Speciale Relativiteitstheorie

Bij het eerstejaars college aan de
Radboud Universiteit Nijmegen

Sijbrand de Jong
Radboud Universiteit Nijmegen/NIKHEF
Toernooiveld 1
6525 ED Nijmegen
email: sijbrand@hef.ru.nl

21 augustus 2008, versie 3.00

Inhoudsopgave

Voorwoord

Het college Speciale Relativiteitstheorie is een inleiding in een van de pijlers van de moderne fysica. De Speciale Relativiteitstheorie is gelanceerd door Einstein in juni 1905 in de publicatie *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* in de Annalen der Physik. De theorie heette overigens toen nog niet zo. Het centrale van het relativiteitsprincipe is later duidelijker geworden en de toevoeging speciaal werd vooral relevant na publicatie van de Algemene Relativiteitstheorie in 1916.

Dit college is opgehangen aan hoofdstuk 39 van Serway [4]. De behandeling daar is echter nogal oppervlakkig en in deze syllabus zal de theorie aanzienlijk meer worden uitgediept en wiskundiger worden gemaakt. Een meer wiskundige kijk op de relativiteitstheorie is noodzakelijk om die breder in te zetten en met name voor de toepassing in de algemene relativiteitstheorie, de elektrodynamica en de relativistische quantummechanica waarmee de student die niet afhaakt nog in aanraking zal komen.

Het college duurt zeven weken. Voor elke week is in deze syllabus een hoofdstuk geschreven en de tentamenstof is wat er in de hoofdstukken 1 t/m 7 is behandeld. Hoofdstuk 8 is een toegift over de algemene relativiteitstheorie en vooral bedoeld als lekkermakertje voor de verdere studie. *Hoofdstuk 8 valt* **niet** *onder de tentamenstof.*

Deze syllabus is aan het eind van het college in 2005 voor het eerst volledig afgemaakt, in 2005-2006 zijn enkele kleine dingen rechtgezet en tijdens het college van najaar 2006 zullen meer kleine aanpassingen worden gemaakt.

Sijbrand de Jong, 20 september 2006.

Hoofdstuk 1

Van Klassieke Mechanica naar Relativiteitstheorie

1.1 Klassieke Mechanica

De mechanica is de leer die zich bezighoudt met de beweging van objecten. Beweging van objecten ervaren we naïef als de verandering van de plaats van een object in de tijd. Om dit preciezer te maken moeten we zowel de plaats definiëren als zeggen wat we met tijd bedoelen. We beginnen door een vaste *waarnemer* aan te nemen. De rol van de waarnemer zal cruciaal blijken te zijn.

Voor de definitie van plaats maken we gebruik van een Cartesisch assenstelsel. Ten opzichte van een waarnemer definiëren we drie richtingen in de ruimte, zodat de drie richtingen loodrecht op elkaar staan. Eén van de drie richtingen noemen we de x-as, een van de andere richtingen de y-as. Er blijkt dan een unieke richting te zijn die loodrecht op de x-as en de y-as staat en aan de "rechter hand regel" voldoet. Deze noemen we de z-as. De rechter handregel zegt dat als je de vingers van je rechterhand in de richting laat gaan van de x-as naar de y-as, dan wijst je duim in de z-richting. De relatieve richtingen van de assen ligt hiermee vast. De waarnemer kan ze echter als geheel nog willekeurig in de ruimte leggen. We definiëren nu een coördinatenstelsel door op elk van de drie richtingen een eenheidsafstand vast te leggen. De standaard hiervoor is de meter, klassiek gedefinieerd als de lengte van een speficieke staaf die de standaardmeter wordt genoemd. Langs elke as kunnen we nu een afstand afmeten door die met de standaard meter af te passen. We laten alle waarnemers afspreken dat de lengtemaat die van de standaardmeter is. Naast de drie richtingen (assen) en de lengtemaat moeten we ook nog een nulpunt vastleggen, de oorsprong. We laten het aan de waarnemer om die te kiezen. Coördinaten langs de assen worden vervolgens gemeten ten opzichte van deze oorsprong. De oorspong heeft dus zelf noodzakelijkerwijs de coördinaten $(0, 0, 0)$. De keuze van de plaats van de oorsprong is er weer een van de waarnemer. Een punt in de driedimensionale ruimte kan nu door de waarnemer éénduidige worden gekarakteriseerd door de afstand langs de drie assen vast te leggen. De coördinaten van een willekeurig punt zijn dan (x, y, z).

De tijd is een heel wat waziger begrip. We meten verandering in de tijd, maar verandering is ook op te vatten als oorsprong van de tijd. We gaan hier uit van tijd die gemeten wordt door een klok, waarbij een klok een apparaat is dat gelijke intervallen van tijd registreert, dus bijvoorbeeld elke seconde tikt. De eenheid van tijd is de seconde, min of meer de tijdspanne tussen twee hartslagen (hoewel daar nogal wat spreiding in zit.) Behalve een tijdspanne moeten we ook een moment aangeven waarop de waarde van de tijd nul is. Tijden worden gemeten ten opzichte van deze $t = 0$. Het nulpunt van de tijd wordt weer bepaald door de waarnemer. Voor de tijdspanne spreken we een standaard af, de seconde. We kunnen de seconde dan zien als een soort lengte op de tijd-as.

De waarnemer kan nu het pad door de ruimte dat een puntdeeltje in de tijd aflegt geven door de plaatscoördinaten op elk tijdstip $(x(t), y(t), z(t))$, waarbij t de tijd is. Een korte notatie maakt gebruik van vectoren:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Wat we nu echt willen in de mechanica is een voorspelling voor de baan van een puntdeeltje door de ruimte. Daartoe definiëren we eerst twee begrippen, de snelheid:

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}z(t)/\mathrm{d}t \end{pmatrix},$$

en de versnelling:

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}^2x(t)/\mathrm{d}t^2 \\ \mathrm{d}^2y(t)/\mathrm{d}t^2 \\ \mathrm{d}^2z(t)/\mathrm{d}t^2 \end{pmatrix}.$$

Hieruit zien we dat als er geen versnelling is ($\vec{a} = 0$) de snelheid constant is. Voor een puntdeeltje met constante snelheid krijgen we:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{v},$$

hetgeen zich laat oplossen voor constante $\vec{v}$ als:

$$\vec{r}(t) = \vec{v}\,t + \vec{r}(t = 0).$$

Met andere woorden als we in dit geval de plaats op het tijdstip $t = 0$ weten dan kunnen we de positie in de ruimte op elk ander willekeurig tijdstip voorspellen.

De snelheid van een lichaam (object, voorwerp) is constant volgens de eerste wet van Newton als er geen kracht op werkt [1]:

Every body perseveres in its state of rest, or of uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed thereon.

Dit introduceert het concept van de *kracht*. Door te kijken naar de baan van een puntdeeltje kunnen we dus zien of er een (netto) kracht op werkt.

We kunnen nu ook verwachten dat als er een kracht op een lichaam werkt er een verandering van snelheid en dus een versnelling is. De tweede wet van Newton geeft dit preciezer weer:

The alteration of motion is ever proportional to the motive force impressed; and is made in the direction of the right line in which that force is impressed.

Hierbij moeten we dan nog weten dat *motion* door Newton is gedefinieerd als het produkt van snelheid en *massa*, wij noemen dat nu *impuls*, $\vec{p} = m\vec{v}$ (*momentum* in het Engels.) In formulevorm geeft dat:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

Als de massa niet van de tijd afhangt wordt dat:

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$$

De laatste vorm is het bekendst, maar is misleidend, want in Newtons formulering gaat het terecht om de afgeleide van de impuls en niet om de versnelling. De formule $\vec{F} = m\vec{a}$ werkt dus alleen maar als zowel de massa niet van de tijd afhangt als de impuls de vorm $\vec{p} = m\vec{v}$ heeft. Het zal blijken dat beiden in het algemeen niet waar zijn.

Intussen is de massa in het verhaal geslopen. Die is hierbij op een constante na impliciet gedefinieerd in de tweede wet van Newton. De definitie van Newton voor massa is het allereerste dat in de Principia staat:

The quantity of matter is the measure of the same, arising from its density and bulk conjunctly.

In andere woorden: dichtheid maal volume. Het definitieprobleem is verschoven naar dichtheid, en daar komt Sir Isaac nooit meer op terug…

We komen terug op de eerste wet van Newton. Het is in onze waarneming lang niet altijd zo dat een lichaam waarop geen krachten werken eenparig rechtlijnig beweegt. Nog sterker voor dezelfde gebeurtenis kan die perceptie afhangen van de waarnemer. Het coördinatenstelsel van een waarnemer waarvoor de eerste wet van Newton geldt noemen we een *inertiaalstelsel*. Een waarnemer hier op aarde bevindt zich bijvoorbeeld *niet* in een inertiaalstelsel. Een feit dat duidelijk wordt door schijnkrachten zoals de Coriolis- en centrifugaalkracht.

Omdat een waarnemer de vrijheid heeft om zelf de richting van zijn ruimte assen, zijn oorsprong in de tijd en in de plaats te bepalen zijn er heel veel mogelijke waarnemers in een inertiaalstelsel. Deze waarnemers nemen numeriek allemaal iets anders waar voor bijvoorbeeld de baan van een puntdeeltje door de ruimte. Toch kunnen zij het eens worden over een aantal dingen. De eerste wet van Newton geldt voor alle waarnemers in een inertiaalstelsel Het blijkt dat daarmee ook de tweede wet van Newton voor allen geldt. Zij kunnen het eens worden over de versnelling die het object ondergaat. De tweede wet van Newton is één van de klassieke natuurwetten waarover al deze interiële waarnemers het eens zijn. Het klassiek *relativiteitsprincipe* zegt nu dat alle natuurwetten voor alle inertiële waarnemers hetzelfde zijn.

Het blijkt nu dat er tussen elk paar inertiaalstelsels een coördinatentransformatie is te bedenken die de stelsels in elkaar overvoert. Dus als een inertiële waarnemer[1] O iets waarneemt op een plaats (x, y, z) en op een tijd t, dan is dat voor een andere waarnemer O' op plaats (x', y', z') en tijd t' en kunnen we de coördinaten (x', y', z') en de tijd t' berekenen uit de coördinaten (x, y, z) en de tijd t.

De mogelijke transformaties waarbij coördinatenstelsel van inertiaalstelsels in elkaar overgevoerd kunnen worden zijn:

Translatie De ruimtelijke oorsprong tussen de waarnemers O en O' verschilt, maar verder is alles hetzelfde. De coördinatentransformatie kan worden geschreven als:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{a} \tag{1.1}$$
$$t' = t \tag{1.2}$$

waarbij $\vec{a}$ de oorsprong van O is in het coördinatenstelsel van O'.

Rotatie De assenstelsels van de waarnemers O en O' zijn ten opzichte van elkaar gedraaid, maar verder is alles hetzelfde. De coördinatentransformatie kan worden geschreven als:

$$\vec{r}\,' = \vec{\vec{A}}\,\vec{r} \tag{1.3}$$
$$t' = t \tag{1.4}$$

Hierbij is $\vec{\vec{A}}$ een rotatiematrix, dat wil zeggen een unitaire 3×3-matrix met determinant gelijk aan 1.

Ruimtespiegeling De assenstelsels van de waarnemers O en O' zijn elkaars gespiegelde ten opzichte van de oorsprong, maar verder is alles hetzelfde. De coördinatentransformatie kan worden geschreven als:

$$\vec{r}\,' = -\vec{r} \tag{1.5}$$
$$t' = t \tag{1.6}$$

Tijdsverschuiving De tijdstippen $t = 0$ van de waarnemers O en O' zijn ten opzichte van elkaar verschoven, maar verder is alles hetzelfde. De coördinatentransformatie kan worden geschreven als:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} \tag{1.7}$$
$$t' = t + b \tag{1.8}$$

waarbij b de tijd is voor waarnemer O' waarop het tijdstip nul valt voor waarnemer O.

[1] Coördinatenstelsel identificeren we vaak met een waarnemen O, van observer in het Engels.

Tijdspiegeling De tijden van de waarnemers O en O' zijn tegengesteld aan elkaar, maar verder is alles hetzelfde. De coördinatentransformatie kan worden geschreven als:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} \tag{1.9}$$
$$t' = -t \tag{1.10}$$

Deze transformatie is een geldige transformatie tussen inertiaalstelsels in de klassieke mechanica, maar is evident niet waar in het dagelijks leven. Hier zijn verklaringen voor uit de statistische mechanica en de quantummechanica waarop we hier niet in gaan. Deze transformatie zullen we verder zoveel mogelijk negeren.

Galileitransformatie De assenstelsels van de waarnemers O en O' bewegen met constante snelheid ten opzichte van elkaar, maar verder is alles hetzelfde. De coördinatentransformatie kan worden geschreven als:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V}\,t \tag{1.11}$$
$$t' = t \tag{1.12}$$

waarbij $\vec{V}$ de snelheid is van het stelsel O' ten opzichte van het stelsel van O.

Natuurlijk zijn combinaties van al deze transformaties ook mogelijk.

Intermezzo:
Later zul je leren dat deze transformaties die de natuurwetten invariant laten samenhangen met behoudswetten. Voor elke transformatie is er een behouden grootheid. Een transformatie die de natuurwetten behoudt heet ook wel een symmetrie van de natuur, of kortweg een symmetrie. Wegens translatiesymmetrie is er behoud van impuls. Wegens rotatiesymmetrie is er behoud van draaiimpuls. Wegens plaatsspiegelingssymmetrie is er behoud van pariteit.[2] Wegens translatiesymmetrie in de tijd is er behoud van energie. Over de problemen van tijdsomkeersymmetrie hebben we het al even gehad, en die negeren we hier dan ook. Rest de Galileiransformatie. Daar moeten we het eerst wat uitgebreider over hebben. De Galileitransformatie zal ook worden behandeld in het college Mechanica.

Uit de Galilei transformatie is heel makkelijk af te leiden hoe een snelheid transformeert van een inertiaalstelsel O naar een inertiaalstelsel O', als O' met een snelheid $\vec{V}$ ten opzichte van O beweegt:

$$\vec{v}\,' = \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} - \vec{V} = \vec{v} - \vec{V},$$

dus gewoon de snelheid van O' ten opzichte van O van de snelheid in O aftrekken om de snelheid in O' te krijgen.

Nu blijkt het deze transformatie te zijn die problemen oplevert als die geconfronteerd wordt met waarnemingen.

[2] Een grootheid waarvan je waarschijnlijk nog niet hebt gehoord, maar dat maakt ook niet uit, want dit blijkt uiteindelijk toch een geschonden symmetrie te zijn.

1.2 De Lorentztransformatie

Het cruciale probleem met de Galilei transformatie vormt de lichtsnelheid. *De lichtsnelheid in vacuüm, c, blijkt voor alle inertiële waarnemers exact gelijk te zijn.* Een vaak aangehaald experiment om dat aan te tonen is het experiment van Michelson en Morley, dat in Serway [4] staat beschreven. Dit experiment toont aan dat voor een enkele waarnemer de lichtsnelheid in alle richtingen gelijk is. Als licht zich voort zou planten in een medium zoals de ether dan zou dat betekenen dat de ether ten opzichte van de waarnemer stil staat. Bijvoorbeeld door de draaiing van de aarde kan dat niet simultaan voor waarnemers dicht bij de evenaar en dicht bij een van de polen. Het Michelson-Morley experiment geeft echter overal op aarde dezelfde uitkomst en laat dus zien dat licht geen medium zoals een ether nodig heeft om zich voort te planten. Met moderne middelen is het niet moeilijk te laten zien dat de Galilei transformatie niet werkt voor licht. Met een oscilliscoop met een tijdresolutie van 1 ns en een opstelling waarbij een lichtpuls met die oscilloscope wordt getimed terwijl die over een meter reist kan door de situatie tussen de meting op een perron en in een trein die met een constante snelheid van 100 km/uur rijdt duidelijk worden vastgesteld dat de optelformule voor snelheden die het gevolg is van de Galilei transformatie niet werkt en dat binnen de meetnauwkeurigheid de lichtsnelheid op het perron en in de trein hetzelfde is.

Einstein heeft overigens vrij onafhankelijk[3] van de experimenten van Michelson en Morley zijn postulaten van de Speciale Relativiteitstheorie opgesteld:

1. De natuurwetten zijn hetzelfde in alle inertiaalstelsels.

2. De lichtsnelheid is identiek in alle inertiaalstelsels.

Het eerste postulaat heet wel het relativiteitsprincipe van Einstein en is eigenlijk niet verschillend van het klassieke relativiteitsprincipe. Het tweede postulaat volgt bijna uit het eerste als speciaal geval als we de lichtsnelheid als fundamentele natuurconstante, c.q. als natuurwet opvatten. Als de lichtsnelheid verschillend zou zijn, dan zou het ene inertiaalstelsel van het andere te onderscheiden zijn, dus niet volledig equivalent.

Wat Einstein tot een nadere beschouwing van de Galilei transformatie en tot zijn postulaten bracht is vooral de observatie dat de Galileitransformatie de vergelijkingen van Maxwell voor het elektromagnetisme niet invariant laten. De openingszin van Einsteins artikel:

Daß die Elektrodynamik Maxwells – wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt – in ihrer Anwendung auf bewegter Körper zu Asymmetrien führt, welche Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denk z. B. an die elektrodynamische Wechselwirking zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind . . .

Het probleem is hier dat de transformatie van de relatief ten opzichte van elkaar bewegende

[3] *Hoe* onafhankelijk, daar is nog steeds debat over.

systemen ("die Fälle") niet met een Galilei transformatie is te doen op een manier zodat de interactie tussen lading en magneet hetzelfde blijft.

