

# Dictaat bij het college Analytische Mechanica

W.J.P. Beenakker

Jaargang 2007 – 2008

## Inhoud van het college:

- 1) De Lagrangiaan in de klassieke mechanica
- 2) Bewegingen van starre lichamen
- 3) Via de Hamiltoniaan naar de kwantummechanica

## Nuttige literatuur (goed naslagwerk dat dieper op de stof ingaat dan strikt nodig is):

H. Goldstein, C.P. Poole and J.L. Safko, “Classical Mechanics”,  
third edition (Addison – Wesley, 2002), delen van Hst. 1, 2, 4, 5, 8 – 10.

# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>De Lagrangiaan in de klassieke mechanica</b>	<b>1</b>
1.1	Lagrange-vergelijking voor één vrijheidsgraad . . . . .	2
1.2	Lagrange-vergelijkingen voor meerdere vrijheidsgraden . . . . .	4
1.3	De implementatie van randvoorwaarden . . . . .	6
1.4	Een slinger met oscillerend ophangpunt . . . . .	9
1.5	Het variatieprincipe van Hamilton . . . . .	10
1.6	Behoudswetten . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Bewegingen van starre lichamen</b>	<b>17</b>
2.1	Het massamiddelpunt en relatieve coördinaten . . . . .	17
2.2	Bewegingsvergelijkingen voor rotaties . . . . .	21
2.3	Rotaties en hoeksnelheden . . . . .	22
2.4	Het gyroscopisch effect . . . . .	24
2.5	Traagheidsmomenten en deviatiemomenten . . . . .	26
2.6	Rotaties van een star lichaam rond een vaste as . . . . .	27
2.7	Rekenregels voor de bepaling van traagheidsmomenten . . . . .	29
2.8	Overgang naar een versneld coördinatenstelsel . . . . .	31
2.9	De bewegingsvergelijkingen van Euler . . . . .	34
2.10	Het tennisracket-theorema . . . . .	37
2.11	De aarde als vrije symmetrische tol . . . . .	40
2.12	Hoeken van Euler . . . . .	41
2.13	Lagrangianen voor roterende starre lichamen . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Via de Hamiltoniaan naar de kwantummechanica</b>	<b>48</b>
3.1	Het Poissonhaakje . . . . .	50
3.2	Kanonieke transformaties en Hamilton–Jacobi vergelijking . . . . .	52
3.3	De oude kwantumtheorie . . . . .	55
3.4	De Schrödinger-vergelijking . . . . .	58

# 1 De Lagrangiaan in de klassieke mechanica

In de klassieke mechanica worden de relevante bewegingsvergelijkingen van een systeem geschreven in termen van vectoren, zoals plaatsvectoren, snelheden, krachten, etc.. Met de term systeem wordt hier het geheel bedoeld van alle puntdeeltjes die we willen beschouwen, inclusief de krachten die op deze puntdeeltjes inwerken. Een puntdeeltje met constante massa  $m$  en Cartesische inertiaalcoördinaten  $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$  ten opzichte van een niet-versnelde waarnemer voldoet in de klassieke mechanica aan de 2<sup>e</sup> wet van Newton:

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \equiv m \frac{d}{dt} \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{F} = \text{de } \underline{\text{kracht}} \text{ op het puntdeeltje .}$$

Een bewegingsvergelijking van dit type heeft een tweetal onplezierige eigenschappen. Ten eerste verandert het sterk van vorm bij overgang naar een ander coördinatenstelsel, waarbij er alleen niets verandert onder Galilei-transformaties  $\vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \vec{v}t$  voor constante snelheden  $\vec{v}$ . Als er bijvoorbeeld een versneld coördinatenstelsel wordt gebruikt, dan zullen er schijnkrachten in rekening moeten worden gebracht (zoals zal worden uitgelegd in Hst. 2). Ten tweede moeten alle krachten op alle relevante puntdeeltjes bekend zijn om een systeem zinvol te kunnen beschrijven.

In de analytische mechanica zullen we gaan werken met zogenaamde scalaire grootheden die betrekking hebben op het systeem in zijn geheel, namelijk de totale kinetische energie en potentiële energie (arbeid). Meer zal niet nodig blijken te zijn om alle relevante bewegingsvergelijkingen te kennen. Het feit dat scalaire grootheden geen ruimtelijke richting hebben zal ons in staat stellen om bewegingsvergelijkingen te construeren die dezelfde vorm hebben voor willekeurige coördinatenstelsels. Deze nieuwe aanpak

- voldoet dus aan het relativiteitsprincipe en vormt dan ook een goed startpunt voor de mechanica van relativistische systemen;
- is systematisch en vereist geen volledige kennis van alle krachten als het systeem aan bepaalde randvoorwaarden moet voldoen (zie beneden);
- vormt een goed startpunt om de link met de kwantummechanica te leggen.

