr., D.S. Harmer and K.C. Hoffman, Phys. Rev. Lett. 21 (1968) 1205.
- [55] J.N. Bahcall., Phys. Rev. Lett. 12 (1964) 300.
- [56] R. Davis Jr., Phys. Rev. Lett. 12 (1964) 303.
- [57] B. Pontecorvo, J. Exptl. Theoret. Phys. 33 (1957) 549;
B. Pontecorvo, J. Exptl. Theoret. Phys. 34 (1958) 247.
- [58] O. Elgaroy *et al.*, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 061301.
- [59] SuperKamiokande Coll., Y. Fukuda *et al.*, Phys. Lett. B433 (1998) 9 en
Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 1562.

- [60] SNO Collab., Q.R. Ahmad *et al.*, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 011301;
SNO Collab., Q.R. Ahmad *et al.*, Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 011302.
- [61] Z. Maki, M. Nakagawa, S. Sakata, *Remarks on the Unified Model of Elementary Particles*, Prog. Theor. Phys. 28 (1962) 870.
- [62] B. Achkar *et al.*, Nucl. Phys. B434 (1995) 503;
M. Apollonio *et al.*, Phys. Lett. B466 (1999) 415;
F. Boehm *et al.*, Phys. Rev. D64 (2001) 112007.
- [63] Gerard 't Hooft, *De bouwstenen van de schepping*, 2002, Prometheus Amsterdam, ISBN 90-446 0145 8. Hiervan zullen de eerste 18 hoofdstukken worden gebruikt, waarbij ik hier en daar wat oversla.
- [64] Steven Weinberg, *De eerste drie minuten*, 1983, Natuur en Techniek Maastricht/Brussel, ISBN 90-701 5732 2.

Index

- Abraham Pais, 55, 74
- Alpha Magnetic Spectrometer, 1
- AMS experiment, 1
- Anderson, 3
- annihilatie, 6, 7
- anti-materie, 1
- anti-waterstof, 5
- ARGUS experiment, 91
- ATHENA experiment, 5

- B meson, v
- Born interpretatie, 22
- botsing, 39
- Burton Richter, 56

- C symmetrie, 8, 69
- C.N. Yang, 71
- C.S. Wu, 70
- Cabibbo-Kobayashi-Maskawa
matrix, 85
- CDF, 59
- Cecilia Jarlskog, 99
- CERN laboratorium, 5
- Christenson, 8, 74
- CKM matrix, 81, 85
- Clifford Butler, 55
- Clyde Cowan, 54
- CP symmetrie, 8, 69
- CPT symmetrie, 69
- Cronin, 8, 74

- $D\emptyset$, 59
- Davisson, 16
- de Broglie, 16

- Dirac, 3, 34
- Dirac vergelijking, 35

- E.C. Stevenson, 54
- Edward Marsden, 53
- eerste wet van Newton, 20
- elektromagnetische koppelings-
constante, 43
- elektron, 3
- elektronbron, 117
- Enrico Fermi, 54
- Ernest Rutherford, 53
- Ettore Majorana, 107
- eV, 16

- Feynman, 43
- Feynmandiagram, 39
- fijnstructuurconstante, 43
- Fitch, 8, 74
- foton, 6
- Fourierreeks, 24
- Fred Reines, 54

- Galileitransformatie, 29
- George Rochester, 55
- Germer, 16
- Gorden, 3
- Gordon, 33
- gulden regel van Fermi, 46
- gulden regel van Fermi voor
botsingen, 47

- Hans Geiger, 53
- Heisenberg, 23

- interacties, 39
- International Space Station (ISS), 1
- J. Iliopoulos, 57
- J.C. Street, 54
- J.J. Thomson, 11
- Jack Steinberger, 55
- James Chadwick, 53
- Jarlskog invariant, 99
- John Bahcall, 101

- kaon, v, 8, 69
- Klein, 3, 33
- Klein-Gordon vergelijking, 33
- Kobayashi, 85
- koppelingsconstante, 43
- kosmische straling, 3

- Lederman, 73
- lengtecontractie, 29
- Leon Lederman, 55, 59
- lichtsnelheid, 27
- Lorentz transformatie, 33
- Lorentzcontractie, 29
- Lorentztransformatie, 29
- Luciano Maiani, 57
- luminositeit, 47
- Lund model, 66

- Majorana deeltje, 107
- Martin Perl, 57
- Masami Nakagawa, 106
- Masatoshi Koshihara, 106
- Maskawa, 85
- materie, 1
- Max Born, 22
- Melvin Schwartz, 55
- MNS matrix, 106
- muon opslagring, 30
- Murray Gell-Mann, 74

- neutrino, 54

- neutron, 53
- nevelkamer, 3
- Newton, 18
- Nicola Cabibbo, 82
- Noether, 40

- onzekerheidsrelatie van Heisenberg, 23
- overgangsamplitude, 45
- overgangswaarschijnlijkheid, 45

- P symmetrie, 8, 69
- Planck, 12
- positron, 3
- potentiële energie, 20
- proton, 53
- protonbron, 118

- QED, 42
- quantum elektrodynamica, 42
- quantummechanica, 3, 11, 33
- quantumsubstitutie, 22

- Raymond Davis Jr., 101
- relativiteitstheorie, 3, 27, 33
- Riccardo Giacconi, 106

- Sacharov, 6, 8
- Sakata, 106
- Samuel C.C. Ting, 56
- Schrödinger, 3, 18
- Schrödinger vergelijking, 21
- Sheldon Glashow, 57
- Standaard Model, iv, 51
- SuperKamiokande, 103
- superpositie van golf functies, 23

- T symmetrie, 8, 69
- T.D. Lee, 71
- tijddilatatie, 30
- Turlay, 8, 74
- tweede wet van Newton, 18

- UA1 experiment, 91

Van de Graaf generator, 118

vervalsbreedte, 46

vierimpuls, 33

viervector, 32

vlakke golf, 21

waarschijnlijkheidsinterpretatie, 22

Weisskopf, 34

werkzame doorsnede, 46

wiel van Fizeau, 27

Wolfgang Pauli, 34, 54

Ziro Maki, 106