Maar zonder het probleem als zodanig dood te analyseren bezint Einstein zich op de fundamenten van plaats en tijd. De centrale kwestie die Einstein eerst beantwoordt is gelijktijdigheid. Twee waarnemers die ten opzichte van elkaar in rust zijn kunnen hun klok synchroniseren, ook als die waarnemers niet op dezelfde plaats zijn. (Hoe de klokken te synchroniseren laten we hier als opgave aan de student, opgave 1.1.) De tijdbeleving van waarnemers die ten opzichte van elkaar bewegen is tamelijk verschillend. Het cruciale punt hier is de waarnemer. De waarnemer neemt twee gebeurtenissen als gelijktijdig waar als de door deze waarnemer gesynchroniseerde klokken dezelfde tijd aangeven voor de twee gebeurtenissen die op verschillende plaats in de ruimte (kunnen) plaatsvinden.

Het begrip ruimtelijke lengte definiëren we nu als de afstand tussen twee punten bij een gelijktijdige waarneming. Het is duidelijk dat als een standaardmeter stil ligt ten opzichte van de waarnemer er niets bijzonders aan de hand is. De uiteinden van de standaardmeter zenden licht uit dat bij een waarnemer aan komt. Dat kan vroeger of later aankomen, maar komt altijd van dezelfde plaats, dus de afstand tussen die twee plaatsen is hetzelfde als wanneer er met een rooster van gesynchroniseerde klokken zou worden gemeten. Dat wordt anders als de standaardmeter beweegt ten opzichte van de waarnemer.

Laten we hiertoe meteen het algemene gedrag van ruimte en tijd beschouwen. We beschouwen een inertiaalstelsel O' dat beweegt met een snelheid V ten opzichte van een inertiaalstelsel O. De assenstelsels van O en O' wijzen in dezelfde richting en het tijdstip $t = 0$ in O valt samen met het tijdstip $t' = 0$ in O' op het moment dat de oorsprong van O samenvalt met die van O'. De snelheid van O' ten opzichte van O ligt in richting precies langs de x-as, die overigens dezelfde richting heeft als de x'-as. We gaan kijken wat de relatie is tussen de coördinaten (x, y, z) en tijd t in O en de coördinaten (x', y', z') en tijd t' in O'. Uit de homogeniteit van ruimte en tijd concluderen we dat de transformatie tussen de ruimte en tijd in O en O' lineair zijn. Op het moment $t = 0$ (en dus ook $t' = 0$) sturen we een lichtpuls in de richting van de $+x$-as. In beide stelsel gaat de lichtpuls met dezelfde lichtsnelheid c en het lichtpuntje bevindt zich dus in O' in:

$$x' = c\,t'$$

en in O in:

$$x = c\,t$$

Voor een lineaire transformatie die aan beide vergelijkingen voldoet moet dus gelden:

$$(x' - c\,t') = A\,(x - c\,t)$$

Nu kunnen we de lichtpuls ook in de $-x$ richting uitzenden en analoog moet dan gelden:

$$(x' + c\,t') = B\,(x + c\,t)$$

Beide vergelijkingen kunnen we nu bij elkaar optellen en aftrekken, zodat we krijgen:

$$x' = \left(\frac{A+B}{2}\right) x - \left(\frac{A-B}{2}\right) ct \tag{1.13}$$

$$ct' = -\left(\frac{A-B}{2}\right) x + \left(\frac{A+B}{2}\right) ct \tag{1.14}$$

We kunnen dit wat vereenvoudigen door de tot nog toe willekeurige constanten te herdefiniëren:

$$\gamma = \frac{A+B}{2} \tag{1.15}$$

$$\beta\gamma = \frac{A-B}{2} \tag{1.16}$$

Zodat bovenstaande vergelijkingen worden:

$$x' = \gamma\, x - \beta\gamma\, ct \tag{1.17}$$

$$ct' = -\beta\gamma\, x + \gamma\, ct \tag{1.18}$$

Kijken we nu naar de beweging van de oorsprong van O' in het stelsel van O, dan geldt voor alle t' dat $x' = 0$ en dat $\gamma\, x - \beta\gamma\, ct = 0$, terwijl ook moet gelden dat $x = Vt$, zodat:

$$\beta c = V \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{V}{c}$$

moet gelden. De enige echte onbekende is nu dus nog γ.

We kunnen nu ook zeggen dat het stelsel O ten opzichte van O' beweegt met een constante snelheid $-V$. Op analoge wijze kunnen we dan afleiden dat:

$$x = \gamma\, x' + \beta\gamma\, ct' \tag{1.19}$$

$$ct = +\beta\gamma\, x' + \gamma\, ct' \tag{1.20}$$

Het teken van β wisselt dus, omdat V van teken wisselt. De factor γ moet in beide gevallen hetzelfde zijn omdat een lengte L in O zoals gezien vanuit O', $L' = \gamma\, L$, hetzelfde moet zijn als een lengte L in O' zoals gezien vanuit O. Passen we nu op tijd $t = 0$ eerst de transformatie van O naar O' toe:

$$x' = \gamma\, x \tag{1.21}$$

$$ct' = -\beta\gamma\, x \tag{1.22}$$

en vervolgens weer de transformatie van O' naar O, dan krijgen we voor de x coördinaat:

$$x = \gamma\, x' + \beta\gamma\, ct' = \gamma^2\, x - \beta^2\gamma^2\, x = \gamma^2(1-\beta^2)\, x$$

Dat loopt natuurlijk alleen maar goed af als:

$$\gamma^2(1-\beta^2) = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{1}{1-(V/c)^2}}$$

In dit hele voorgaande zijn de y en z coördinaten ongemoeid gelaten. De hele transformatie die nodig is om vanuit een inertiaalstelsel te komen naar een inertiaalstelsel dat met een constante snelheid V in de x-richting beweegt ten opzichte van het oorspronkelijk stelsel is:

$$x' = \gamma(x - \beta\, ct), \tag{1.23}$$

$$y' = y, \tag{1.24}$$

$$z' = z, \tag{1.25}$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta\, x), \tag{1.26}$$

waarbij:

$$\beta = \frac{V}{c} \tag{1.27}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{1}{1-(V/c)^2}}. \tag{1.28}$$

Deze transformatie heet de Lorentztransformatie. De Lorentztransformatie komt in plaats van de Galileitransformatie.

Intermezzo:
Een alternatieve manier om tegen de Lorentztransformatie aan te kijken is te onderzoeken welke invarianten ruimte en tijd heeft. In de driedimensionale ruimte zoals we die denken te kennen is de Euclidische lengte een invariant. De lengte, of de afstand, tussen twee punten wordt gegeven door:

$$s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

Hierboven hebben we echter gezien dat we ruimte en tijd anders moeten zien als we rekening moeten houden met de lichtsnelheid als maximale snelheid om informatie over te dragen van het ene punt naar het andere punt van de ruimte. Eén ding is echter zeker in de speciale relativiteitstheorie: de lichtsnelheid is hetzelfde voor alle waarnemers. Dus voor een lichtstraal geldt:

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = c\,\Delta t$$

In de Euclidische maat hebben we kwadraten van de plaats staan. Kwadrateren we deze uitdrukking dan kunnen we een getal maken dat hetzelfde moet zijn voor alle waarnemers:

$$s_{\mathrm{rel}}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2\,(\Delta t)^2$$

en we kunnen natuurlijk ook weer de wortel trekken uit deze vergelijking:

$$s_{\mathrm{rel}} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2\,(\Delta t)^2}$$

Dit lijkt op een Euclidische afstand met een vierde coördinaat, maar in plaats van een "+"-teken staat er een "−"-teken voor de tijd in het kwadraat. Een ruimte met een dergelijk afstandsmaat heet een Minkowski ruimte.

Als toepassing van complexe getallen is uit de hierboven gegeven invariant makkelijk de Lorentztransformatie af te leiden. Als we de tijd vervangen door een imaginaire tijd die we meteen met de lichtsnelheid c vermenigvuldigen om de eenheid van afstand te krijgen:

$$T = i\,c\,t.$$

De invariant wordt dan:

$$s_{\mathrm{rel}} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 + (\Delta T)^2},$$

en hebben we het Euclidische geval weer terug. Lengte in deze ruimte blijft behouden onder rotaties en spiegeling (translatie schakelen we hier uit doordat we naar lengte- en tijdverschillen kijken.) Het spiegelingsgeval geeft niets nieuws. Rotatie waarin alleen de drie ruimtelijke coördinaten worden gebruikt geeft de gebruikelijke ruimtelijke rotatie. Als we kijken naar de rotatie in de ruimte van een ruimtelijke coördinaat, bijvoorbeeld x en de nieuwe tijdvariabele T, dan kan zo'n rotatie worden geschreven als:

$$x' = x\cos\phi - T\sin\phi, \tag{1.29}$$
$$T' = x\sin\phi + T\cos\phi. \tag{1.30}$$

In de originele tijdvariabele t is dat:

$$x' = x\cos\phi - ict\sin\phi, \tag{1.31}$$
$$ct' = -ix\sin\phi + ct\cos\phi, \tag{1.32}$$

waarbij de tweede vergelijking met $-i$ is vermenigvuldigd. De oorsprong van het inertiaalstelsel O' heeft $x' = 0$ en dus $x = Vt$. Hieruit volgt onmiddellijk dat:

$$i\tan\phi = \frac{V}{c}$$

en met enig trigoniometrisch gegoochel (dat de hoek een complex getal is geeft niet, sin en cos kunnen ook op complexe getallen werken):

$$\sin\phi = \frac{-iV/c}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \tag{1.33}$$
$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}} \tag{1.34}$$

Hetgeen bij invullen leidt tot:

$$x' = \frac{x-(V/c)\,ct}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \tag{1.35}$$
$$ct' = \frac{t-(V/c)\,x}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \tag{1.36}$$

en dat is natuurlijk identiek met formules 1.23 en 1.26.

Uit de Lorentztransformatie 1.23–1.26, zien we dat zowel plaats (in de x-richting) als tijd voor de waarnemers O en O' verschillend zijn en zowel verschoven met een verschuiving als functie van tijd en plaats als veranderd van lengte. Dit laatste aspect, verandering van lengte, ook wel lengtecontractie genoemd, en de verandering van lengte van tijdintervallen, ook wel tijddilatatie genoemd, zal worden besproken in het volgende hoofdstuk.

Opgaven

1.1: Bedenk een manier om klokken die op een vast rooster in de ruimte staan opgesteld en ten opzichte van elkaar in rust zijn te synchroniseren.

1.2: Laat zien dat als de constante snelheid, V, tussen twee inertiële waarnemers heel klein is ten opzichte van de lichtsnelheid in vacuüm, c, de Lorentztransformatie overgaat in de Galileitransformatie.

1.3: Welke fysische eigenschap van de ruimte maakt dat de Lorentztransformatie een lineaire transformatie moet zijn ?

1.4: Opgave 39.3 uit Serway 6th ed.
(In a laboratory frame of reference, an observer notes that Newton's second law is valid. Show that it is also valid for an observer moving at a constant speed, small compared with the speed of light, relative to the laboratory frame.)

1.5: Opgave 39.4 uit Serway 6th ed.
(Show that Newton's second law is *not* valid in a reference frame moving past the laboratory frame of the previous problem with a constant acceleration.)

Hoofdstuk 2

De consequenties van de Lorentztransformatie

Plaatsen we de Lorentztransformatie naast de Galilei tansformatie:

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\,(x-(V/c)\,ct) \qquad & x' &= x-(V/c)\,ct \\ ct' &= \tfrac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}\,(ct-(V/c)\,x) \qquad & ct' &= ct \end{aligned}$$

dan zien we grofweg twee verschillen. In de transformatie voor de plaats x zit naast een verschuiving die in de Lorentztransformatie hetzelfde is als in de Galileitransformatie nog een factor $\gamma = 1/\sqrt{1-(V/c)^2}$. Deze factor heet de *Lorentzcontractie* factor en zorgt ervoor dat de lengtemaat in de ruimte geen behouden grootheid is van één waarnemer naar een andere. Het tweede verschil is dat de tijd, die in de Galileitransformatie niet verandert in de Lorentztransformatie wel degelijk verandert, waarbij er zowel een verschuiving in de tijd is als weer een lengteverandering met dezelfde γ als voor de plaatstransformatie. Deze lengteverandering van de tijd heet *tijddilatatie*.

2.1 De klassieke limiet van de Lorentztransformatie

In het dagelijks leven voldoet de Galileitransformatie als beschrijving van twee met constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegende waarnemers kennelijk uitstekend. Als de snelheid tussen twee waarnemers klein is ten opzichte van de lichtsnelheid dan moeten we dus het gedrag terugkrijgen van de Galileitransformatie. Om dat na te gaan maken we gebruik van een benaderingstechniek uit de wiskunde die bekend staat als de Taylorreeks. Als we een functie hebben f van een variabele x, en de functie gedraagt zich voldoende goed, dat wil zeggen is in het gebied waarin we kijken oneindig vaak differentieerbaar, dan geldt:

$$f(x_1) = f(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} \frac{(x_1-x_0)}{1!} + \left.\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0} \frac{(x_1-x_0)^2}{2!} + \left.\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}\right|_{x=x_0} \frac{(x_1-x_0)^3}{3!} + \ldots$$

Hierbij wordt gesommeerd over oneindig vele termen met oplopende machten voor de factor $x_1 - x_0$ en voor het aantal afgeleiden van f. Als nu $x_1 - x_0$ voldoende klein wordt en we nemen aan dat de afgeleiden van f niet te groot worden, dan kunnen we in goede benadering de termen met grote machten $(x_1 - x_0)^n$ verwaarlozen. In ons geval beschouwen we de Lorentztransformaties als functie van V/c. Als de snelheid er een uit het dagelijks leven is, zoals een pittige loopsnelheid van 3 m/s ($\approx$ 11 km/uur), dan is V/c gelijk aan $V/c = 10^{-8} = 0.00000001$, een zeer klein getal dus. Zelfs een vliegtuig dat met meer dan de geluidssnelheid gaat geeft nog typisch $V/c = 10^{-6}$. Als we nu de Taylorreeks gebruiken om de functie:

$$\gamma\left(\frac{V}{c}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$$

te ontwikkelen in V/c rond de waarde $V/c = 0$, dan krijgen we:

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{V}{c}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{V}{c}\right)^4 + \dots$$

en we zien dat de eerste correctieterm V/c voor menselijke snelheden over het algemeen al meer dan een miljoen keer kleiner is dan 1. Dus, voor de menselijke verhoudingen geldt $\gamma = 1$ tot op grote nauwkeurigheid.

Vullen we dit in in de Lorentztransformatie, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} x' &= x - (V/c)\, ct = x - Vt, \\ t' &= t - (V/c^2)\, x = t. \end{aligned}$$

In de transformatie van de tijd is kunnen we ook in V/c ontwikkelen, maar we kunnen ook zo wel begrijpen dat de factor V/c^2 heel erg klein is en te verwaarlozen ten opzichte van normale menselijke tijden. En dus voor lage snelheden ten opzichte van de lichtsnelheid krijgen we de Galileitransformatie weer zonder mankeren terug.

Dus: Newtonse, klassieke, mechanica is ook in de relativiteitstheorie geldig als de snelheden tussen verschillende waarnemers en de snelheden van de betrokken mechanische objecten ten opzichte van de waarnemer klein zijn ten opzichte van de lichtsnelheid.

2.2 Lorentzcontractie

Als we een starre staaf beschouwen die stil ligt in het coördinatenstelsel O', dan geldt voor alle tijden t' dat de uiteinden van de staaf worden gegeven door x'_1 en x'_2. Volgens de Lorentztransformatie geldt dan voor de coördinatentransformatie tussen een waarnemer O en de waarnemer O' die met een snelheid V ten opzichte van O in de x-richting beweegt:

$$x'_1 = \gamma\left(x_1 - (V/c)ct\right), \tag{2.1}$$

$$x'_2 = \gamma\left(x_2 - (V/c)ct\right). \tag{2.2}$$

Trekken we deze twee vergelijkingen van elkaar af dan krijgen we voor alle t in O:

$$(x'_1 - x'_2) = \gamma(x_1 - x_2).$$

Merk op dat de tijden in O' voor deze twee gebeurtenissen (x_1, t) en (x_2, t) in O verschillend kunnen zijn. Dat we in O' van de lengte $(x'_1 - x'_2)$ kunnen spreken is alleen maar bij gratie van het feit dat de staaf in O' in rust is en het dus niet uitmaakt wanneer gemeten wordt. Uit de formule voor γ kunnen we zien dat altijd geldt:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \geq 1$$

en sterker, dat $\gamma > 1$ als $|V| > 0$. Dus een staaf die in O' een lengte $\Delta x' = x'_1 - x'_2$ heeft die heeft voor de waarnemer O een lengte

$$\Delta x = x_1 - x_2 = \frac{1}{\gamma}(x'_1 - x'_2) = \frac{1}{\gamma}\Delta x'$$

Omdat γ altijd groter is dan 1 als de snelheid van de stelsels ten opzichte van elkaar groter is dan nul, is de lengte die O ziet van een bewegende staaf kleiner dan de lengte van die staaf in het coördinatenstelsel waarin de staaf in rust is. Dit heet de relativistische *lengtecontractie* of Lorentzcontractie.

In Serway staan sectie 39.4 een aantal voorbeelden van lengtecontracties.