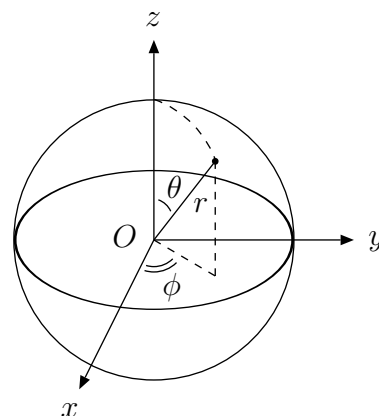
Alvorens de nieuwe bewegingsvergelijkingen af te leiden voeren we eerst even een paar begrippen in. Het aantal onafhankelijke coördinaten die nodig zijn om de bewegingen van alle puntdeeltjes van een systeem volledig te beschrijven noemen we de vrijheidsgraden van het systeem. Een systeem bestaande uit  $N$  vrije puntdeeltjes heeft bijvoorbeeld  $3N$  onafhankelijke Cartesische coördinaten  $x_k, y_k, z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), een puntdeeltje dat in het  $xy$ -vlak beweegt heeft twee onafhankelijke Cartesische coördinaten  $x$  en  $y$ , een puntdeeltje in een slingeropstelling heeft één hoekcoördinaat, etc.. In de laatste twee voorbeelden was er sprake van een randvoorwaarde (“constraint”), d.w.z. een kinematische relatie die als

bepierking aan de beweging van het systeem is opgelegd. Om een randvoorwaarde te implementeren dienen krachten te worden toegevoegd die ervoor zorgen dat aan de beweging de desgewenste beperking wordt opgelegd. In zulke gevallen zal het verstandig blijken te zijn om de keuze van het coördinatenstelsel expliciet aan deze randvoorwaarden aan te passen!

Voorbeeld: een deeltje dat op het oppervlak van een bol met straal  $R$  beweegt is het eenvoudigst aan de hand van de bolcoördinaten  $r$ ,  $\theta$  en  $\phi$  te beschrijven, waarbij

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta. \quad (1)$$

Immers, de afstand van het deeltje tot het middelpunt van de bol, d.w.z. de oorsprong van het bolcoördinatenstelsel, blijft constant gedurende de beweging. Er is dus sprake van één randvoorwaarde,  $r = R = \text{constant}$ , zodat de beweging van het deeltje wordt vastgelegd door de hoeken  $\theta$  en  $\phi$  die vrij te variëren zijn. We hebben hier dus te maken met twee vrijheidsgraden. Let wel: het gebruik van de transformatie (1) in de bewegingsvergelijking van Newton leidt in het algemeen tot een tamelijk gecompliceerde set gekoppelde differentiaalvergelijkingen. Tevens zal een extra kracht moeten worden toegevoegd zodanig dat de beweging van het deeltje uitsluitend op het boloppervlak kan plaatsvinden. In de nieuwe aanpak die we nu gaan afleiden zullen dit soort randvoorwaarden zonder toegevoegde complexiteit in rekening kunnen worden gebracht.



## 1.1 Lagrange-vergelijking voor één vrijheidsgraad

Gezocht: een slimme combinatie van de vergelijkingen van Newton zodanig dat een bewegingsvergelijking ontstaat die dezelfde vorm heeft voor willekeurige coördinatenstelsels.

Beschouw een systeem beschreven door één Cartesische inertiaalcoördinaat  $x(t)$  die voldoet aan de bewegingsvergelijking van Newton

$$m \ddot{x} = F(x, \dot{x}, t), \quad (2)$$

waarbij  $\dot{x} \equiv dx/dt$  en  $\ddot{x} \equiv d^2x/dt^2$ . Ga vervolgens over op de gegeneraliseerde coördinaat

$$q \equiv q(x, t), \quad \text{met inverse transformatie } x = x(q, t). \quad (3)$$

De Cartesische snelheid is dan als volgt te herschrijven:

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} \stackrel{(3)}{=} \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \equiv \dot{x}(q, \dot{q}, t), \quad (4)$$

waarbij is gebruikt dat  $x$  een functie van zowel  $q$  als  $t$  kan zijn. De partiële afgeleiden

zijn op de gebruikelijke manier gedefinieerd. Zo betekent bijvoorbeeld  $\partial x(q, t)/\partial q$  dat de afgeleide wordt genomen naar  $q$  terwijl  $t$  wordt vastgehouden. Door  $q, \dot{q}$  en  $t$  hier als onafhankelijke variabelen te beschouwen zijn de volgende identiteiten af te leiden:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} \stackrel{(4)}{=} \frac{\partial x}{\partial q} \quad \text{en} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial q} + \dot{q} \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \stackrel{(4)}{=} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q}. \quad (5)$$