2.3 Tijddilatatie

Beschouw nu de oorsprong van stelsel O', waarvoor op alle tijden t' geldt dat $x' = 0$. Net als in de vorige sectie beweegt stelsel O' ten opzichte van het stelsel O met een constante snelheid V in de richting van de x-as. Voor dit punt geldt:

$$\begin{aligned} x' = 0 &= \gamma\,(x - \beta\, ct) \Rightarrow x = \beta\, ct, && (2.3) \\ ct' &= \gamma\,(ct - \beta\, x)\,. && (2.4) \end{aligned}$$

Invullen van $x = \beta\, ct$ in de bewering voor de tijd geeft:

$$ct' = \gamma\,(ct - \beta\, x) = \gamma\left(ct - \beta^2\, ct\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1 - \beta^2\right)\, ct = \frac{1}{\gamma}\, ct.$$

In dit geval duurt een tijdinterval van $\Delta t'$ in O' dus

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

in O. Merk op dat waar de lengte van een starre staaf die ten opzichte van een waarnemer beweegt korter wordt, maar dat de tijd van een bewegende klok ten opzichte van een stilstaande waarnemer langer wordt.

In Serway staan sectie 39.4 een aantal voorbeelden van tijddilatatie.

Wat betreft tijddilatatie is het belangrijk om te beseffen dat alle ons bekende methoden om tijd te meten, dus alle klokken, een mechanische, c.q. ruimtelijke component hebben die het hart van de tijdmeting vormt. Dit ruimtelijke stuk ondergaat natuurlijk lengtecontractie van de ene inertiële waarnemer naar de andere. Deze lengtecontractie zorgt ervoor dat de tijd voor betreffende waarnemer ook werkelijk anders loopt. Als er een methode kan worden gevonden waarbij tijd gemeten kan worden zonder enige mechanissche component, dan moeten we alles opnieuw gaan overdenken.

2.4 Lengtecontractie en tijddilatatie zijn fysische effecten

Voor elke waarnemer is er maar één realiteit en dat is zijn/haar eigen waarneming. Voor elke inertiële waarnemer gelden de natuurwetten op dezelfde manier. Er is dus geen voorkeur voor de ene of de andere inertiële waarnemer. Dus lengtecontractie en tijddilatatie wanneer van een inertiële waarnemer naar een andere inertiële waarnemer wordt gegaan, is geen artefact van de waarnemer, maar moet een fysisch effect zijn. Natuurlijk kan een dergelijke redenering aan de hand van het electromagnetisme worden geïllustreerd, waar de Lorentzcontractie wel een fysisch effect *moet* zijn om in alle inertiële coördinatenstelsels dezelfde krachten te zien.

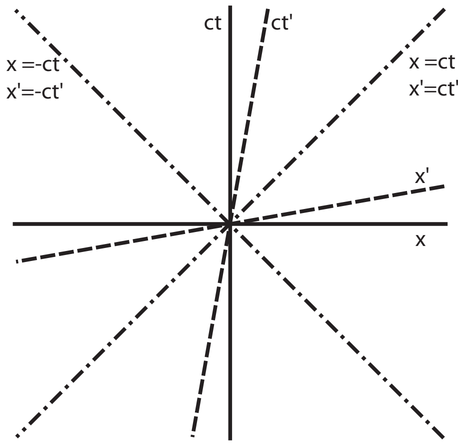
Het is dus niet juist om dingen te zeggen als, de stok van 1 meter voor waarnemer O *lijkt* maar 80 centimeter voor waarnemer O'. Dit *lijkt* niet zi maar *is* zo.

2.5 De rol van c

Twee aspekten van de lichtsnelheid spelen een cruciale rol in de afleiding van de Lorentztransformatie: Het feit dat de lichtsnelheid eindig is en het feit dat de lichtsnelheid voor alle waarnemers identiek is. Nu is het zo dat de lichtsnelheid die we kunnen meten verschillend is in verschillende media, zoals vacuüm, lucht, water, glas, etc. Met de lichtsnelheid zoals die altijd in de relativiteitstheorie wordt gebruikt bedoelen we de lichtsnelheid in vacuüm, c. Die lichtsnelheid is het grootst ten opzichte van de lichtsnelheid in alle andere media.

In het algemeen is de Lorentztransformatie afgeleid door de situatie te beschouwen dat een signaal wordt uitgezonden. Het licht is hier dus een boodschapper en wel een hele bijzondere. Wij kennen geen boodschappers die sneller kunnen gaan dan met de lichtsnelheid. Overigens kennen we inmiddels wel andere boodschappers die net zo snel kunnen gaan als licht in vacuüm, de overbrengers van de sterke kernkracht, gluon straling. De positie van licht is in deze dus wel speciaal, maar niet uniek.

Zoals we later zullen zien hangt het feit dat licht het snelst informatie over kan brengen samen met het feit dat lichtdeeltjes, fotonen, een massa gelijk aan nul hebben. Het is in principe voorstelbaar dat fotonen en ook gluonen, de deeltjes van de gluon straling, wel een massa hebben. In dat geval is er nog steeds een grootste snelheid waar geen enkel deeltje of andersoortige informatiedrager overheen kan gaan. Het is deze asymptotische snelheid, die door niks en niemand wordt overschreden die cruciaal is in de relativiteitstheorie. Je zou c dus los kunnen koppelen van licht en vervolgens de *snelstheid* kunnen noemen, de hoogste snelheid die door een deeltje (asymptotisch) kan worden bereikt. Dat deze snelstheid hetzelfde is voor alle inertiële waarnemers blijft nu eenmaal heel bijzonder, maar is tot nu toe een onomstreden waarnemingsfeit.



Figuur 2.1: *Ruimte-tijd diagram voor een waarnemer O en een waarnemer O' die met een snelheid V, oftewel met een snelheidsfractie $\beta = V/c$ van de lichtsnelheid beweegt in de $+x$-richting ten opzichte van O. De doorgetrokken lijnen zijn de assen van het co—ördinatenstesel voor O, (x, ct). De streeplijnen zijn de assen van het stelsel van O', (x', ct'). De diagonale streep-stippellijnen zijn de paden die licht volgen, zowel in het coördinatensysteem van O als O'.*

2.6 Ruimte-tijd diagrammen, menging van ruimte en tijd

Omdat we hebben gezien dat ruimte en tijd mengen door de Lorentztransformatie zullen we vaak met beiden tegelijk moeten redeneren. Een goed hulpmiddel om problemen en oplossingen dan zichtbaar te maken zijn ruimte-tijd diagrammen. In een ruimte-tijd diagram staat traditioneel de ruimte dimensie langs de horizontale as en de tijd, als ct zodat de dimensie als die van de ruimte is, langs de verticale as. Op deze manier zijn lijnen onder 45° de banen van licht ($x = ct$ of $x = -ct$.) Punten die dichter langs de tijd-as liggen dan de lengte-as heten tijd-achtig, punten die dichter bij de plaats-as liggen dan de tijd-as heten ruimte-achtig en punten op de diagonalen heten licht-achtig.

Voor een voorbeeld waarbij dit soort ruimte-tijd diagrammen zeer verhelderend werkt wordt naar het probleem van de (pols)stok en de garage verwezen in Serway, voorbeeld 39.4 op blz. 1260.

Het effect van de Lorentztransformatie in een ruimte-tijd diagram is geïllustreerd in Fig. 2.1. In dit ruimte-tijd diagram horen de x en ct as bij een waarnemer O en de x' en t' bij een waarnemer O' die met een snelheid V, oftewel met een snelheidsfractie $\beta = V/c$ van de lichtsnelheid beweegt in de $+x$-richting ten opzichte van O.

Bij een Lorentztransformatie voor een snelheid, V, in de richting van de $+x$-as worden de ruimte- als de tijd-as naar de wereldlijn van een lichtstraal in de $+x$-richting geroteerd. In dit geval roteert de $x - as$ dus tegen de klok in, terwijl de t-as met de klok mee roteert. Wat minder makkelijk zichtbaar is, is dat de lengteeenheid (zeg de meter) langs de x'-as langer is dan langs de x-as. Net zoals de tijdeenheid langs de ct'-as langer is dan langs de ct-as.

Dit maakt duidelijk dat in de Lorentztransormatie ruimte en tijd echt met elkaar mengen. Om dit qua eenheden duidelijk te maken wordt vaak voor de tijd ct gebruikt. De tijd heeft dan dezelfde eenheden als de plaats, namelijk een lengtemaat. Omdat c voor alle waarnemers hetzelfde is kunnen we dit doen. Als c van de waarnemer af zou hangen dan is het niet mogelijk dit consistent te doen.

Intermezzo:
Nemen we weer de transformatie $T = ict$, dan wordt in het (T, x) ruimte-tijd diagram de Lorentz-transformatie wel een rotatie zoals we die in de Euclidische meetkunde gewend zijn en draaien de x- en T-as in dezelfde richting.

2.7 Lorentztransformatie voor snelheden

De Lorentztransformatie voor snelheden wordt afgeleid uit die van de plaats en de tijd. Voor het geval dat we zowel een lengte- als een tijdverschil hebben wordt de Lorentztransformatie:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t), \tag{2.5}$$

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - (V/c^2)\Delta x). \tag{2.6}$$

Eerst zullen we kijken naar de snelheidscomponent in de richting van de x-as, dus langs de relatieve bewegingsrichting van de twee stelsels van waarnemers. Volgen we de definitie van snelheid (voor de helderheid van notatie gebruiken we het symbool u'_x voor de snelheid in het transformeerde systeem and u voor de snelheid in het oorspronkelijke systeem) dan krijgen we:

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - V\Delta t)}{\gamma(\Delta t - (V/c^2)\Delta x)} = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\Delta t - (V/c^2)\Delta x}.$$

Teller en noemer delen door Δt en het toepassen van de definitie $u_x = \Delta x/\Delta t$ geeft dan:

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{V\,u_x}{c^2}}.$$

Dus er is een correctie met een factor $1/(1 - V\,u_x/c^2)$ ten opzichte van de Galilei optel formule voor snelheden. Zowel voor $V << c$ als voor $u_x << c$ is deze correctiefactor bijna gelijk aan 1 en kan desgewenst worden verwaarloosd.

Kijken we nu loodrecht op de richting van x, dan zien we dat we voor de plaatscoördinaten in die richtingen de transformatie triviaal is:

$$y' = y, \tag{2.7}$$

$$z' = z. \tag{2.8}$$

Maar omdat de tijd niet-triviaal transformeert zijn de snelheidstransformaties in de y- en $z$richting ook niet triviaal. Voor bijvoorbeeld u'_y en u_y geldt:

$$u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma(\Delta t - (V/c^2)\Delta x)} = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{V\,u_x}{c^2})},$$

waarbij we in de laatste stap weer door Δt hebben gedeeld in teller en noemer. Volkomen analoog geldt dan voor u'_z en u_z:

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - \frac{V\,u_x}{c^2})}.$$

Opgaven

2.1: Serway 6th ed. 39.10.
(A muon formed high in the Earth's atmosphere travels at speed $v = 0.990\,c$ for a distance of 4.60 km before it decays into an electron, an anti-electron-neutrino and a muon-neutrino ($\mu^- \rightarrow \mathrm{e}^- + \overline{\nu_\mathrm{e}} + \nu_\mu$).
(a) How long does the muon live, as measured in its reference frame ?
(b) How far does the muon travel, as measured in its frame ?)

2.2: Serway 6th ed. 39.17.
(An interstellar probe is launched from Earth. After a brief period of acceleration it moves with a constant velocity, 70% of the speed of light. Its nuclear powered batteries supply the energy to keep its data transmitter active continuously. The batteries have a lifetime of 15.0 years as measured in their rest frame.
(a) How long do the batteries on the space probe last as measured by Mission Control on Earth ?
(b) How far is the probe from Earth when its batteries fail, as measured by Mission Control ?
(c) How far is the probe from Earth when its batteries fail, as measured by the built-in trip odometer ?
(d) For what total time after launch are data received from the probe by Mission Control ?
Note that radio waves travel at the speed of light and fill the space between the probe and Earth at the time of battery failure.)

2.3: Serway 6th ed. 39.23.
(A moving rod is observed to have a length of 2.00 m, and to be oriented at an angle of 30° with respect to the direction of motion. The rod has a speed of $0.995c$.
(a) What is the proper length of the rod ?
(b) What is the orientation angle in the proper frame ?)

2.4: Serway 6th ed. 39.26.
(A Klingon space ship moves away from the Earth at a speed of $0.800c$. The starship Enterprise pursues at a speed of $0.900c$ relative to the Earth. Observers on Earth see the Enterprise overtaking the Klingon ship at a relative speed of $0.100c$. With what speed is the Enterprise overtaking the Klingon ship as seen by the crew of the Enterprise ?)

Hoofdstuk 3

Relativistische dynamica

In het vorige hoofdstuk hebben we stilgestaan bij plaats en snelheidcoördinaten, maar net als in het klassieke geval willen we natuurlijk ook de oorzaak van beweging in kaart brengen. In de klassieke mechanica is de oorzaak van snelheidsverandering de versnelling die het gevolg is van een netto kracht. Eerst kijken we wat de gevolgen zijn van een bewegend coördinatenstelsel voor licht. Vervolgens gaan we kijken naar versnelling in de relativiteitstheorie en naar kracht.

3.1 Het relativistische Dopplereffect

Het klassieke Dopplereffect wordt onmiddellijk duidelijk als er een politie-, brandweer- of ziekenauto langs komt rijden met de sirene aan. Als het voertuig naar ons toekomt zijn de toonhoogte en frequentie van geluid aan/uit hoger dan als het voertuig van ons afrijdt. Dit komt doordat de geluidsgolven zich door de lucht als longitudinale golven naar ons toe of van ons af bewegen. Het voertuig dat de golven uitzendt geeft behalve de snelheid van het geluid nog een extra snelheid aan de golven mee, namelijk die van het voertuig zelf. Omdat de snelheden die in het spel zijn klein zijn kunnen ze met de Galileitransformatie bij elkaar worden opgeteld. Al naar gelang het voertuig naar ons toe of van ons af beweegt komen de pieken en dalen in de luchtdruk sneller of langzamer op ons af dan de geluidssnelheid en nemen we de frequentieverschuiving waar.

De situatie ligt heel anders met licht. Immers voor licht geldt de Galilei optel formule voor snelheden niet. In het geval van licht maakt het voor de snelheid waarmee het licht de waarnemer nadert zelfs helemaal niet uit hoe snel de bron beweegt ten opzichte van de waarnemer.

Toch treedt er wel degelijk een verandering op aan het licht dat wordt waargenomen van een bewegende bron. Voor de lichtbron, die we stelsel O' zullen noemen, kunnen we de elektromagnetische lichtgolf die zich langs de x-as voortplant met een golflengte λ' beschrijven als:

$$\psi'(x', t') = \cos\left(2\pi\left(\frac{x' - ct'}{\lambda'}\right)\right)$$

Dit is een voorbeeld van een lopende golf in één dimensie. Voor een vaste tijd t' zien we de golf in de plaats x', terwijl voor een vaste plaats x' we een golf zien in de tijd t'. De uitwijking van de golf, denk daarbij aan het elektrisch of magnetisch veld van de elektromagnetische golf, wordt voor elke plaats x' en tijd t' gegeven door $\psi'(x', t')$.

Voor de waarnemer O gaat de lichtbron (stelsel O') met snelheid V langs de x-as, waarbij op $t = 0$ de stelsels O' en O samenvallen. Passen we de Lorentztransformatie

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \tag{3.1}$$
$$ct' = \gamma(-\beta x + ct) \tag{3.2}$$

toe om te zien hoe waarnemer O dit ziet dan krijgen we:

$$\psi'(x', t') = \cos\left(2\pi\left(\frac{x' - ct'}{\lambda'}\right)\right) \tag{3.3}$$
$$= \cos\left(2\pi\left(\frac{\gamma(x - \beta ct) - \gamma(-\beta x + ct)}{\lambda'}\right)\right) \tag{3.4}$$
$$= \cos\left(2\pi\left(\frac{\gamma(1 + \beta)(x - ct)}{\lambda'}\right)\right) \quad . \tag{3.5}$$

We kunnen nu de vergelijking voor de lichtgolf in stelsel O

$$\psi(x, t) = \cos\left(2\pi\left(\frac{x - ct}{\lambda}\right)\right)$$

krijgen, als we kiezen:

$$\lambda = \frac{\lambda'}{\gamma(1 + \beta)}.$$

Maken we gebruik van de formule:

$$\gamma(1 + \beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(1 + \beta) = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}},$$

dan zien we dat de golflengte voor de waarnemer O in termen van die voor O' is:

$$\lambda = \lambda'\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

Dus hoewel de snelheid van de lichtgolf voor beide waarnemers hetzelfde is, is de golflengte verschillend. Het gevolg is dat ook de frequentie verschillend is, omdat voor de frequentie ν van een lichtgolf geldt $\lambda\nu = c$ en ook $\lambda'\nu' = c$.

Een geniepig detail is nog de keuze van het teken van de snelheid tussen de bron en de waarnemer. In feite kan via dezelfde Lorentztransformatie de bron naar de waarnemer toe bewegen of van de waarnemer af bewegen. Als we de snelheid positief definiëren als de bron naar de waarnemer toe komt, dan zien we dat de golflengte voor de waarnemer korter is dan voor de bron. Dit is precies wat we verwachten. Als we de bron van de waarnemer af laten bewegen en die snelheid positief willen definiëren dan moeten we het teken van β in de formules omdraaien en krijgen we:

$$\lambda = \lambda' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}},$$

zodat de golflengte toeneemt voor de waarnemer in vergelijking tot de bron die van haar af beweegt.

De lichtsnelheid is in beide stelsels per definitie gelijk en dus moet voor de relatie tussen de frequenties in beide stelsels (de bron beweegt hier van de waarnemer af) gelden:

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

Dit betekent dat voor een lichtbron die van de waarnemer af beweegt de frequentie van het ontvangen licht afneemt, terwijl de golflengte toeneemt. Dit effect wordt roodverschuiving genoemd. Het licht van sterrenstelsels die ver van ons af staan wordt typisch als roodverschoven geregistreerd hier op aarde. In feite kunnen we uit de mate van roodverschuiving de snelheid van ons af meten van die sterren of sterrenstelsels. Het blijkt dan dat de gemiddelde snelheid van ons af van verre sterrenstelsels evenredig is aan hun afstand:

$$v = Hr,$$

met v de snelheid van het sterrenstelsel van ons af en r de afstand van het sterrenstelsel. De parameter H heet de Hubbleconstante en bovenstaande vergelijking de wet van Hubble, naar degene die hem heeft ontdekt. Een positieve Hubble constante duidt op een expanderend heelal. De huidige gemeten waarde van de Hubble parameter is:

$$H = (71 \pm 4) \quad \text{km/s/Mpc},$$

waarbij de astronomische lengteschaal pc (parsec) gelijk is aan 3.3 lichtjaar oftewel 3.1×10^{16} m en Mpc staat voor megaparsec (3.1×10^{22} m.) De roodverschuiving wordt door astronomen vaak aangeduid met: [1]

$$z = \frac{\nu' - \nu}{\nu} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1.$$

Voor snelheden klein ten opzichte van de lichtsnelheid geldt dan:

$$z \approx \beta.$$

(Dit is in te zien met een Taylorreeks ontwikkeling.)

[1] Dit is pure folklore waar niet te veel achter moet worden gezocht.

3.2 Relativistische versnelling

De versnelling vinden we door naar de afgeleide in de tijd van de snelheid te kijken. We beschouwen weer eens een systeem O' waarvan de oorsprong en de assen op tijd $t' = 0$ samenvallen met die van een stelsel O op de tijd $t = 0$ in O. O' beweegt ten opzichte van O met een snelheid V in de x-richting.

De transformatie van snelheden tussen O' en O hebben we al in het vorige hoofdstuk gevonden en is:

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{V\,u_x}{c^2}}, \tag{3.6}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{V\,u_x}{c^2})}, \tag{3.7}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - \frac{V\,u_x}{c^2})}. \tag{3.8}$$

Na enige calculus, die we de lezer verder zullen besparen, volgt:

$$a'_x = \frac{a_x}{\gamma^3\left(1 - \frac{V\,u_x}{c^2}\right)^3}, \tag{3.9}$$

$$a'_y = \frac{a_y}{\gamma^2\left(1 - \frac{Vu_x}{c^2}\right)^2} + \frac{\frac{Vu_y}{c^2}a_x}{\gamma^2\left(1 - \frac{Vu_x}{c^2}\right)^3}, \tag{3.10}$$

$$a'_z = \frac{a_z}{\gamma^2\left(1 - \frac{Vu_x}{c^2}\right)^2} + \frac{\frac{Vu_y}{c^2}a_x}{\gamma^2\left(1 - \frac{Vu_x}{c^2}\right)^3}. \tag{3.11}$$

We zien hieruit ten eerste dat de formules voor relativistische versnelling op z'n zachtst gezegd gecompliceerd zijn. We zien ook dat als we de formule $F = ma$ gebruiken een kracht in de x-richting voor de bewegende waarnemer niet alleen een versnelling in de x-richting impliceert, maar ook een versnelling in de y- en z-richtingen. *We kunnen de tweede wet van Newton in de vorm $F = ma$ niet klakkeloos overnemen in de relativiteitstheorie !*

Maar bedenk nu dat de tweede wet van Newton door Newton zelf ook anders is geformuleerd, namelijk dat de kracht de mate van verandering is van de impuls:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}.$$

Laten we dus eerst naar impuls kijken voor we verder conclusies trekken.

3.3 Relativistische impuls

We gaan weer terug naar de Lorentztransformatie voor snelheden:

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - \frac{V\,u_x}{c^2}}, \tag{3.12}$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1-\frac{V\,u_x}{c^2})}, \tag{3.13}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1-\frac{V\,u_x}{c^2})}, \tag{3.14}$$

en definiëren de impuls als:

$$\vec{p} = m\vec{u}.$$

Beschouw nu een elastische botsing tussen twee identieke deeltjes A en B, die in de x-richting in stelsel O' met tegengestelde snelheden $u'_{x\mathrm{A}}$ en $u'_{x\mathrm{B}} = -u'_{x\mathrm{A}}$ op elkaar afkomen voor de botsing. In de y'- en z'-richting zijn de snelheden van de deeltjes nul. Na de botsing krijgen de twee deeltjes in het stelsel O' de snelheden $\hat{u}'_{x\mathrm{B}} = \hat{u}'_{x\mathrm{A}} = 0$ en $\hat{u}'_{y\mathrm{B}} = -\hat{u}'_{y\mathrm{A}}$.[2] Let op dat dit een specifieke botsing is en niet een algemeen geval. Met de definitie $\vec{p} = m\vec{u}$ (en in O' dus $\vec{p}\,' = m\vec{u}\,'$) is er nu impulsbehoud als $|\hat{u}'_{y\mathrm{A}}| = |u'_{x\mathrm{A}}|$ en we kiezen in dit geval als voorbeeld $\hat{u}'_{y\mathrm{A}} = u'_{x\mathrm{A}}$.

We nemen aan dat het stelsel O' met een snelheid V in de x-richting ten opzichte van het stelsel O beweegt. Passen we nu de Lorentztransformatie toe om te kijken hoe dit in het stelsel O zit dan vinden we:

$$u_x = \frac{u'_x - V}{1+\frac{V\,u'_x}{c^2}}, \tag{3.15}$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1+\frac{V\,u'_x}{c^2})}. \tag{3.16}$$

We krijgen dus in stelsel O *niet* langer dat $|\hat{u}_{y\mathrm{A}}| = |u_{x\mathrm{A}}|$ en impulsbehoud is geschonden !

Opvallend is (nou ja, in ieder geval als je weet waar het naar toe moet) dat de verhouding voor de totale impuls voor en na de botsing in O wordt gegeven door:

$$\frac{|\hat{u}_{y\mathrm{A}} + \hat{u}_{y\mathrm{B}}|}{|u_{x\mathrm{A}} + u_{x\mathrm{B}}|} = \frac{1}{\gamma}$$

Deze verhouding zou precies 1 moeten zijn als impuls behouden is. Als we nu als definitie van de impuls gebruiken:

$$\vec{p} = \gamma m\vec{u},$$

dan gaat in ieder geval dit voorbeeld goed. Hierbij heeft γ niet de betekenis van variabele van een willekeurige Lorentztransformatie, maar is:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

met u de snelheid van het object waarvan de impuls wordt bepaald ten opzichte van de waarnemer van de beschouwing. Dus γ kan ook worden opgevat als de Lorentzcontractiefactor die hoort bij de Lorentztransformatie van het ruststelsel van het object naar het stelsels

[2]Met het dakje worden deeltjes na de botsing aangegeven, zonder dakje zijn ze voor de botsing. Accent en geen accent slaan op de intertiaalstelsels O' en O, respectievelijk.

waarin de waarnemer het object met snelheid u ziet. Let op: γ wordt berekend met de totale snelheid van het object:

$$u^2 = \vec{u}^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2.$$

Het is uiteraard weer makkelijk te zien dat voor kleine snelheden ten opzichte van de lichtsnelheid, wanneer $\gamma \approx 1$, de relativistische definitie van de impuls gelijk is aan de klassieke.

De extra factor γ blijkt in het algemeen te zorgen dat wet van behoud van impuls voor alle intertiële waarnemers geldt en dus invariant is onder Lorentztransformaties. Dit verheft de wet van behoud van impuls met de nieuwe definitie van impuls tot een natuurwet volgens het eerste postulaat van Einstein. Precies wat we willen.

Zoals we later nadrukkelijker zullen zien als we viervectoren hebben ingevoerd is er nog een argument waarom $\vec{p} = \gamma m \vec{u}$ een goede definitie is van impuls. De crux van dit argument is dat we een hoeveelheid beweging willen definieren en dat we uit ervaring (zie Newton) weten dat de hoeveelheid beweging van een deeltje afhankelijk is van de snelheid en de massa van een deeltje. We weten ook de richting van de afhankelijkheid, hoe groter de massa, hoe groter de impuls en hoe groter de snelheid, hoe groter de impuls. Als we massa als intrinsieke eigenschap van een deeltje nemen dan is massa per definitie de rustmassa. Immers het rustframe is het enige coördinatenstelsel dat een bijzondere plaats inneemt voor een deeltje waarover alle waarnemers het eens kunnen zijn. De snelheid is de afgeleide van de plaats naar de tijd. Als we echter die afgeleide opschrijven: $\vec{u} = \mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}t$ dan zien we dat bij een Lorentztransformatie zowel de teller als de noemer van de breuk veranderen. Dat betekent dat de snelheid niet net als een ruimtevector transformeert, maar dat we de snelheidstransformatie krijgen die we al hebben afgeleid. Om de snelheid net zo te laten transformeren als de plaats kunnen we definiëren:

$$\vec{\eta} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau},$$

waarbij τ de eigentijd is van het deeltje. De eigentijd is weer iets dat niet verandert onder een Lorentztransformatie, immers voor de eigentijd hebben we een vast inertiaalstelsel afgesproken waarin het deeltje stil staat. Het gevolg is dat de snelheid $\vec{\eta}$ net zo transformeert als de ruimtelijke vector $\vec{x}$. Het verband tussen de $\vec{u}$ en $\vec{\eta}$ kunnen we vinden door:

$$\vec{\eta} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \gamma\vec{u},$$

omdat we uit de Lorentztransformatie direct kunnen zien dat de afgeleide van de tijd van een deeltje voor een waarnemer naar de eigentijd een factor γ oplevert. Als we dus een impuls willen definiëren die net zo transformeert als een plaats onder Lorentztransformaties, dan is:

$$\vec{p} = m\vec{\eta} = \gamma m\vec{u}$$

een goede keuze en de enige keuze die in de klassieke limiet ($v << c$) de oude definitie oplevert van de impuls, $\vec{p} = m\vec{u}$.

3.4 Relativistische krachtwet

Als we de nieuwe definitie van impuls aanhouden en de tweede wet van Newton letterlijk nemen, dan is kracht gedefinieerd als:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\gamma m \vec{u})}{\mathrm{d}t}$$

Nemen we als voorbeeld aan dat een kracht $\vec{F}$ werkt, dan kunnen we dit uitwerken tot:

$$\vec{F} = \frac{m\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{\vec{u}^2}{c^2}}} + m\vec{u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{u}^2}{c^2}}}\right)$$

We gebruiken nu dat:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec{u}^2}{c^2}}}\right) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{a}}{c^2\left(1-\frac{\vec{u}^2}{c^2}\right)^{(3/2)}}$$

en er volgt:

$$\vec{F} = \frac{m\vec{a}}{\sqrt{1-\frac{\vec{u}^2}{c^2}}} + \frac{m(\vec{u}\cdot\vec{a})\vec{u}}{c^2\left(1-\frac{\vec{u}^2}{c^2}\right)^{(3/2)}}$$

Als we de kracht nu ontbinden in een component langs de snelheid van het deeltje:[3]

$$\vec{F}_{\parallel} = \frac{(\vec{F}\cdot\vec{u})\vec{u}}{\vec{u}^2}$$

en een component loodrecht op de bewegingsrichting van het deeltje die overblijft als we de component parallel aan de bewegingsrichting vectorieel aftrekken:

$$\vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \vec{F}_{\parallel},$$

dan kunnen we de kracht uitschrijven als:

$$\vec{F}_{\parallel} = \frac{m}{\left(1-\frac{\vec{u}^2}{c^2}\right)^{(3/2)}}\vec{a}_{\parallel} \tag{3.17}$$

$$\vec{F}_{\perp} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\vec{u}^2}{c^2}}}\vec{a}_{\perp}, \tag{3.18}$$

waarbij voor de versnellingen met de snelheid mee, $\vec{a}_{\parallel}$, en loodrecht daarop, $\vec{a}_{\perp}$, dezelfde ontbinding is gevolgd als voor de kracht.

[3]De component van een vector $\vec{F}$ in de richting van een andere vector $\vec{u}$ kunnen we krijgen als we realiseren dat het inprodukt $\vec{F}\cdot\vec{u} = F\,u\,\cos\phi$, waarbij F en u zonder vectorpijltje de lengte van respectievelijk $\vec{F}$ en $\vec{u}$ zijn en ϕ de hoek is tussen de vectoren $\vec{F}$ en $\vec{u}$. De lengte van $\vec{F}$ langs $\vec{u}$ wordt dan gegeven door $F\,\cos\phi = \vec{F}\cdot\vec{u}/u$. Om aan deze lengte nu de richting van $\vec{u}$ mee te geven wordt vermenigvuldigd met $\vec{u}/u$, dit is een vector in de richting van $\vec{u}$ met lengte 1.

We zien dus dat een kracht in de bewegingsrichting van het deeltje een versnelling in die richting impliceert en zo ook voor de richting loodrecht op de beweging. Het effect op de versnelling is echter niet hetzelfde in de richting van de snelheid en die daar loodrecht op. De "effectieve massa" van het object voor de twee richtingen is verschillend.

Vaak wordt $\hat{m} = \gamma m$ de relativistische massa genoemd. Dit spruit vooral voort uit het sentiment om de impuls te kunnen blijven definiëren als $p = \hat{m}v$. Spoedig raakt men dan voor bijvoorbeeld de kracht verstrikt in verschillende transversale en longitudinale massa's. Beter is het om te accepteren dat $p = mv$ een klassieke definitie is van de impuls die niet meer geldig is in de relativiteitstheorie. De correcte definitie, zowel in de klassieke limiet als voor hoge snelheden is:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{u} \qquad \text{met} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{u}^2}{c^2}}}$$

In het vervolg zal m dan ook altijd de massa ven een object of deeltje zijn in het ruststelsel van het object/deeltje, een intrinsieke eigenschap van het object waarbij alle waarnemers het eens zijn over de waarde. Deze massa heet ook wel de rustmassa, of invariante massa, van een deeltje.

Opgaven

3.1: Serway 6th ed. 39.20.
The red shift. A light source recedes from an observer with a speed v_{source} that is small compared with c. (a) Show that the fractional shift in the measured wavelength is given by the approximate expression

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{v_{\text{source}}}{c}$$

This phenomena is know as the red shift, because the visible light is shifted toward the red. (b) Spectroscopic measurements of light at $\lambda = 397$ nm coming from a galaxy in Ursa Major reveal a red shift of 20.0 nm. What is the recessional speed of the galaxy.

3.2: Serway 6th ed. 39.21.
A physicist drives through a stop light. When he is pulled over, he tells the police officer that the Doppler shift made the red light of wavelength 650 nm appear green to him, with a wavelength of 520 nm. How fast was the physicist traveling, acccording to his own testimony ?

3.3: Serway 6th ed. 39.32.
Show that the speed of an object having momentum of magnitude p and mass m is

$$u = \frac{c}{\sqrt{1 + (mc/p)^2}}$$

3.4: Serway 6th ed. 39.33.
An unstable particle at rest breaks into two fragments of unequal mass. The mass of the first fragment is 2.50×10^{-28} kg, and that of the other is 1.67×10^{-27} kg. If the lighter fragment has a speed of $0.893c$ after the breakup, what is the speed of the heavier fragment ?

3.5: Serway 6th ed. 39.69.
A particle with electric charge q moves along a straight line in a uniform electric field $\vec{E}$ with a speed u. The electric force exerted on the charge is $q\vec{E}$. The motion and the electric field are both in the x-direction. (a) Show that the acceleration of the particle in the x-direction is given by

$$a = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{qE}{m}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{(3/2)}$$

(b) Discuss the significance of the dependence of the acceleration on the speed. (c) **What if ?** If the particle starts from rest at $x = 0$ at $t = 0$, how would you proceed to find the speed of the particle and its position at time t ?

Hoofdstuk 4

Relativistische energie

4.1 Relativistische kinetische energie

De kinetische energie van een deeltje kunnen we uitrekenen door te bepalen hoe de arbeid die een kracht levert gedurende een verplaatsing van het deeltje in beweging van het deeltje wordt omgezet. Dit is analoog aan de manier waarop dit wordt gedaan voor de klassieke mechanica in het college Mechanica.

We beschouwen een 1-dimensionaal systeem en kijken in een kort tijdje $\mathrm{d}t$ naar de arbeid die wordt verricht door een kracht F, waarbij het deeltje over $\mathrm{d}x$ verplaatst:

$$\mathrm{d}W = F\mathrm{d}x = F\,u\mathrm{d}t,$$

waarbij u de snelheid van het deeltje is. Voor de kracht kunnen we nu de uitdrukking invullen die we in het vorige hoofdstuk hebben gevonden:

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma m u) = \gamma m \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + mu\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}.$$

Werken we de afgeleide van γ naar de tijd uit:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \gamma^3 \frac{u}{c^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},$$

dan volgt met:[1]

$$\gamma + \frac{u^2}{c^2}\gamma^3 = \gamma^3,$$

dat:

$$\mathrm{d}W = m\gamma^3 u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = m\gamma^3 u\mathrm{d}u = mc^2\mathrm{d}\gamma,$$

want:

$$c^2\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \gamma^3\,u\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

[1] Deze uitdrukking is makkelijk te controleren door hem helemaal in u en c uit te schrijven.

Beginnen we met een deeltje in rust, dan geldt voor de kinetische energie ten gevolge van een kracht die van 0 tot t wordt uitgeoefend:

$$T = \int_{t=0}^{t} \mathrm{d}W = \int_{\gamma=1}^{\gamma_t} mc^2 \mathrm{d}\gamma = mc^2 \left(\gamma_t - 1\right),$$

waarbij γ_t de factor γ is op de tijd t, dus de factor γ die hoort bij de snelheid $u(t)$ op het tijdstip t.