Stap 1, de kinetische energie: de Cartesische impuls  $p$  van het deeltje kan worden verkregen uit de kinetische energie volgens

$$p \equiv m\dot{x} = \frac{dT}{d\dot{x}}, \quad \text{met} \quad T(\dot{x}) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \text{kinetische energie}. \quad (6)$$

Definieer vervolgens de met  $q$  geconjugeerde impuls (gegeneraliseerde impuls)

$$p_q \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \stackrel{(6)}{=} \frac{dT}{d\dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} \stackrel{(6)}{=} p \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} \stackrel{(5)}{=} p \frac{\partial x}{\partial q} \equiv p_q(q, \dot{q}, t). \quad (7)$$

Uit de bewegingsvergelijking van Newton

$$\dot{p} \stackrel{(2),(6)}{=} F(x, \dot{x}, t) \quad (8)$$

volgt dan

$$\dot{p}_q \stackrel{(7)}{=} \frac{d}{dt} \left( p \frac{\partial x}{\partial q} \right) = \dot{p} \frac{\partial x}{\partial q} + p \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q} \stackrel{(5),(6)}{=} \dot{p} \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{dT}{d\dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q} \stackrel{(6),(8)}{=} F \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial q}. \quad (9)$$

De term  $F \partial x/\partial q$  is te interpreteren als gegeneraliseerde kracht, terwijl de term  $\partial T/\partial q$  de schijnkrachten in rekening brengt behorende bij de gebruikte coördinatentransformatie.

Stap 2, de potentiële energie: schrijf nu

$$F \equiv - \frac{d}{dx} V(x) + F', \quad (10)$$

waarbij  $V(x)$  de potentiële energie (potentiaal) is behorende bij het conservatieve gedeelte van het krachtveld  $F$ . Met  $F'$  wordt verder het resterende gedeelte van  $F$  bedoeld dat we niet kunnen of willen schrijven in termen van een potentiaal. Op overeenkomstige wijze kan  $F \partial x/\partial q$  worden herschreven tot

$$F \frac{\partial x}{\partial q} = - \frac{dV}{dx} \frac{\partial x}{\partial q} + F' \frac{\partial x}{\partial q} = - \frac{\partial V}{\partial q} + F' \frac{\partial x}{\partial q} \equiv - \frac{\partial V}{\partial q} + Q', \quad (11)$$

waarbij de term  $-\partial V/\partial q$  kan worden geïnterpreteerd als de gegeneraliseerde conservatieve kracht. De grootte  $Q'$  bevat alle gegeneraliseerde krachten  $F' \partial x/\partial q$  die wel op het deeltje werken, maar die niet in de conservatieve potentiaal  $V$  zijn opgenomen. Denk hierbij aan wrijvingskrachten of de rekkracht van een onuittrekbare slingerdraad (zie § 1.3).

Nu hebben we alle ingrediënten voor de nieuwe bewegingsvergelijking. Deze bewegingsvergelijking zal worden geformuleerd in termen van de zogenaamde Lagrangiaan

$$L(q, \dot{q}, t) \equiv T(\dot{x}[q, \dot{q}, t]) - V(x[q, t]) , \quad (12)$$

die is gedefinieerd in termen van de Cartesische inertiaalcoördinaat  $x(t)$ . De gegeneraliseerde impuls kan worden verkregen uit de Lagrangiaan volgens

$$p_q \stackrel{(7)}{=} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \stackrel{(12)}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} , \quad (13)$$

zodat de bewegingsvergelijking (9) samen met vergelijking (11) aanleiding geeft tot de Lagrange-vergelijking

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q' . \quad (14)$$

Deze vergelijking hangt qua vorm niet meer af van de gekozen coördinatentransformatie.

Intermezzo: hoe zat het ook alweer met conservatieve krachtvelden?

Beschouw de arbeid  $dA$  die door een krachtveld  $\vec{F}$  wordt verricht op een puntdeeltje dat zich over het tijdsinterval  $dt$  voortbeweegt tussen de ruimtelijke punten  $\vec{r}$  en  $\vec{r} + d\vec{r}$ . Deze arbeid bedraagt per definitie  $dA \equiv d\vec{r} \cdot \vec{F}$ , hetgeen we kunnen herschrijven als  $dA = dt \dot{\vec{r}} \cdot m\ddot{\vec{r}} = d(\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2) = dT$ . De verrichte arbeid is daarmee gelijk aan de verandering in kinetische energie t.g.v. de snelheden in de eindpunten. Als de kracht  $\vec{F}$  conservatief is en derhalve kan worden verkregen uit de potentiële energie  $V(\vec{r}) = V(x, y, z)$  volgens

$$\vec{F} \equiv F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z = - \frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z = - \vec{\nabla} V , \quad (15)$$

dan geldt ook  $dA = -d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V = -dV$ . Voor eindige verplaatsingen hangt de arbeid dus alleen af van het potentiaalverschil tussen de eindpunten. Voor zo'n conservatief systeem geldt dan  $dT = -dV$ , oftewel de totale energie  $E = T + V$  is behouden.