4.2 De Lorentztransformatie voor impuls

Voor we verder gaan komen we terug op de Lorentztransformatie voor de impuls. De Lorentztransformatie van de impuls gaat analoog aan die van de plaats. Echter bij de plaats hebben we gezien dat de menging van tijd en plaats essentieel zijn in de Lorentztransformatie. Bij de impulsvector moeten we dan ook nog een scalar bedenken om de analogie compleet te maken. Laten we deze scalar ϵ noemen en het dezelfde dimensie als impuls geven, dus m/s. Met de gebruikelijke definities van een waarnemer O en een met snelheid βc relatief daaraan bewegende waarnemer O' is de Lorentztransformatie voor plaats (1-dimensionaal) en tijd:

$$x' = \gamma(x - \beta ct) \tag{4.1}$$
$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \tag{4.2}$$

Als we dit analoog willen hebben aan de impuls p_x (1-dimensionaal) en de nieuwe scalar ϵ dan krijgen we:

$$p'_x = \gamma(p_x - \beta\epsilon) \tag{4.3}$$
$$\epsilon' = \gamma(\epsilon - \beta p_x) \tag{4.4}$$

Als we nu een Lorentztransformatie toepassen op een deeltje dat stil staat in stelsel O en een snelheid V heeft ten opzichte van stelsel O' (en dus een stelsel O dat ten opzichte van O' beweegt met snelheid V), dan krijgen we:

$$p'_x = \gamma\beta\epsilon.$$

Maar we weten dat de impuls $p'_x = \gamma\beta mc = \gamma mV$ moet zijn. Dus dat werkt als $\epsilon = mc$ voor het deeltje in rust. Voor de waarde van ϵ' ten opzichte van het stelsel O' geldt in dit geval:

$$\epsilon' = \gamma\epsilon = \gamma mc.$$

Op dit punt realiseren we ons dat ϵ de eenheid van een impuls heeft. Vermenigvuldigen we ϵ met c dan krijgt het de eenheid van een energie.

Als we dus de totale energie van een deeltje definiëren als:

$$E = \gamma mc^2,$$

dan zien we dat het verschil in totale energie tussen twee snelheden van een deeltje precies correspondeert met de kinetische energie en we zien ook dat het paar energie en impuls net zo transformeert als tijd en plaats onder een Lorentztransformatie.

Intermezzo:
Als tijd en plaats bij elkaar horen als energie en impuls en plaats en impuls nemen een corresponderende positie in, dan nemen tijd en energie ook een corresponderende positie in. Herinneren we ons het intermezzo in het vorige hoofdstuk over de invoering van de impuls als afgeleide van de plaats naar de eigentijd, dan kunnen we ook de energie invoeren analoog aan de afgeleide van de tijd naar de eigentijd:

$$\epsilon = m\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \gamma m.$$

Om de eenheden kloppend te maken voor een energie vermenigvuldigen we met de enige constante die in de speciale relativiteitstheorie een rol speelt:

$$E = \epsilon c^2 = \gamma m c^2.$$

4.3 $E = \gamma mc^2$

Uit de vergelijking $E = \gamma mc^2$ kunnen we de klassieke relatie voor de energie van een deeltje bepalen door de limiet te nemen waarin $v << c$. Met de Taylorreeksontwikkeling die we al eerder hebben gezien wordt dat:

$$E = \gamma mc^2 = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{u^2}{c^2}\right)^2 + \dots\right)$$

De eerste term in de reeksontwikkeling is mc^2 en heet de rustenergie van een object. Als het object niet van consistentie verandert, verandert de rustenergie ook niet en is dus een constante.. Er is in de relativiteitstheorie echter geen reden waarom de massa van een object niet zou veranderen. Als de massa van het object verandert kunnen we twee dingen gebeuren: de aldus vrijgekomen energie gaat in de beweging van deeltjes zitten of er wordt arbeid op de omgeving verricht. Wegens impulsbehoud kan echter de snelheid van één enkel object niet zomaar veranderen, dus er zal arbeid op de omgeving worden verricht.

De tweede term geeft:

$$\frac{1}{2}mu^2.$$

Dit is precies de klassieke kinetische energie. Voor lage snelheden $u << c$ zijn de opvolgende termen te verwaarlozen en is de totale energie van een object dus de rustenergie plus de kinetische energie. Klassiek geldt de wet van behoud van massa en verandert de rustenergie dus niet. Omdat alleen energieverschillen meetbaar zijn bepaalt dan de kinetische energie het hele energiegedrag van een object.

4.4 De relativistische relatie tussen energie en impuls

Het blijkt dat:

$$E^2 - p^2c^2 = \gamma^2 m^2 c^4 - \beta^2\gamma^2 m^2 c^4 = m^2c^4.$$

Deze vorm levert kennelijk in alle inertiaalstelsels hetzelfde antwoord op dat alleen van de rustmassa en de lichtsnelheid afhangt. Deze vorm staat bekend als een relativistische invariant. We kunnen het ook in een andere vorm uitschrijven:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4.$$

Deze relatie tussen energie en impuls zal later onder andere belangrijk blijken voor de relativistische quantummechanica.

Deze relatie laat nog een andere belangrijk karakteristiek zien van de relativiteitstheorie. In de klassieke mechanica kan een object van massa nul nooit een energie of impuls krijgen, en met name is de klassieke relatie tussen energie en impuls:

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

niet gedefinieerd voor massaloze deeltje. In de relativistische mechanica kan een deeltje prima massa nul hebben en een positieve energie en impuls. Voor massaloze deeltjes is de relatie tussen energie en impuls:

$$E^2 = p^2c^2 \quad \rightarrow \quad E = pc,$$

waarbij we de energie positief hebben gekozen. Als we nagaan wat dat betekent dan krijgen we:

$$E = \gamma mc^2 = pc = \beta\gamma mc^2 \quad \Rightarrow \quad \beta = 1.$$

Dus als een deeltje massa nul heeft dan is $\beta = 1$ en dus $u = c$. Alle massaloze deeltjes bewegen dan dus met de lichtsnelheid. Andersom is het ook makkelijk te zien met bovenstaande relaties dat als $u = c$ en dus $\beta = 1$ dat dan de massa van het deeltje nul moet zijn.

In de praktijk blijken er inderdaad massaloze deeltjes voor te komen. Een belangrijk massaloos deeltje is het foton, of lichtdeeltje. Fotonen bewegen dus in vacuüm noodzakelijkerwijs met de lichtsnelheid. Dit is alleen maar een tautologie bij de gratie van het feit dat we precies dit licht of deze fotonen hebben genomen om de lichtsnelheid te definiëren. We hadden ook een ander massaloos deeltje kunnen nemen en dat een gluon met de lichtsnelheid beweegt klinkt al veel minder tautologisch.

4.5 Rekenen met relativistische energie en impuls

Zoals we hebben gezien geldt voor de relativistische energie en impuls:

$$E = \gamma mc^2, \tag{4.5}$$

$$p = \beta\gamma mc. \tag{4.6}$$

Hieruit kunnen we ook γ en β oplossen als functie van energie, impuls en massa:

$$\gamma = \frac{E}{mc^2}, \tag{4.7}$$

$$\beta = \frac{p\,c}{E}. \tag{4.8}$$

Deze vergelijkingen komen vaak handig te pas in berekeningen.

Opgaven

4.1: Serway 6th ed. 39.39.
A proton moves at $0.950c$. Calculate its (a) rest energy, (b) total energy, and (c) kinetic energy.

4.2: Serway 6th ed. 39.41.
An unstable particle with a mass of 3.34×10^{-27} kg is initially at rest. The particle decays into two fragments that fly off along the x axis with velocity components $0.987c$ and $-0.868c$. Find the masses of the fragments. (Suggestion: Conserve both energy and momentum.)

4.3: Serway 6th ed. 39.48.
According to observer A. two objects of equal mass and moving along the x axis collide head on and stick to each other. Before the collision, this observer measures that object 1 moves to the right with a speed of $3c/4$, with object 2 moves to the left with the same speed. According to observer B, however, object 1 is initially at rest. (a) Determinate the speed of object 2 as seen by observer B. (b) Compare the total initial energy of the system in the two frames of reference.

4.4: Serway 6th ed. 39.49.
Make an order-of-magnitude estimate of the ratio of mass increase to the original mass of a flag, as you run it up a flagpole. In your solution explain what quantities you take as data and the values you estimate or measure for them.

4.5: Serway 6th ed. 39.54.
A gamma ray (a high energy photon) can produce an electron (e^-) and a positron (e^+) when it enters the electric field of a heavy nucleus: $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$. What minimum gamma-ray energy is required to accomplish this task? (Note: The masses of the electron and the position are equal.)

Hoofdstuk 5

Viervectoren

5.1 Tijd en Plaats als een gezamelijk object

In het voorgaande hebben we overduidelijk gezien dat ruimte en tijd in elkaar over kunnen gaan en dat wat de ene waarnemer een verschil in tijd noemt op dezelfde plaats voor de andere waarnemer een verschil in afstand op dezelfde tijd kan zijn. In de relativiteitstheorie horen ruimte en tijd dus onafscheidelijk bij elkaar.

Voor het gemak zullen we dan ook tijd en ruimte bij elkaar nemen in één object, een vector met vier componenten:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Op het eerste gezicht lijkt dit een flauwe notatie truc en in zekere zin is dat ook zo. We kunnen tijd en ruimte afzonderlijk blijven schrijven en verder alles uit deze syllabus blijven doen. We kunnen echter een nieuw inzicht ontlenen aan het samen schrijven van tijd en ruimte als een viervector. Een inzicht dat nuttig zal blijken als we over impuls en energie gaan praten.

Om te beginnen voeren we een kortere schrijfwijze in voor een viervector:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Het object x is hier een viervector en μ zijn de indices van de componenten van de viervector. Traditioneel lopen de indices μ van 0 tot 3, waarbij:

$$x^0 = ct, \tag{5.1}$$
$$x^1 = x, \tag{5.2}$$
$$x^2 = y, \tag{5.3}$$
$$x^3 = z. \tag{5.4}$$

In ieder geval zal in alles dat hierna komt een griekse index $\mu, \nu, \lambda, \ldots$ betekenen dat het object waar de index aanhangt een viervector is en de index waarden aan kan nemen van 0 tot en met 3.

Voor plaatsvectoren kunnen we de lengte krijgen door de wortel uit het inproduct te nemen:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

In de klassieke mechanica is de lengte van een vector invariant onder Galileitransformaties, dat wil zeggen dat de lengte van een Galileigetransformeerde vector gelijk is aan de lengte van het origineel.

Voor viervectoren voeren we een dergelijke lengte in, maar we houden er rekening mee dat de rol van plaats en tijd verschillend zijn:

$$|x| = \sqrt{x^\mu \cdot x^\mu} = \sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

De reden van de mintekens is dat deze grootheid invariant is onder Lorentztransformaties. In hoofdstuk 2 staat zelfs een afleiding van de Lorentztransformatie als wordt aangenomen dat deze vorm van het inproduct invariant is. Een andere manier om hier naar te kijken is dat voor licht geldt:

$$|x| = \sqrt{x^\mu \cdot x^\mu} = \sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2} = 0 \tag{5.5}$$

voor alle waarnemers en dus evident een invariant.

5.2 De Minkowski metriek

We definiëren nu verder een andere vorm van het inproduct door gebruik te maken van een metriek. Voor normale drievectoren kunnen we de metriek definiëren als een eenheidsmatrix. Het inproduct van twee vectoren is dan te schrijven als:

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = \vec{x}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

waarbij $\vec{x}^{\mathrm{T}}$ staat voor de getransponeerde vector, dus:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

Gaan we nu viervectoren zo te lijf dan kunnen we schrijven:

$$x^\mu \cdot x^\mu = (x^\mu)^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x^\mu = x_\mu x^\mu.$$

Hier verschijnen -1's op de diagnonaal waar in de Euclidische drie-dimensionale metriek allemaal 1-en staan. Dit moet zo zijn om de invariante lengte zoals gedefinieerd in formule 5.5 te reproduceren. De 4×4 matrix gaan we nu ook korter opschrijven met griekse indices:

$$g_{\mu\nu} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De indices van g kunnen beiden van 0 tot en met 3 lopen en de twee indices vormen samen zo de zestien combinaties die alle elementen van de matrix bereiken.

Het $\approx$ teken gebruiken we hier om aan te geven dat de formule zo'n beetje geldig is. Zoals we in de volgende sectie zullen zien kunnen onder- en bovenindices worden gelezen als rij- en kolomindices in termen van matrices. In dat geval is $g_{\mu\nu}$ een object met twee rijindices en derhalve geen matrix die evenveel rijen als kolommen heeft. De hier gebruikte notatie is echter compacter en een makkelijke manier om waarden van de componenten van de metriek de onthouden.

Vervolgens voeren we nog een notatie in:

$$x_\nu = g_{\mu\nu}x^\mu = g_{0\nu}x^0 + g_{1\nu}x^1 + g_{2\nu}x^2 + g_{3\nu}x^3.$$

Dus bij afspraak wordt over herhaalde indices gesommeerd. Dit heet de *Einstein sommatie conventie* en is bij alles hierna van kracht. Voor ν kan elke waarde tussen 0 en 3 worden genomen en zo worden alle componenten uitgewerkt. Er geldt ook:

$$x^\nu = g^{\mu\nu}x_\mu = g^{0\nu}x_0 + g^{1\nu}x_1 + g^{2\nu}x_2 + g^{3\nu}x_3.$$

Dergelijke sommaties over indices worden ook wel *contractie* genoemd.

De bi-lineaire vorm $g_{\mu\nu}$ heet de metriek van de relativistische ruimte. Een metriek met $1, -1, -1, -1$ op de diagnonaal heet een Minkowski metriek en de relativistische ruimte heet ook wel Minkowski ruimte.

5.3 Co- en Contravarianten

In deze notatie kunnen we het inproduct van een viervector met zichzelf schrijven als:

$$x^\mu x_\mu = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu.$$

We zien ook dat de index van boven naar beneden brengen min-tekens introduceert bij de ruimtelijke componenten:

$$\begin{aligned}
x_0 &= g_{00}x^0 + g_{01}x^1 + q_{02}x^2 + g_{03}x^3 = g_{00}x^0 = x^0 = ct \ , && (5.6)\\
x_1 &= g_{10}x^0 + g_{11}x^1 + q_{12}x^2 + g_{13}x^3 = g_{11}x^1 = -x^1 = -x \ , && (5.7)\\
x_2 &= g_{20}x^0 + g_{21}x^1 + q_{22}x^2 + g_{23}x^3 = g_{22}x^2 = -x^2 = -y \ , && (5.8)\\
x_3 &= g_{30}x^0 + g_{31}x^1 + q_{32}x^2 + g_{33}x^3 = g_{33}x^3 = -x^3 = -z \ . && (5.9)
\end{aligned}$$

En dit geldt natuurlijk evenzogoed bij het van beneden naar boven brengen van indices, waarbij losjes gezegd kan worden dat:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$$

voor alle combinaties van μ en ν tussen 0 en 3.

5.4 De Lorentztransformatie in viervectornotatie

De Lorentztransformatie schrijven we in viervectornotatie als:

$$x'_\mu = \Lambda^\nu_\mu x_\nu \ ,$$

met als voorbeeld een Lorentztransformatie in de x richting voor een snelheid $V = \beta c$:

$$\Lambda^\nu_\mu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

We zeggen nu dat een object x_μ als een viervector transformeert als geldt:

$$x'_\mu = \Lambda^\nu_\mu x_\nu \ ,$$

voor een Lorentztransformatie Λ^ν_μ.

Als een object x_μ als een viervector transformeert is de lengte in het kwadraat $x_\mu x^\mu$ dus automatisch een invariant onder de Lorentztransformatie, een Lorentzinvariant.

In feite geldt dat nog sterker: als x^μ en y^ν als viervector transformeren onder de Lorentztransformatie, dan is $x^\mu y_\mu$ een Lorentzinvariant.

5.5 Tensoren

Als een viervector van het ene referentiestelsel naar het andere transformeert met een Lorentztransformatie, of een andere transformatie waaronder de fysica invariant blijft, dan heet die viervector een *tensor*. Dit betekent niet dat deze tensor invariant is onder Lorentztransformatie, maar dat die transformeert volgens een Lorentztransformatie. Als we dan een vergelijking hebben tussen tensoren hebben in inertiaalstelsel O, bijvoorbeeld:

$$a_\mu = b_\mu + c_\mu,$$

dan transformeert de vergelijking in een ander inertiaalstelsel O', dat met een constante snelheid ten opzichte van O beweegt tot:

$$a'_\mu = b'_\mu + c'_\mu.$$

Dus hoewel de tensoren niet gelijk zijn in de twee stelsels, is de vergelijking tussen de twee tensoren wel behouden onder de Lorentztransformatie.

Het is ook mogelijk tensoren met meer indices te hebben. Voor een tensor met twee indices, ook wel tensor van de trap twee geheten, geldt:

$$a'_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}_{\mu}\Lambda^{\beta}_{\nu}a_{\alpha\beta}.$$

In het algemeen gaan we er in deze syllabus vanuit dat symbolen met griekse indices transformeren als tensoren. **Echter, een symbool met vier componenten is niet automatisch een tensor !**

Voor een bepaalde waarnemer kunnen we de plaats en tijd van een deeltje dat door de ruimte beweegt beschrijven met de tensor:

$$x^{\mu} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

De enige scalar die we kunnen bedenken waar de tijd van het deeltje in zit is de invariante lengte van zijn tijd-plaats viervector:

$$s^2 = g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Als we deze scalar voor een klein stukje van de tijd-ruimte bekijken krijgen we:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}s)^2 &= g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu} \\
&= c^2(\mathrm{d}t)^2 - (\mathrm{d}x)^2 - (\mathrm{d}y)^2 - (\mathrm{d}z)^2 \\
&= c^2(\mathrm{d}t)^2\left(1 - \left(\frac{\mathrm{d}x}{c\mathrm{d}t}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}y}{c\mathrm{d}t}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}z}{c\mathrm{d}t}\right)^2\right) \\
&= \frac{c^2(\mathrm{d}t)^2}{\gamma^2}.
\end{aligned}$$

Na worteltrekken volgt:

$$\mathrm{d}s = \frac{c\mathrm{d}t}{\gamma} = c\mathrm{d}\tau$$

waarin τ de eigentijd van het deeltje is. Als we nu de impuls willen definiëren als het product van massa en snelheid dan is de logische keuze:

$$p^{\mu} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc\,\partial(ct)/\partial s \\ mc\,\partial x/\partial s \\ mc\,\partial y/\partial s \\ mc\,\partial z/\partial s \end{pmatrix} = m\gamma\,\frac{\partial x^{\mu}}{\partial t},$$

voor de energie-impuls tensor. Dit is precies het resultaat dat we al eerder hebben gezien. Het grote voordeel van deze formulering is dat we kunnen generaliseren voor een andere metriek $g_{\mu\nu}$. Dat zullen we ter zijner tijd in de algemene relativiteitstheorie nodig hebben.

Als p^μ een tensor is, dan geldt dat:

$$p^\mu p_\mu \ ,$$

een relativistische invariant is, want een scalar onder de Lorentz transformatie. In het geval p^μ de energie-impulstensor is kunnen dat uitrekenen:

$$p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2c^2$$

en heet deze invariant de *invariante massa*. De invariante massa kan voor een individueel deeltje worden berekend, maar ook voor een stelsel van deeltjes. In alle gevallen is deze invariante massa invariant voor een gesloten systeem, dus een systeem waarop geen externe krachten werken. Dit is zo omdat in alle stelsels (relativistische) energie en impuls behouden zijn in de tijd, als er geen externe krachten op het systeem werken.

De tensornotatie is een mooie compacte en doorzichtige notatie als je er aan gewend bent. De notatie komt terug in vakken als stromingsleer, electromagnetisme, algemene relativiteitstheorie en elementaire deeltjesfysica.

Opgaven

5.1: Een deeltje heeft een energie van $E = 3.00 \times 10^{-10}$ kgm^2/s^2 en een impuls van $p = 8.68 \times 10^{-19}$ kgm/s. Rara, welk deeltje is dat ?
(Hint: kies uit neutrino, elektron, muon, proton of neutron.)

5.2: Schrijf de vergelijking $E^2 = \vec{p}\cdot\vec{p}c^2 + m^2c^4$ in tensornotatie. (Hint: definieer de viervector (tensor) $p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z)$.)

5.3: Laat zien dat als geldt:

$$a_\mu = b_\mu + c_\mu,$$

in een inertiaalstelsel O, dat dan geldt:

$$a'_\mu = b'_\mu + c'_\mu$$

in een stelsel O' dat met constante snelheid ten opzichte van O beweegt, waarbij:

$$\begin{aligned} a'_\mu &= \Lambda^\nu_\mu a_\nu, \\ b'_\mu &= \Lambda^\nu_\mu b_\nu, \\ c'_\mu &= \Lambda^\nu_\mu c_\nu \end{aligned}$$

en Λ^ν_μ de Lorentztransformatie is van stelsel O naar O'.

5.4: Laat zien dat als $x_\mu(\tau)$ de plaats beschrijft van een deeltje in de ruimte als functie van de eigentijd van dat deeltje, τ, we de energie-impulstensor kunnen schrijven als:

$$p_\mu = m\frac{\partial x_\mu}{\partial \tau}.$$

Hoe kunnen hieruit direct zien dat p_μ een tensor is ?

5.5: Laat zien dat voor de Lorentztransformatie van een inertiaalstelsel O naar een inertiaalstelsel O' geldt dat de transformatie kan worden geschreven als:

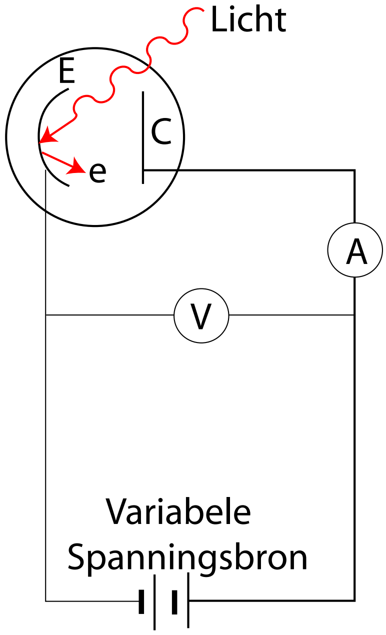
$$\Lambda^\mu_\nu = \frac{\partial x^{\mu\,\prime}}{\partial x^\nu}.$$

Hoofdstuk 6

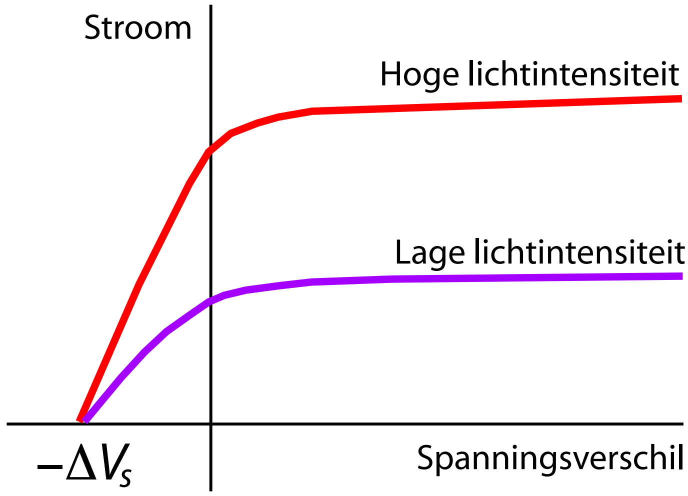
Het fotoelectrisch effect en lichtverstrooiing

6.1 Het fotoelectrisch effect

Het foto-elektrisch effect ontstaat als een lichtbundel op een metalen oppervlak wordt geschenen, waarbij zich in de buurt van dat metalen vlak een ander stuk metaal bevindt dat op een positieve spanning wordt gezet. Een mogelijke opstelling staat geschetst in Fig. 6.1. Als de lichtbundel licht van een bepaalde frequentie bevat dan gaat er een stroom lopen. Bij frequenties onder een bepaalde grens loopt er geen stroom meer. Als de intensiteit van de lichtbundel wordt opgevoerd gebeurt er onder de grensfrequentie nog steeds niets, terwijl boven de grensfrequentie de stroom recht evenredig toeneemt met de intensiteit. Wordt de frequentie verder opgevoerd dan verandert de stroom niet. De verklaring is kinderlijk eenvoudig als je hem eenmaal hebt gehoord, maar het nam het genie van Einstein om erop te komen. Als licht bestaat uit lichtdeeltjes die elk een energie bevatten die evenredig is met de frequentie van het licht, dan hebben die deeltjes onder een bepaalde energie niet het vermogen om een elektron uit het metaal te schieten. Onder de drempelenergie gebeurt er dus niets ook niet als er heel veel lichtdeeltjes zijn die elk geen elektron los kunnen maken uit het metaal, er gebeurt dan heel veel niets. Boven de grenswaarde van de energie zorgt elk lichtdeeltje ervoor dat er een elektron uit het metaal wordt geschoten. Hoe meer lichtdeeltjes, dus hoe hoger de intensiteit van het licht, hoe meer elektronen en dus hoe groter de stroom. Hoeveel energie elk lichtdeeltje boven de grenswaarde ligt maakt wel uit voor de energie waarmee de elektronen het metaal kunnen verlaten, maar niet voor het aantal elektronen dat uit het metaal komt. Dus de stroom hangt niet af van de energie van de lichtdeeltjes als die boven de grenswaarde is. De resultaten van een experiment met de opstelling geschetst in Fig. 6.1 is weergegeven in de grafiek van Fig. 6.2. In deze grafiek is het potentiaalverschil op de horizontale as uitgezet tegen de gemeten stroom op de verticale as. In dit geval gaat het om licht met een frequentie boven de drempelfrequentie om stroom te induceren. Er blijkt stroom te lopen, zelfs als er een negatieve potentiaal over de elektroden wordt aangelegd. Dat komt omdat de energie van de betreffende fotonen zo hoog is dat de elektronen niet alleen uit het metaalrooster worden bevrijd, maar dat ze eenmaal uit het metaal nog een



Figuur 6.1: *Schematische voorstelling van een opstelling om het foto-elektrisch effect te meten. De negatieve elektrode staat met E aangegeven en de positieve elektrode met C. De spanningsmeter heeft het symbool V en de stroommeter is A.*



Figuur 6.2: *Resultaat van de stroom meting in de opstelling hiernaast. Op de horizontale as staat het spanningsverschil tussen de elektroden. Positief is dat C een hogere spanning heeft dan E in de figuur hiernaast. Op de verticale as staat de gemeten stroom uit. De bovenste curve correspondeert met een lichtbron van dubbele intensiteit vergeleken met de onderste curve.*

hoeveelheid energie over hebben die in bewegingsenergie zit. Door deze bewegingsenergie hebben ze een snelheid en kunnen ze ondanks dat ze worden afgeremd door de negatieve potentiaal soms toch nog de overkant halen. De richting van de snelheden van de elektronen is natuurlijk tamelijk willekeurig als ze uit het metaal komen en bij toenemende negatieve spanning zullen uiteindelijk alleen de elektronen die recht tegen de stroom in roeien de overkant nog halen. Daarom loopt de stroom terug bij toenemende negatieve spanning.

De energie die nodig is om een elektron uit het metaalrooster te krijgen is de zogenaamde werkfunctie *work function*, ϕ. De werkfunctie kan worden berekend als de energie ($h\nu$) van de fotonen van een monochromatische lichtbron die op het metaal schijnt bekend is en de drempelspanning (V_{drempel}), waarbij er net wel/net niet een stroom loopt:

$$\phi = h\nu + eV_{\mathrm{drempel}},$$

waarbij de drempelspanning over het algemeen negatief is en e is de lading van het elektron.

Een foton blijkt een massaloos deeltje te zijn. Hiervoor geldt, zoals we al hebben gezien:

$$E = pc.$$

Dit betekent dat een foton elke energie en impuls kan hebben, maar dat de verhouding tussen energie en impuls vast ligt. De energie van het foton blijkt met de frequentie van het bijbehorende licht te corresponderen. Als ν de frequentie is van het licht dan hebben de bijbehorende fotonen een energie:

$$E = h\nu,$$

waarbij $h = 6.63 \times 10^{-34}$ Js de constante van Planck is. Aan het eind van het college warmteleer zullen we hierop uitvoeriger terugkomen. Licht heeft ook een golflengte λ en de golflengte maal de frequentie geeft de snelheid van de lichtgolf aan:

$$\lambda\nu = c.$$

Hieruit volgt dat:

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

en

$$p = \frac{h}{\lambda}.$$

Deze laatste uitdrukking staat bekend als de relatie van De Broglie..

6.2 Comptonverstrooiing

In het klassieke beeld van de verstrooiing (botsing) van licht met elektronen om de atoomkern is het licht een golf die wordt geabsorbeerd door het elektron en dan weer uitgezonden. De stralingsdruk van het licht zet ook het elektron in beweging en de elektronen bewegen sowieso allemaal als ze om de atoomkern zweven. Op grond van dit beeld is de verwachting dat het verstrooide licht in golflengte is verschoven door de beweging van het elektron en dat het licht in alle richtingen wordt uitgezonden. In elke richting wordt dan een spectrum van lichtfrequenties gemeten.

Als dit experiment wordt gedaan met Röntgenstraling (licht met een hoge frequentie en lage golflengte), dan blijkt dat in elke verstrooiingsrichting precies één specifieke frequentie wordt gezien.

Deze uitkomst is door Compton verklaard met een beeld waarin licht massaloze deeltjes zijn, dus een beeld in overeenstemming met Einsteins verklaring van het foto-elektrisch effect en Plancks energie-pakketjes hypothese.

Om de frequentie voor een verstrooiingshoek te berekenen gaan we uit van een situatie waarbij de fotonen (γ's) in de $+x$-richting bewegen en het elektron (e) voor de botsing stilstaat. Voor het inkomende licht nemen we een golflengte λ_0 en de inkomende fotonen hebben dus impuls $p = h/\lambda_0$. Als we de assen zo kiezen dat de verstrooiing plaatsvindt in het xy-vlak (we kunnen altijd de y- en z-as om de x-as draaien zodat dat het geval is) dan kunnen we voor de som van energie en impuls voor de botsing schrijven:

$$p^\mu_{\mathrm{tot}} = p^\mu_{\gamma,\ \mathrm{in}} + p^\mu_{\mathrm{e},\ \mathrm{in}} = \begin{pmatrix} p \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_\mathrm{e}c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + m_\mathrm{e}c \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

waarbij m_e de massa van het elektron is. Na de verstrooiing (botsing) kunnen we de vierimpulsen van foton en elektron schrijven als:

$$p^\mu_{\gamma,\ \mathrm{uit}} + p^\mu_{\mathrm{e},\ \mathrm{uit}} = \begin{pmatrix} p_\gamma \\ p_\gamma \cos\theta_\gamma \\ p_\gamma \sin\theta_\gamma \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{m_\mathrm{e}^2 c^2 + p_\mathrm{e}^2} \\ p_\mathrm{e} \cos\theta_\mathrm{e} \\ p_\mathrm{e} \sin\theta_\mathrm{e} \\ 0 \end{pmatrix},$$

waar we expliciet gebruik hebben gemaakt van het feit dat de verstrooiing in het xy-vlak plaatsvindt en de z-component van de impulsen dus allemaal nul waren voor de botsing en nul blijven na de botsing.

Wegens energie en impulsbehoud moet nu gelden:

$$p^\mu_{\gamma,\ \mathrm{in}} + p^\mu_{\mathrm{e},\ \mathrm{in}} = p^\mu_{\gamma,\ \mathrm{uit}} + p^\mu_{\mathrm{e},\ \mathrm{uit}}$$

en dus:

$$\begin{pmatrix} p + m_\mathrm{e}c \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_\gamma \\ p_\gamma \cos\theta_\gamma \\ p_\gamma \sin\theta_\gamma \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{m_\mathrm{e}^2 c^2 + p_\mathrm{e}^2} \\ p_\mathrm{e} \cos\theta_\mathrm{e} \\ p_\mathrm{e} \sin\theta_\mathrm{e} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Uit de energievergelijking volgt dat:

$$p_\mathrm{e}^2 = (p - p_\gamma)^2 + 2m_\mathrm{e}c(p - p_\gamma).$$

Uit de vergelijking voor p_y volgt dat:

$$\cos\theta_\mathrm{e} = \sqrt{1 - \sin^2\theta_\mathrm{e}} = \sqrt{1 - \frac{p_\gamma^2 \sin^2\theta_\gamma}{p_\mathrm{e}^2}}.$$

Gebruiken we dat in de vergelijking voor p_x om θ_e te elimineren, dan volgt:

$$(p - p_\gamma \cos\theta_\gamma)^2 = p_\mathrm{e}^2 - p_\gamma^2 \sin^2\theta_\gamma.$$

Na het invullen van p_e^2 uit de vergelijking voor de energie en uit-kwadrateren wordt dat:

$$-2pp_\gamma \cos\theta_\gamma + 2pp_\gamma - 2m_\mathrm{e}c\,(p - p_\gamma) = 0,$$

zodat:

$$(1-\cos\theta_\gamma) = \frac{m_\mathrm{e}c}{pp_\gamma}(p-p_\gamma) = m_\mathrm{e}c\left(\frac{1}{p_\gamma}-\frac{1}{p}\right) = \frac{m_\mathrm{e}c}{h}(\lambda-\lambda_0)\,.$$

Of geschreven als golflengteverschil als functie van de hoek:

$$\lambda-\lambda_0 = \frac{h}{m_\mathrm{e}c}(1-\cos\theta_\gamma)\,.$$

De waarnemingen corresponderen precies met deze formule.