## 1.2 Lagrange-vergelijkingen voor meerdere vrijheidsgraden

De afleiding voor één coördinaat kan worden uitgebreid tot  $N$  Cartesische inertiaalcoördinaten  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\} \equiv \{x_j\}$  en gegeneraliseerde coördinaten  $\{q_1, q_2, \dots, q_N\} \equiv \{q_j\}$ . Hiertoe hoeven alleen de kinetische en potentiële energieën vervangen te worden door de algemene uitdrukkingen

$$T(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_N) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \dot{x}_k^2 \equiv T(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) = \underline{\text{de totale kinetische energie}} ,$$

$$V(x_1, \dots, x_N) \equiv V(\{q_j\}, t) = \underline{\text{de totale potentiële energie}} , \quad (16)$$

waarbij  $m_k$  de constante massa is van het puntdeeltje met Cartesische coördinaat  $x_k$ .

De Lagrangiaan en generaliseerde impulsen zijn dan te definiëren als

$$L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) \equiv T(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) - V(\{q_j\}, t) = \underline{\text{de Lagrangiaan}}, \quad (17)$$

alsmede

$$p_{q_j} \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \underline{\text{de met } q_j \text{ geconjugeerde impuls}} \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (18)$$

De bijbehorende Lagrange-vergelijkingen worden dan simpelweg gegeven door:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q'_j \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (19)$$

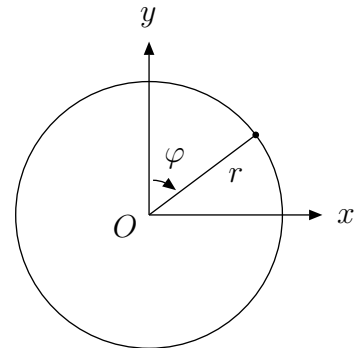
Hieruit kunnen we onmiddellijk een belangrijke fysische consequentie aflezen.

Cyclische variabelen: als de gegeneraliseerde coördinaat  $q_k$  in het geheel niet voorkomt in de Lagrangiaan én  $Q'_k = 0$ , dan is de met  $q_k$  geconjugeerde impuls  $p_{q_k} = \partial L / \partial \dot{q}_k$  tijds-onafhankelijk. De coördinaat  $q_k$  wordt dan een cyclische variabele genoemd en de tijds-onafhankelijke impuls  $p_{q_k}$  heet een behouden grootte (of ook: bewegingsconstante).

$$\text{Bewijs: } \dot{p}_{q_k} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \stackrel{(19)}{=} \frac{\partial L}{\partial q_k} + Q'_k \stackrel{\text{gegeven}}{=} 0.$$

Voorbeeld: beschouw een deeltje met constante massa  $m$  dat beweegt in het  $xy$ -vlak onder invloed van een centrale potentiaal, d.w.z. een potentiaal die slechts afhangt van de afstand  $r$  tot de oorsprong van het coördinatenstelsel. Het ligt dan voor de hand als gegeneraliseerde coördinaten de poolcoördinaten  $r$  en  $\varphi$  te nemen, gedefinieerd door

$$x = r \sin \varphi \quad \text{en} \quad y = r \cos \varphi. \quad (20)$$



In opgave 2 van het werkcollege zal dan worden aangetoond dat de Lagrangiaan van dit systeem wordt gegeven door

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r), \quad (21)$$

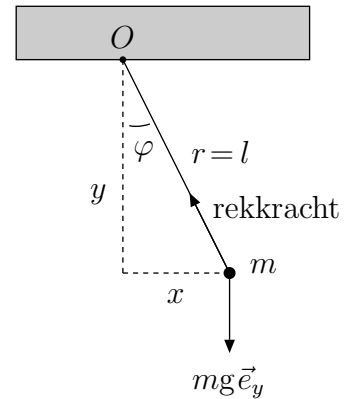
met  $V(r)$  de centrale potentiaal van het systeem. Op basis van het bovenstaande kan dan worden afgeleid dat

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} \quad (22)$$

een behouden grootte is, hetgeen in feite een verschijningsvorm is van een welbekende behoudswet (zie later).

### 1.3 De implementatie van randvoorwaarden

Ter illustratie: als voorbeeld van een systeem met een expliciete randvoorwaarde beschouwen we de mathematische slinger (zie plaatje). Een puntmasa met constante massa  $m$  beweegt in een verticaal vlak onder invloed van de zwaartekracht (met versnelling  $g$ ) en de rekkraft van een massaloze onvervormbare draad waaraan het vast zit. De draad heeft een vaste lengte  $l$ , d.w.z. dat de afstand van de puntmasa tot het ophangpunt  $O$  van de slinger vastligt en dat er dus sprake is van een randvoorwaarde.



In de bewegingsvergelijkingen van Newton zijn nu niet alle krachten bekend. In de plaats daarvan hebben we een expliciete randvoorwaarde. De onbekende rekkraft is dan een reactiekracht die gelijk moet worden genomen aan de kracht die nodig is om de beweging te laten voldoen aan de randvoorwaarde. Echter, het bepalen van reactiekrachten langs deze weg is in het algemeen niet eenvoudig. Dit probleem kan efficiënter worden aangepakt met behulp van de Lagrangiaanmethode, gebruik makende van de volgende algemene strategie:

- vind combinaties van de bewegingsvergelijkingen van Newton zodanig dat de reactiekrachten afwezig zijn. Los voor deze speciale set van gegeneraliseerde coördinaten de bijbehorende Lagrange-vergelijkingen op onder aanname van de randvoorwaarden. Dit legt de beweging van het systeem vast. Het aantal onafhankelijke gegeneraliseerde coördinaten van dit type wordt gegeven door de vrijheidsgraden van het beschouwde systeem.
- substitueer deze oplossing voor de beweging vervolgens in de Lagrange-vergelijkingen behorende bij de resterende coördinaten. Dit legt dan de reactiekrachten vast.

In bovenstaand slingervoorbeeld werkt deze strategie als volgt. Om de randvoorwaarde te isoleren wordt er overgegaan op de poolcoördinaten uit vergelijking (20), waarbij de  $y$ -as in de richting van de zwaartekracht is gelegd en waarbij de oorsprong samenvalt met het ophangpunt  $O$  van de slinger. Dit geeft aanleiding tot de eenvoudige randvoorwaarde  $\sqrt{x^2 + y^2} = r = l$ , hetgeen geformuleerd is in termen van één gegeneraliseerde coördinaat.

Benader de Lagrangiaan van het systeem nu door

$$L'(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) \stackrel{(21)}{=} \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + mgr \cos \varphi - V'(r) \equiv L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) - V'(r), \quad (23)$$

met  $V(r, \varphi) = -mgr \cos \varphi = -mgy$  de zwaartekrachtspotentiaal en  $V'(r)$  de radiële potentiaal die verantwoordelijk is voor de randvoorwaarde  $r = l$ . De aanname hierbij is



dat de potentiaal  $V'(r)$  een diep scherp minimum heeft bij  $r = l$ . Dit houdt in dat voor laagenergetische radiële bewegingen van het systeem de vibraties rond dat minimum een verwaarloosbare amplitude hebben. Denk hierbij bijvoorbeeld aan een veer met zeer grote veerconstante  $k$  (zie opgave 1 van het werkcollege).

De feitelijke beweging van het systeem: in het slingervoorbeeld wordt de slingerbeweging vastgelegd door de hoekvariabele  $\varphi$ , met bijbehorende Lagrange-vergelijking

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L'}{\partial \varphi} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \xrightarrow{(23)} \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\varphi}) + mgr \sin \varphi = 0 \\ &\xrightarrow{r=l} \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

hetgeen we herkennen als de welbekende slingervergelijking. Hiervoor hoeven we alleen de randvoorwaarde te kennen en niet de verantwoordelijke potentiaal.

De randvoorwaarde: de resterende Lagrange-vergelijking bij de radiële coördinaat  $r$  geeft

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L'}{\partial r} = 0 \Rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi + \frac{dV'(r)}{dr} = 0. \quad (25)$$

In verband met het diepe scherpe minimum van  $V'(r)$  bij  $r = l$  kan hieruit de radieel naar binnen gerichte rekkracht (reactiekracht) worden afgeleid:

$$Q'_r \equiv - \left. \frac{dV'(r)}{dr} \right|_{r=l+\Delta l} = -ml\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi, \quad (26)$$

waarbij  $\Delta l$  de voor de rekkracht benodigde zeer kleine afwijking ten opzichte van het potentiaalminimum aangeeft. Dit kan kort worden samengevat in de vergelijking

$$Q'_r = \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} \right]_{r=l}. \quad (27)$$

De onbekende radiële potentiaal  $V'(r)$  verdwijnt zo helemaal uit de beschouwing. Omdat de hoekbeweging loodrecht staat op de radiële beweging valt de eerste term tussen de rechte haken hier weg, in verband met de afwezigheid van kruistermen  $\propto \dot{r}\dot{\varphi}$ , en hoeft nergens de slingervergelijking te worden ingevuld. Voor niet-orthogonale coördinaatkeuzes doen beide termen mee en kan ter vereenvoudiging de bewegingsvergelijking worden ingevuld.