Een alternatieve manier om Comptonverstrooiing door te rekenen is om eerst op het laboratoriumstelsel, waarin het elektron stil staat, een Lorentztransformatie toe te passen naar het zwaartepuntstelsel (Center-of-Mass, CM). In relativistische mechanica kan naar het CM stelsel worden getransformeerd door de som te nemen van de vier-vectoren van alle deeltjes:

$$p^\mu_\mathrm{tot} = \sum_i p^\mu_i\,.$$

Het stelsel wordt dan naar het CM stelsel getransformeerd door de Lorentztransformatie met:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\sqrt{(P^1_\mathrm{tot})^2+(P^2_\mathrm{tot})^2+(P^3_\mathrm{tot})^2}}{P^0_\mathrm{tot}},\\ \gamma &= \frac{P^0_\mathrm{tot}}{m_\mathrm{inv}c},\end{aligned}$$

waarbij de invariante massa van het systeem wordt gegeven door:

$$m_\mathrm{inv}c = \sqrt{(P^0_\mathrm{tot})^2-(P^1_\mathrm{tot})^2-(P^2_\mathrm{tot})^2-(P^3_\mathrm{tot})^2}.$$

Passen we dit toe op het geval van Compton verstrooiing dan krijgen we voor de boost naar het CM stelsel:

$$m_\mathrm{inv}c = \sqrt{(p+m_\mathrm{e}c)^2-p^2} = \sqrt{2pm_\mathrm{e}c+m_\mathrm{e}^2c^2},$$

zodat:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{p}{p+m_\mathrm{e}c},\\ \gamma &= \frac{p+m_\mathrm{e}c}{m_\mathrm{inv}c},\\ \beta\gamma &= \frac{p}{m_\mathrm{inv}c}.\end{aligned}$$

Toepassen van de Lorentztransformatie geeft, waarbij $\hat{p}$ wordt gebruikt om de impulsen in het CM stelsel aan te geven:

$$\hat{p}^\mu_{\gamma,\ \mathrm{in}} = \begin{pmatrix}\gamma p-\beta\gamma p\\ \gamma p-\beta\gamma p\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta\gamma m_\mathrm{e}c\\ \beta\gamma m_\mathrm{e}c\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\hat{p}^{\mu}_{\mathrm{e,\ in}} = \begin{pmatrix} \gamma m_{\mathrm{e}} c \\ -\beta\gamma m_{\mathrm{e}} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In het CM stelsel is de totale ruimtelijke impuls nul. Voor het verstrooide foton en elektron (dus na de botsing) moet dus in het CM stelsel gelden (we gebruiken meteen impulsbehoud in de x- en y-richting):

$$\hat{p}^{\mu}_{\gamma,\ \mathrm{uit}} = \begin{pmatrix} \hat{p}_\gamma \\ \hat{p}_\gamma \cos\hat{\theta} \\ \hat{p}_\gamma \sin\hat{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{p}^{\mu}_{\mathrm{e,\ uit}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\hat{p}_\gamma^2 + m_{\mathrm{e}}^2 c^2} \\ -\hat{p}_\gamma \cos\hat{\theta} \\ -\hat{p}_\gamma \sin\hat{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wegens behoud van energie moet gelden:

$$m_{\mathrm{inv}} c = \hat{p}_\gamma + \sqrt{\hat{p}_\gamma^2 + m_{\mathrm{e}}^2 c^2} \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_\gamma = \frac{m_{\mathrm{inv}}^2 c^2 - m_{\mathrm{e}}^2 c^2}{2 m_{\mathrm{inv}} c} = \left(\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{inv}}}\right) p.$$

De hoek $\hat{\theta}$ kan willekeurig worden gekozen. Als we nu voor het foton terugtransformeren naar het LAB stelsel (dus het stelsel waarin het elektron voor de botsing stil stond, dan doen we dat met de inverse Lorentztransformatie, dat wil zeggen dezelfde Lorentztransformatie als we van het LAB naar het CM stelsel gebruikte, maar dan met β vervangen door $-\beta$:

$$p^{\mu}_{\gamma,\ \mathrm{uit}} = \begin{pmatrix} \gamma\hat{p}_\gamma + \beta\gamma\hat{p}_\gamma \cos\hat{\theta} \\ \gamma\hat{p}_\gamma \cos\hat{\theta} + \beta\gamma\hat{p}_\gamma \\ \hat{p}_\gamma \sin\hat{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Uit de impulsen in de x- en y-richtingen is dan te berekenen dat voor de verstrooiingshoek in het LAB stelsel geldt:

$$\cos\theta = \frac{\cos\hat{\theta} + \beta}{\beta\cos\hat{\theta} + 1} \quad \Rightarrow \cos\hat{\theta} = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta} = -\left(1 - \frac{m_{\mathrm{e}} c (1 + \cos\theta)}{p(1 - \cos\theta) + m_{\mathrm{e}} c}\right).$$

Vullen we dat in in de vergelijking voor de nieuwe energie van het foton, dan krijgen we:

$$p_\gamma = \gamma\hat{p}_\gamma + \beta\gamma\hat{p}_\gamma \cos\hat{\theta} = \left(\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{inv}}}\right) p \left(\frac{p + m_{\mathrm{e}} c}{m_{\mathrm{inv}} c} - \frac{p}{m_{\mathrm{inv}} c}\left(1 - \frac{m_{\mathrm{e}} c (1 + \cos\theta)}{p(1 - \cos\theta) + m_{\mathrm{e}} c}\right)\right),$$

hetgeen na invullen van $m_{\mathrm{inv}}^2 c^2 = 2 m_{\mathrm{e}} c p + m_{\mathrm{e}}^2 c^2$ en enig omschrijven ook levert:

$$1 - \cos\theta = m_{\mathrm{e}} c \left(\frac{p - p_\gamma}{p_\gamma p}\right) = \frac{m_{\mathrm{e}} c}{h} (\lambda - \lambda_0).$$

Merk op dat in geen van de bovenstaande afleidingen informatie is gebruikt over de vorm van de interactie van een foton met een elektron. Er is alleen gebruik gemaakt van behoud van energie en impuls.

6.3 Licht-lichtverstrooiing

Het is ook mogelijk dat licht op licht botst en daarbij het licht zelfs wordt vernietigd en er andere deeltjes ontstaan die massa kunnen hebben. Bij hoge energie botsers van elektronen en positronen wordt licht-lichtverstrooiing als bijprodukt bereikt. In deze versnellers kunnen zowel de elektron als positron bundels onder invloed van elkaar fotonen uitzenden die dan vervolgens ook met elkaar in botsing kunnen komen. Bij deze botsingen tussen fotonen, ook wel twee foton fysica genaamd, is de productie waargenomen van allerlei deeltjes.

Wij beperken ons hier tot een voorbeeld van een botsing tussen twee fotonen met dezelfde energie die tegen elkaar in bewegen. De viervectoren voor de botsing van deze fotonen, die we als $\gamma 1$ en $\gamma 2$ noteren zijn:

$$p^{\mu}_{\gamma 1} = \begin{pmatrix} E_\gamma/c \\ E_\gamma/c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad p^{\mu}_{\gamma 2} = \begin{pmatrix} E_\gamma/c \\ -E_\gamma/c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Let op dat de γ hier een aanduiding is van het feit dat het om fotonen gaat en dit geen (griekse) index is van p.

Uit de botsing van de fotonen kunnen een deeltje–anti-deeltje paar ontstaan. We nemen hier aan dat het om een elektron-positron gaat, maar als de elektron massa m_e wordt vervangen door de massa van een ander deeltje gaat de berekening verder precies hetzefde. Een eigenschap van anti-deeltjes is dat de massa precies hetzelfde is als die van het bijbehorende deeltje. Dus de positron massa is ook m_e

De viervectoren van het elektron en positron die na de botsing ontstaan zijn:

$$p^{\mu}_{\mathrm{e}^-} = \begin{pmatrix} E_\mathrm{e} \\ p_\mathrm{e}\sin\theta \\ p_\mathrm{e}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad p^{\mu}_{\mathrm{e}^+} = \begin{pmatrix} E_\mathrm{e} \\ -p_\mathrm{e}\sin\theta \\ -p_\mathrm{e}\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

waarbij al gebruik is gemaakt van het feit dat de totale impuls van de inkomende fotonen in alle richtingen nul is en de elektron en positron massa identiek zijn.

Uit het behoud van energie volgt dan:

$$2E_\gamma = 2E_\mathrm{e} \qquad \Rightarrow \qquad p_\mathrm{e}c = \sqrt{E_\gamma^2 - m_\mathrm{e}^2 c^4}.$$

Omdat deze absolute waarde van de impuls groter gelijk moet zijn dan nul is er een drempelwaarde voor de productie van een elektron-positron paar door twee fotonen. De energie van elk foton moet groter zijn dan de equivalente energie van de rustmassa van het elektron, $E_\gamma > m_\mathrm{e}c^2$. Boven deze drempelwaarde is productie altijd mogelijk, eronder niet.

Zoals eerder gezegd kunnen verschillende deeltje–anti-deeltje paren worden gevormd in twee-foton botsingen. Voor elk deeltje zal een andere drempelenergie gelden. Hoe hoger de energie van de fotonen, hoe groter de verscheidenheid aan deeltjes (en anti-deeltjes) die kunnen worden geproduceerd.

Opgaven

6.1: Serway 6th ed. 40.17.
Two light sources are used in a photoelectric experiment to determine the work function for a particular metal surface. When green light from a mercury lamp ($\lambda = 546.1$ nm) is used, a stopping potential of 0.376 V reduces the photocurrent to zero. (a) Based on this measurement, what is the work function for this metal ? (b) What stopping potential would be observed when using the yellow light from a helium discharge tube ($\lambda = 587.5$ nm) ?

6.2: Serway 6th ed. 40.21.
Calculate the energy and momentum of a photon of wavelength 700 nm.

6.3: Serway 6th ed. 40.26.
A photon having energy E_0 is scattered by a free electron initially at rest such that the scattering angle of the scattered electron is equal to that of the scattered photon ($\theta = \phi$ in Fig. 40.13b in Serway).
(a) Determine the angles θ and ϕ.
(b) Determine the energy and momentum of the scattered photon.
(c) Determine the kinetic energy and momentum of the scattered electron.

6.4: Serway 6th ed. 40.30.
Find the maximum fractional energy loss for a 0.511 MeV gamma ray that is Compton scattered from a free (a) electron, (b) proton.

Hoofdstuk 7

Voorbeelden en losse eindjes

7.1 Het gewicht van nat licht

We hebben gezien dat licht door vacuüm gaat met een snelheid c die voor elke (interiële) waarnemer hetzelfde is. Gaat licht echter door bepaalde media zoals glas of water dan plant het zich nog wel degelijk voort, maar is de snelheid anders. De achtergrond hiervan is microscopisch dat de lichtdeeltjes, de fotonen, worden beïnvloed door met name de elektronen die om de atoomkernen in het medium heen zweven. De fotonen hebben voordurend interactie met de elektronen. Echter, anders dan bij Comptonverstrooiing, hebben fotonen van zichtbaar licht over het algemeen een energie die kleiner is dan de bindingsenergie van de elektronen in het medium. Omdat de elektronen alleen in sprongetjes energie kunnen absorberen (hier wordt bij quantummechanica op teruggekomen) is het resultaat van een botsing vaak dat het elektron aangeslagen wordt, maar dan weer terugvalt naar de oorspronkelijke energietoestand. Tijdens het aanslaan verliest het foton energie, maar nadat het elektron weer in de oorspronkelijke toestand terug is moet alle energie en impuls weer terug zijn bij het foton wegens energie en impulsbehoud. Het gevolg is dat het foton onderweg geen energie en impuls verliest, maar wel door de interacties wordt vertraagd. Microscopisch zou je kunnen zeggen dat het foton zich nog steeds met de lichtsnelheid van de ene naar de andere interactie spoedt, maar dat het tijdens de interactie even wordt vastgehouden, zodat de gemiddelde snelheid afneemt.

De gemiddelde snelheid van een foton in een medium wordt gegeven door de brekingsindex van dat medium door:

$$n = \frac{c}{v},$$

waarbij n de brekingsindex is en v de gemiddelde snelheid in het medium. Maar we hebben ook gezien dat een deeltje dat niet met de lichtsnelheid beweegt massa moet hebben. Als een foton door een medium gaat en de effectieve snelheid lager is dan de lichtsnelheid, dan moet dat foton ook een effectieve massa hebben:

$$m_{\text{eff}}^2 = \frac{E^2}{c^4} - \frac{p_{\text{eff}}^2}{c^2}.$$

De energie van het foton verandert niet, maar de impuls verandert wel, immers de snelheid verandert. De massa van het foton moet nu de bovenstaande relatie weer kloppend maken. Om dit op te lossen moeten we ons er van bewust zijn dat als het foton een effectieve massa heeft de impuls wordt gegeven door:

$$p_{\text{eff}} = \beta\gamma m_{\text{eff}} c = \frac{\gamma m_{\text{eff}} c}{n} = \frac{n m_{\text{eff}} c}{n\sqrt{n^2-1}} = \frac{m_{\text{eff}} c}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Hieruit volgt:

$$m_{\text{eff}} = \frac{E\sqrt{n^2-1}}{nc^2} = \frac{h\sqrt{n^2-1}}{nc\lambda},$$

waarbij h de constante van Planck is en λ de golflengte van het licht. Voor bijvoorbeeld geel licht (middenin het zichtbare gebied) van $\lambda = 587$ nm en water met een brekingsindex van $n = 1.33$ krijgen we voor de effectieve massa van de gele fotonen in water:

$$m_{\text{eff}} = 2.34 \times 10^{-36} \text{ kg},$$

corresponderend met een energie:

$$E = m_{\text{eff}} c^2 = 2.11 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

Van de oorspronkelijke energie van $E = hc/\lambda = 3.20 \times 10^{-19}$ J is dat ongeveer tweederde deel ! Het gewicht van nat licht is aanzienlijk.

Het blijkt nu dat om allerlei redenen we denken dat de massa van alle elementaire deeltjes op een manier wordt gegenereerd als hierboven omschreven. De rol van het elektromagnetisch veld dat de elektronen rond de atomen genereren wordt dan overgenomen door een ander veld, het Higgs veld. Alle deeltjes hebben interactie met het Higgs veld, waarbij de sterkte van de interactie de massa van het deeltje bepaalt. Om dit model goed te laten zijn moet natuurlijk de hele ruimte met het Higgs veld zijn gevuld. Zoals het elektromagnetisch veld fotonen voortbrengt, zo moet het Higgs veld ook wel een deeltje voortbrengen, het zogenaamde Higgs boson. Het observeren van het Higgs boson is dan ook de ultieme test voor dit model. Op dit moment wordt het Tevatron bij Chicago druk naar het Higgs boson gezocht in ultra hoge energie botsingen tussen protonen en anti-protonen. Als het daar niet lukt dan wordt het Higgs boson vrijwel zeker gevonden bij de Large Hadron Collider die op dit moment op CERN bij Genève wordt gebouwd en die een tien keer hogere energie kan bereiken dan het Tevatron.

7.2 Deeltjesproductie

Als we een nieuw deeltje willen produceren (zoals bijvoorbeeld het Higgs boson) uit een botsing tussen twee deeltjes dan moet de botsing tussen de twee deeltjes een zekere minimale energie hebben die in de massa van het nieuwe deeltje kan worden omgezet. Om nieuwe deeltjes te produceren kan de gehele zwaartepuntsmassa worden omgezet in de massa van het nieuwe deeltje. Als twee deeltjes, met massa m_1 en m_2 en impuls p_1^μ en p_2^μ, botsen, dan wordt de zwaartepuntsmassa gegeven door:[1]

$$\begin{aligned}
m_{\mathrm{inv}}^2 &= (p_1^\mu + p_2^\mu)\,(p_{1\mu} + p_{2\mu}) \\
&= p_1^\mu p_{1\mu} + p_2^\mu p_{2\mu} + 2 p_1^\mu p_{2\mu} \\
&= m_1^2 + m_2^2 + 2\,(E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) \\
&= m_1^2 + m_2^2 + 2\left(\sqrt{(m_1^2 + \vec{p}_1^{\,2})(m_2^2 + \vec{p}_2^{\,2})} - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2\right).
\end{aligned}$$

Als de massa's te verwaarlozen zijn ten opzichte van de bijbehorende impulsen, krijgen we:

$$m_{\mathrm{inv}}^2 = 2\,(|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2| - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) = 2|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_2|(1 - \cos\theta),$$

met θ de hoek tussen de drie-impulsvectoren $\vec{p}_1$ en $\vec{p}_2$. We zien nu dat we de mogelijkheid van deeltjesproductie kunnen maximaliseren door de hoek $\theta = 180°$ te kiezen en beide deeltjes tot de grootste impuls te versnellen die we kunnen bereiken $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p_{\mathrm{max}}$. Een dergelijke experimentele opstelling heet een *collider* in het Nederlands ook wel botser. In een botser worden deeltjes in tegengestelde richting tot een even hoge energie versneld. Dit is de optimale manier om nieuwe deeltjes te produceren.

7.3 De tweelingparadox

Een tweeling besluit om het volgende experiment te houden. Eén van de twee tweelingzussen gaat op reis met een raket die als snelheid een redelijke fractie van de lichtsnelheid haalt, zeg een snelheid die met een Lorentzcontractiefactor $\gamma = 2$ overeenkomt. Na een vijf jaar krijgt ze heimwee en keert terug met dezelfde snelheid, dus daar doet ze ook weer vijf jaar over. Terug op aarde ontdekt ze dat haar tweelingzus die is achtergebleven twintig jaar ouder is geworden. De paradox zit in het feit dat de zussen relatief een equivalente beweging uitvoeren en er dus geen reden lijkt te zijn waarom de ene ouder is geworden dan de ander.

Bij precieze beschouwing is de situatie niet echt symmetrisch. De ene zus blijft de hele tijd achter in één en hetzelfde intertiaalstelsel, terwijl de andere zus in totaal vier keer van inertiaalstelsel wisselt (en bij elke wisseling ook nog een tijdje niet in een inertiaalstelsel zit, maar die tijd kan erg kort worden gemaakt.) Deze asymmetrie maakt precies dat de leeftijden gaan verschillen.

Zie ook de tekst in Serway 6th. Edition, pagina 1257 en verder.

[1] In deze afleiding zien we dat we van de eerste naar de tweede regel haakjes wegwerken door gewoon uit te vermenigvuldigen. Daarbij ontstaat de dubbelprodukt term doordat $p_1^\mu p_{2\mu} = p_2^\mu p_{1\mu}$.

Opgaven

7.1: Bereken de effectieve massa van een foton uit een lichtbundel blauw licht met een golflengte van $\lambda = 540$ nm in glas met een brekingsindex van $n = 1.42$. Welke fractie van de energie in vacuüm van een dergelijk foton is omgezet in massa als het eenmaal door het glas beweegt.

7.2: Een veelbelovend mechanisme om in e^+e^- botsingen een Higgs boson, H, te maken is in geassocieerde productie met een Z boson: $e^+e^- \rightarrow ZH$. De massa van het Z boson is $m_Z = 91.19$ GeV/c^2. Wat is de minimale energie (in GeV eenheden) voor de e^+ en e^- als ze in het zwaartepuntstelsel botsen om een Higgs boson te maken met een massa van $m_H = 115$ GeV/c^2 ?