Let wel: de radieel naar binnen gerichte rekkracht staat loodrecht op de hoekbeweging van de slinger en beïnvloedt die dan ook niet. De rekkracht verricht zo geen arbeid tijdens de slingerbeweging, zodat deze beweging conservatief is en dus voldoet aan energiebehoud.

Resumerend: dit leidt tot het volgende effectieve recept om met randvoorwaarden om te gaan in de context van de Lagrangiaanmethode. Beschouw een systeem dat zonder randvoorwaarden conservatief is en  $N$  vrijheidsgraden heeft, zodat de beweging wordt bepaald

door de Cartesische coördinaten  $x_j(t)$  voor  $j = 1, 2, \dots, N$ . Voor een gegeven potentiaal van het systeem ligt de Lagrangiaan dan vast. Neem verder aan dat als beperking op de mogelijke bewegingen van het systeem de onafhankelijke randvoorwaarden  $f_k(\{x_j\}, t) = 0$  zijn opgelegd voor  $k = 1, 2, \dots, C$ . Kies nu zodanige gegeneraliseerde coördinaten dat

- $C$  van deze coördinaten worden gegeven door  $q_k = f_k(\{x_j\}, t)$  voor  $k = 1, 2, \dots, C$ . Bijvoorbeeld:  $q_1 = r - l$  in het slingervoorbeeld.
- de overige  $N - C$  coördinaten onafhankelijk zijn, zoals  $q_2 = \varphi$  in het slingervoorbeeld.

De randvoorwaarden zijn dan van de vorm  $q_k = 0$  voor  $k = 1, 2, \dots, C$ . De eigenschappen van het systeem zijn vervolgens in twee stappen te bepalen.

1. Pas de randvoorwaarden rechtstreeks op de Lagrangiaan toe. Hieruit volgen de correcte bewegingsvergelijkingen voor de feitelijke  $N - C$  vrijheidsgraden van het systeem:

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right]_{q_1 = \dots = q_C = 0} = 0 \quad \text{voor } k \neq 1, 2, \dots, C. \quad (28)$$

Deze bewegingsvergelijkingen zijn te vinden zonder dat de reactiekrachten expliciet moeten worden bepaald.

2. Desgewenst kunnen de verschillende reactiekrachten worden verkregen door te kijken naar de gegeneraliseerde coördinaten  $q_k$  voor  $k \leq C$ :

$$Q'_k = \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right]_{q_1 = \dots = q_C = 0} \quad \text{voor } k = 1, 2, \dots, C. \quad (29)$$

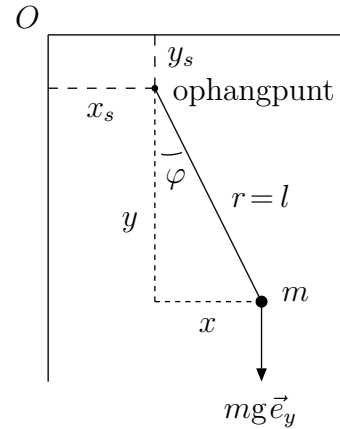
Bij elke onafhankelijke randvoorwaarde hoort dus een bepaalde reactiekracht.

De randvoorwaarden  $f_k(\{x_j\}, t) = 0$  worden holonome randvoorwaarden genoemd. Een extreem voorbeeld van een systeem met zeer veel van dit soort randvoorwaarden is een star lichaam (zie Hst. 2), waarvoor geldt dat  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = d_{ij}$  constant is voor elk paar puntdeeltjes in het lichaam. We zullen zien dat dit betekent dat de bewegingen van een star lichaam kunnen worden beschreven aan de hand van slechts zes gegeneraliseerde coördinaten. Te weten: de drie coördinaten van het massamiddelpunt en drie hoeken.

Opmerking: er bestaan ook niet-holonome randvoorwaarden, bijvoorbeeld randvoorwaarden van het type  $r \geq R$  of randvoorwaarden in termen van snelheden. Meestal is de Lagrangiaanmethode minder geschikt voor dit soort randvoorwaarden. In hoofdstuk 2 zullen we echter een geschikt 1-dimensionaal voorbeeld van deze laatste mogelijkheid tegen gaan komen in de vorm van een bal die rolt zonder te slippen, hetgeen inhoudt dat het raakpunt tussen de bal en de ondergrond in rust is ten opzichte van deze ondergrond.

## 1.4 Een slinger met oscillerend ophangpunt

Een voorbeeld waarbij de Lagrangiaanmethode goed tot zijn recht komt wordt gegeven door een slinger waarvan het ophangpunt gedwongen wordt om volgens een vast patroon te bewegen. Hiertoe kan het ophangpunt bijvoorbeeld op een rails worden gemonteerd. De coördinaten van het ophangpunt geven we aan met  $(x_s(t), y_s(t))$  ten opzichte van de oorsprong  $O$  van een vast assenstelsel (zie plaatje). De coördinaten van de puntmassa noteren we als  $(x, y)$  ten opzichte van dat bewegende ophangpunt, oftewel  $(x + x_s, y + y_s)$  ten opzichte van  $O$ . Gebruik vervolgens voor  $(x, y)$  weer poolcoördinaten:  $x = l \sin \varphi$  en  $y = l \cos \varphi$ .



De kinetische energie van het puntdeeltje wordt dan gegeven door

$$T \stackrel{\text{t.o.v. } O}{=} \frac{1}{2} m \left[ (\dot{x} + \dot{x}_s)^2 + (\dot{y} + \dot{y}_s)^2 \right] = \frac{1}{2} m \left[ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{x}_s + 2\dot{y}\dot{y}_s + \dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2 \right]$$

$$\stackrel{r=l, \dot{r}=0}{=} \frac{1}{2} m \left[ l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}(\dot{x}_s \cos \varphi - \dot{y}_s \sin \varphi) + \dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2 \right], \quad (30)$$

en de potentiële energie door

$$V = -mgl \cos \varphi - mgy_s = -mg(y + y_s). \quad (31)$$

De Lagrangiaan van het systeem wordt zo

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \left[ l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}(\dot{x}_s \cos \varphi - \dot{y}_s \sin \varphi) + \dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2 \right] + mg \left[ l \cos \varphi + y_s \right]. \quad (32)$$

De beweging van het systeem volgt wederom uit de Lagrange-vergelijking voor de coördinaat  $\varphi$ . Deze coördinaat legt de beweging namelijk volledig vast, gegeven de opgelegde vaste beweging van het ophangpunt. Voor de Lagrange-vergelijking hebben we nu de volgende ingrediënten nodig:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -ml(\dot{x}_s \dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{y}_s \dot{\varphi} \cos \varphi + g \sin \varphi),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = p_\varphi = ml^2 \dot{\varphi} + ml(\dot{x}_s \cos \varphi - \dot{y}_s \sin \varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \ddot{\varphi} + ml(\ddot{x}_s \cos \varphi - \ddot{y}_s \sin \varphi - \dot{x}_s \dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{y}_s \dot{\varphi} \cos \varphi).$$

De bewegingsvergelijking wordt dan simpelweg

$$\ddot{\varphi} + \frac{\ddot{x}_s}{l} \cos \varphi - \frac{\ddot{y}_s}{l} \sin \varphi + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (33)$$

Neem tenslotte aan dat de uitslag van de slinger klein blijft gedurende de beweging, d.w.z. neem aan dat  $\varphi \ll 1$ . Verder wordt de volgende horizontale oscillatie aan het ophangpunt opgelegd:  $y_s = 0$  en  $x_s = x_0 \cos(\omega t)$ . Dan gaat bovenstaande bewegingsvergelijking bij benadering over in de gelineariseerde vorm

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = \frac{\omega^2 x_0}{l} \cos(\omega t), \quad (34)$$

waarbij  $\omega_0 \equiv \sqrt{g/l}$  de natuurlijke (vrije) hoekfrequentie van de oscillator wordt genoemd. Deze bewegingsvergelijking is mathematisch gezien equivalent met de bewegingsvergelijking van een gedwongen harmonische oscillator.

## 1.5 Het variatieprincipe van Hamilton

Er is ook een alternatieve manier om naar de Lagrange-vergelijkingen te kijken, namelijk vanuit het perspectief van een variatieprincipe. Beschouw hiertoe een systeem met één gegeneraliseerde coördinaat  $q$  beschreven door de Lagrangiaan  $L(q, \dot{q}, t)$ . We beginnen met een conservatief systeem waarvoor geldt dat alle voor  $q$  relevante krachten in de potentiaal zijn opgenomen. De beweging van het systeem volgt uit de Lagrange-vergelijking voor  $q$  én twee extra condities die nodig zijn om de oplossing van een 2<sup>e</sup>-orde differentiaalvergelijking vast te leggen, bijvoorbeeld de coördinaat  $q$  op de tijdstippen  $t_0$  en  $t_1 > t_0$ . We zien dus dat de causaliteit van de beweging beide kanten op werkt, immers de beginsituatie op  $t = t_0$  beïnvloedt de eindsituatie op  $t = t_1$ , en vice versa.