7.3: Beschouw de aarde lokaal als plat en neem aan dat het een uniform gravitatieveld heeft met een gravitatieversnelling $g = 9.82$ m/s^2.
(a) Bereken hoe ver een lichtstraal naar de aarde toe valt als het een afstand aflegt van 3.00 km.
(b) Hoe ver moet de lichtstraal horizontaal reizen onder deze omstandigheden om 1.00 cm naar de aarde toe te vallen ?

7.4: Serway 5th ed. 39.14.
In 1962, when Mercury astronaut Scott Carpenter orbited the Earth 22 times, the press stated that for each orbit he aged 2 millionths of a second less than he would have had he remained on Earth.
(a) Assuming that he was 160 km above the Earth in a circular orbit, determine the time difference between someone on Earth and the orbiting astronaut for the 22 orbits. You will need the approximation $\sqrt{1-x} \approx 1 - x/2$ foor small x.
(b) Did the press report accurate information ? Explain.

Hoofdstuk 8

Toegift: Algemene Relativiteitstheorie

Dit hoofdstuk is een toegift bij het college en behoort in geen enkel opzicht tot de tentamenstof.

8.1 Trage en zware massa

In de klassieke mechanica wordt trage massa gedefinieerd door de volgende formulering van de tweede wet van Newton:

$$F = ma.$$

Dit is de massa die weerstand biedt, in termen van versnelling, aan een kracht. We hebben al gezien dat in de speciale relativiteitstheorie de rol van trage massa verandert en dat de manier waarop weerstand wordt geboden aan versnelling de volgende vorm aanneemt:

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = m\gamma a + mv\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}.$$

Zware massa is gedefinieerd in termen van de zwaartekrachtswet van Newton:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Al in de klassieke mechanica wordt aangenomen dat trage massa en zware massa hetzelfde zijn. Dit leidt in de klassieke mechanica onder andere tot de zwaartekrachtswet hier op de aardkorst:

$$F = mg,$$

met:

$$g = \frac{GM_{\text{aarde}}}{R^2_{\text{aarde}}}.$$

8.2 Het equivalentieprincipe

Het relativiteitsprincipe, het eerste postulaat van Einstein, impliceert de geldigheid van de natuurwetten voor alle inertiële waarnemers. Het ware natuurlijk makkelijk geweest als de natuurwetten gewoon geldig zijn voor alle waarnemers, inertieel of niet. In de algemene relativiteitstheorie heeft Einstein een raamwerk geformuleerd waarin inderdaad de natuurwetten gelden voor alle waarnemers, dus met name ook voor waarnemers in een versneld referentiestelsel.

In de algemene relativiteitstheorie verheft Einstein de gelijkheid van trage en zware massa tot een extra postulaat. Een andere formulering van de gelijkheid van trage en zware massa is de equivalentie van het effect van zwaartekacht op een puntmassa en van een versneld coördinatenstelsel op de puntmassa.

Het equivalentieprincipe zegt dat een waarnemer uit de kracht die op hem werkt niet uit kan maken of dat ten gevolge van zwaartekracht is of van een versnelling.

Als we kijken wat dat voor gevolg heeft voor een lichtstraal dan zien we dat het pad voor licht ten opzichte van een versneld referentiestelsel niet langer door een rechte lijn wordt gegeven, maar door een kromme baan. Maar wegens het equivalentieprincipe zal een lichtstraal dan dus ook in een zwaartekrachtsveld krom lopen.

8.3 Geodeten: iets dat krom is recht praten

Een andere manier om tegen de gekromde baan van een lichtstraal in een zwaartekrachtsveld aan te kijken is te claimen dat de lichtstraal recht loopt ten opzichte van de ruimte, maar dat de ruimte krom is. Bij deze manier van beschouwen wordt de ruimte kennelijk vervormd van vlak naar gekromd door de zwaartekracht. Het ligt dan voor de hand aan te nemen dat een grote massa, dat wil zeggen grote zwaartekracht, de ruimte krommer maakt dan een kleine massa.

Gelukkig kunnen we in een gekromde ruimte altijd plaatselijk de ruimte vlak veronderstellen. Bijvoorbeeld op het gekromde aardoppervlak zien we onze onmiddellijke omgeving als een platte aarde. (Dit heeft in het verleden wel aanleiding gegeven over verwarring betreffende de vorm van de aarde.)

Banen van deeltjes die ten opzichte van de ruimte recht zijn heten geodeten. De eerste wet van Newton kan nu wat algemener worden geïnterpeteerd: Een lichaam waarop geen externe kracht werkt volgt een geodeet door de ruimte. Dat een lichaam een geodeet volgt, is hetzelfde als een rechte baan ten opzichte van de ruimte doorlopen. In het geval de ruimte vlak is krijgen we de klassieke mechanica terug van Newton.

8.4 Snelheden en versnellingen in een gekromde ruimte

De snelheid is gedefinieerd als de afgeleide van de plaats naar de tijd. We hebben al gezien dat het voordelig is de afgeleide te nemen naar de eigentijd. Op die manier hebben we bijvoorbeeld de energie en impuls gedefinieerd en nemen de energie en impuls de transformatie eigenschappen van tijd en ruimte over.

Als we echter op en gekromd oppervlak werken dan verandert bijvoorbeeld de snelheid niet alleen door de intrinsieke snelheidsverandering van het deeltje in kwestie, maar ook doordat de ruimte verandert bij verplaatsing daarover. In dit geval moet ruimte zelfs ruim worden opgevat, de tijd is ook deel van de ruimte.

Als voorbeeld om dit te verduidelijken nemen we weer het aardoppervlak. Twee objecten die beiden vanaf de evenaar parallel en even snel naar het noorden bewegen kunnen starten met een zeker afstand tot elkaar. Zij zullen elkaar echter op de Noordpool tegenkomen en in het traject vanaf de evenaar naar de noordpool hun tussenafstand zien afnemen. Hoewel ze dus geen krachten in het spel zijn, zorgt de kromming van de ruimte voor een relatieve snelheidsverandering.

Een ander voorbeeld van hoe de ruimte je letterlijk in de knoop kan leggen is de oriëntatie van je hand als die over een boloppervlak beweegt dat wordt gegeven door je schoudergewricht als middelpunt en je armlengte als straal. Begin met je hand plat tegen je bovenbeen. Beweeg nu je arm van onder naar recht voor je terwijl je je hand parallel houdt. Beweeg nu je arm negentig graden opzij en houdt de oriëntatie van je hand ten opzichte van je arm constant. Beweeg nu je arm weer naar beneden tot langs je been, weer de oriëntatie van de hand ten opzichte van de arm constant houdend. Je arm is nu in de uitgangspositie, maar je hand is negentig graden verdraaid.

We hebben al gezien dat het nemen van de afgeleide naar de tijd een wat problematische procedure is. We hebben daarom in de speciale relativiteitstheorie de afgeleide naar de tijd voor de waarnemer vervangen door de afgeleide naar de eigentijd van het deeltje. Een andere manier om onder dit probleem uit te komen is om de afgeleide te nemen naar alle tijd- en ruimtecoördinaten op een symmetrische manier.

Om nu de versnelling te beschrijven in een gekromde ruimte bestaat de afgeleide uit twee delen, een deel met de intrinsieke verandering van de snelheid die wordt beschouwt plus een term die aangeeft hoe de ruimte over de kleine verplaatsing van de differentiaal verandert. De afgeleide met de twee termen heet de covariante afgeleide:

$$\frac{\mathrm{D}A^\mu}{\mathrm{D}x^\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} A^\alpha.$$

Het symbool $\Gamma^\mu_{\nu\alpha}$ blijkt te worden gegeven door:

$$\Gamma^\mu_{\nu\alpha} = \frac{g^{\mu\beta}}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta}\right),$$

waarin $g^{\mu\nu}$ de metriek is.[1] Omdat het resultaat van de covariante afgeleide een tensor is

[1] Dit volgt uit het feit dat $g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu$ altijd een invariant is, en dat dus voor de parallelle ver-

en de partiële afgeleide naar de plaats geen tensor is, is $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}$ ook geen tensor. Alleen. de combinatie van de twee termen is weer netjes een tensor. Het symbool $\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}$ heet ook wel het Christoffel symbool van de tweede soort en de volgende notatie wordt ook wel aangetroffen:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\alpha \end{matrix} \right\}.$$

We zien dat als de metriek niet afhangt van de plaats en de tijd de covariante afgeleide overgaat in de normale (partiële) afgeleide.

Uiteindelijk willen we wat kunnen zeggen over de versnelling. De versnelling is de afgeleide van de snelheid. Om de gewenste Lorentz invariantie te bereiken nemen we voor de snelheid van een deeltje:

$$\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s} = A^{\mu},$$

die we dus gelijkstellen aan de Lorentz-vector A^{μ}, die er eerder als algemeen beschouwden. We hebben hier de differentiaal van de wortel van de invariante lengte voor de eigen tijd-ruimte vector genomen om naar te differentiëren. Deze is op een factor c na de eigen tijd van een deeltje, $\mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}\tau$, waarbij τ de tijd is van de klok in rust ten opzichte van het deeltje dat wordt beschouwd.

Nemen we als voorbeeld een situatie waarin geen externe krachten werken, dan volgt zo'n deeltje met snelheid A^{μ} een geodeet, een *recht* pad:

$$\frac{\mathrm{D}A^{\mu}}{\mathrm{D}x^{\nu}} = \frac{\mathrm{D}(\mathrm{d}x^{\mu}/\mathrm{d}s)}{\mathrm{D}x^{\nu}} = 0.$$

De intrinsieke verandering van de snelheid is nu puur en alleen het gevolg van de structuur van de ruimte:

$$\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = -\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} A^{\alpha}.$$

Vermenigvuldigen we nu met de differentiaal ∂x^{ν} en vatten we alles als differentiaal op, zonder onderscheid te maken tussen gewone en partiële differentialen (dus $\partial x^{\nu} = \mathrm{d}x^{\nu}$ en $\partial A^{\mu} = \mathrm{d}A^{\mu}$, en delen we door de differentiaal $\mathrm{d}s$, dan krijgen we:

$$\frac{\mathrm{d}A^{\mu}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}s^2} = -\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}s}$$

Voor een vlakke ruimte, dat wil zeggen met een constante metriek in ruimte en tijd, volgt:

$$\frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}s^2} = 0$$

---

plaatsing daarvan geldt: $0 = \delta(g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu}) = (\partial g_{\mu\nu}/\partial x^{\alpha})A^{\mu}A^{\nu}\mathrm{d}x^{\alpha} + g_{\mu\nu}A^{\mu}\delta A^{\nu} + g_{\mu\nu}A^{\nu}\delta A^{\mu} = \left((\partial g_{\mu\nu}/\partial x^{\alpha}) - g_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} - g_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}\right) A^{\mu}A^{\nu}\mathrm{d}x^{\alpha}$ Door in deze vergelijking de drie indices μ, ν en α cyclisch te verwisselen en te gebruiken dat $\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}$ symmetrisch is onder het verwisselen van ν en α en de drie uitdrukkingen met cyclish verwisselde indices bij elkaar op te tellen volgt de uitdrukking van $\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}$ in termen van de metriek $g_{\mu\nu}$.

de eerste wet van Newton dus: geen versnelling op een deeltje waarop geen kracht werkt.

In de post-Newtoniaanse limiet nemen we de ruimtelijke snelheden $\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}s, i = 1,2,3$ klein, zodat we $\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}s, i = 1,2,3$ verwaarlozen ten opzichte van $\mathrm{d}x_0/\mathrm{d}s$, en waardoor $\mathrm{d}x_0/\mathrm{d}s = 1$ wordt. We houden dan één term over in de indices α en ν, namelijk voor $\alpha = \nu = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}s^2} = -\Gamma^\mu_{00}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s} = -\Gamma^\mu_{00}$$

Verder nemen we als onderdeel van de post-Newtoniaanse limiet aan dat de we een alleen kleine afwijking van de vlakke metriek hebben die tijd en ruimte afhankelijk kunnen zijn. Dit tijd en ruimte afhankelijk deel van de metriek geven we aan met $\gamma_{\mu\nu}$:[2]

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \gamma_{\mu\nu},$$

waarbij de elementen van $\gamma_{\mu\nu}$ klein zijn ten opzichte van 1. We kunnen dan $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ benaderen door voor de metriek waarmee als constante wordt vermenigvuldigd de vlakke (niet tijd-tuimte afhankelijke) metriek te gebruiken en in de afgeleiden speelt natuurlijk alleen $\gamma_{\mu\nu}$ een rol. We contraheren meteen met de constante metriek, waardoor de γ's soms ook een bovenindex krijgen en de laatste afgeleide naar een co-variant is in plaats van een contra-variant:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma^\mu_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial\gamma^\mu_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\right)$$

Invullen voor Γ^μ_{00} geeft:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma^\mu_0}{\partial x^0} + \frac{\partial\gamma^\mu_0}{\partial x^0} - \frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x_\mu}\right)$$

Voor het gemak maken we de substitutie:

$$U = -m\,c\,\gamma_{00}/2.$$

Vervolgens beschouwen we de $\mu = 0$ component van de vergelijking:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^0}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}E/mc}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{mc}\left(\frac{\partial U}{\partial x^0} + \frac{\partial U}{\partial x^0} - \frac{\partial U}{\partial x_0}\right) = -\frac{1}{mc}\left(\frac{\partial U}{\partial x^0}\right) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \tau},$$

waarbij we weer de lage snelheidslimiet hebben gebruikt waarin $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x^0 = \mathrm{d}x_0 = c\,\mathrm{d}\tau$.

Voor de ruimtelijke componenten $\mu = 1,2,3$ nemen we aan (weer als deel van de post-Newtoniaanse limiet) dat de veranderingen van γ_{0i} als functie van de eigentijd x^0 langzaam gaan ten opzichte van de verandering bij verplaatsing in de ruimte van γ_{00}, dus $|\partial\gamma_{0i}/\partial x^0| <<$

[2] De matrixvoorstelling is natuurlijk weer wat onnauwkeurig, maar je snapt wel wat er wordt bedoeld...

$|\partial\gamma_{00}/\partial x^i|$, voor $i = 1, 2, 3$, zodat geldt (voor $i = 1, 2, 3$, waarbij we overstappen op ruimtevector notatie $\vec{x} = x^i, i = 1, 2, 3$ en let op i is hier contravariante index):

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}/m}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma^i_0}{\partial x^0} + \frac{\partial\gamma^i_0}{\partial x^0} - \frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x_i}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{00}}{\partial x^i}\right) = -\frac{1}{mc}\frac{\partial U}{\partial \vec{x}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}}.$$

Als we nu U identificeren met de potentiaal van het zwaartekrachtsveld dan krijgen dat de toename in de tijd van de kinetische energie E precies de afname van de potentiële energie U:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \tau},$$

en dat de kracht, de verandering van de impuls in de tijd, precies het gevolg is van de gradiënt in de ruimte van de potentiaal:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}}.$$

Zonder verder bewijs wordt vermeld dat de gravitatiepotentiaal wordt berekend uit de massadichtheidverdeling σ als:[3]

$$\gamma_{00} = \frac{\kappa}{4\pi}\int_V \frac{\sigma \mathrm{d}\vec{x}}{r},$$

waarbij $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ de afstand is van het volume-elementje $\mathrm{d}\vec{x}$ tot de waarnemer, er wordt geïntegreerd over het ruimtelijk volume V en $\kappa = 1.86 \times 10^{-27}$ m/kg de constante is die de sterkte van de zwaartekracht karakteriseert.

8.5 Gevolgen van de algemene relativiteitstheorie

Het eerste gevolg van de algemene relativiteitstheorie is dat de invariante lengte

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$$

nog steeds invariant is en dat in het bijzonder de lichtsnelheid dus nog steeds hetzelfde is voor alle waarnemers, zelfs voor waarnemers in niet-inertiaalstelsels.

Het tweede gevolg is dat als gevolg van het feit dat

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$$

en de metriek $g_{\mu\nu}$ nu van de tijd en plaats kan afhangen de lengte van tijdintervallen en de lengte van objecten anders is voor inertiële waarnemers en versnelde waarnemers of waarnemers in een gravitatieveld. In het bijzonder hangt lengte en tijdverschil voor een niet inertiële waarnemer af van de tijd en plaats zelf. Klokken lopen trager op zeeniveau dan op de Mount Everest. De standaardmeter is in Parijs korter dan op de Mont-Blanc (voor een waarnemer in Parijs). Merk op dat de lokale waarnemer hier niets van merkt, die neemt zijn of haar klok en standaard meter mee en de tijd en afstand verandert niet.

[3]Zie het derdejaars college over algemene relativiteitstheorie.

Bibliografie

[1] Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687,
vertaald in het Engels door Andrew Motte, *The Principia*, Prometheus Books (Great minds series), New York, 1995, ISBN 0-87975-980-1.

[2] Het oorspronkelijk artikel over de speciale relativiteitstheorie van Einstein staat in het Duits op blackboard.

[3] De Engelse vertaling van het oorspronkelijke artikel over de relativiteitstheorie van Einstein staat op Blackboard.

[4] R. A. Serway en J. W. Jewett Jr., Physics for Scientists and Engineers, Sicth Ed., Thomson, 2004, ISBN 0-534-40844-3.

[5] A. Einstein, *The meaning of relativity*, Routledge Classics 2003, London, ISBN 0-415-28588-7.
(In dit boek staan helaas nogal wat typografische fouten, anders was het een ideale leertekst geweest om de relativiteitstheorie in tensornotatie te doorgronden.)