Dit idee van dubbele causaliteit staat nu aan de basis van een variatieprincipe. Bekijk hiertoe alle mogelijke door  $t$  geparmetriseerde paden  $\{q(t) : t \in [t_0, t_1]\}$  zodanig dat de begin- en eindpunten  $q(t_0) = q_i$  en  $q(t_1) = q_f$  zijn vastgelegd. Definieer voor deze specifieke klasse van paden de lijnintegraal

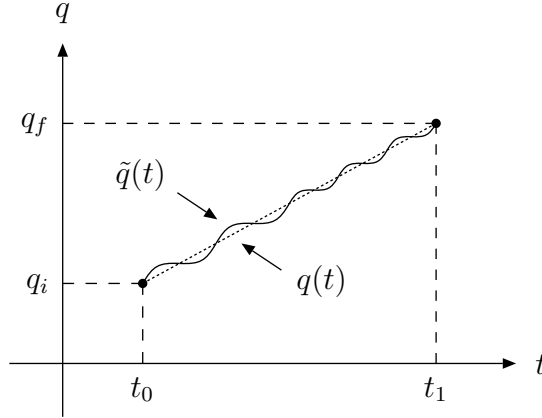
$$S \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) = \text{de } \underline{\text{actie}} \text{ van het systeem.} \quad (35)$$

Het variatieprincipe van Hamilton luidt nu als volgt: als voor een gegeven pad de actie niet verandert (op 1<sup>e</sup> orde) onder willekeurige infinitesimale variaties rond dat pad, dan beschrijft dat pad een beweging die aan de Lagrange-vergelijking voldoet, en vice versa. Met andere woorden: de actie  $S$  is stationair (heeft een extremum) bij precies die bewegingen die voldoen aan de Lagrange-vergelijkingen.

Let wel: in het dagelijkse leven wordt veelvuldig gebruik gemaakt van dit soort variatieprincipes, waarbij een bepaalde grootte wordt geminimaliseerd of gemaximaliseerd voor vaste begin- en eindcondities. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de bepaling van de kortste weg tussen twee punten (zie opgave 5 van het werkcollege) of rendementsmaximalisering van zulke uiteenlopende zaken als motoren, financiële investeringen, spinnenwebben, etc..

Bewijs van het variatieprincipe van Hamilton: beschouw voor een gegeven pad  $q(t)$  de volgende infinitesimale synchrone variaties met vaste eindpunten (zie plaatje):

$$q(t) \rightarrow \tilde{q}(t) = q(t) + \delta q(t), \quad \text{met } \delta q(t) \text{ infinitesimaal en } \delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0. \quad (36)$$



Dit induceert de volgende variatie in de actie  $S$ :

$$\delta S \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt [L(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t) - L(q, \dot{q}, t)] \stackrel{\mathcal{O}(\delta q)}{=} \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right). \quad (37)$$

Hierbij is gebruik gemaakt van het feit dat de variaties synchroon zijn en dus geen invloed uitoefenen op de tijd. Dit heeft tot gevolg dat de bewerking  $\delta$  te verwisselen is met tijdsafgeleiden alsmede integralen over de tijd. Zo geldt bijvoorbeeld ook dat

$$\delta \dot{q} = \delta \left( \frac{dq}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\delta q),$$

zodat

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\delta q) \stackrel{\text{partiële int.}}{=} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t=t_0}^{t=t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt \delta q \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}.$$

Invullen in vergelijking (37) levert uiteindelijk

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t=t_0}^{t=t_1} = 0 \quad \forall \delta q \text{ uit (36)} \\ &\stackrel{\delta q(t_0)=\delta q(t_1)=0}{\iff} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

De oplossingen van de Lagrange-vergelijking corresponderen dus zowel met minima als maxima van de actie en in meerdere dimensies zelfs met zadelpunten. Intuïtief lijkt dit bizar. Het is echter zo dat het variatieprincipe in feite volgt uit een kwantummechanisch

stationaire-fase argument: in het punt  $q(t_1) = q_f$  vindt interferentie plaats tussen kwantummechanische golven die langs verschillende paden vanuit  $q(t_0) = q_i$  daar aankomen. De fase van zo'n golf is daarbij proportioneel met de klassieke actie  $S$ . In de klassieke limiet is de faseverandering tussen naburige paden in het algemeen groot, zodat de kwantummechanische golven behorende bij clusters van naburige paden zullen uitmiddelen tot 0 (destructieve interferentie) in het punt  $q(t_1) = q_f$ , behalve in die situaties waarvoor de fase (lees: de klassieke actie) stationair is en dus niet verandert tussen naburige paden!

Uit bovenstaand variatieprincipe van Hamilton zijn nu een tweetal belangrijke consequenties rechtstreeks af te leiden.

- Keuzevrijheid voor de Lagrangiaan: er kan altijd een totale tijdsafgeleide  $dG(q, t)/dt$  bij de Lagrangiaan worden opgeteld zonder de bewegingsvergelijking te veranderen.

Bewijs: neem aan dat  $L' = L + dG(q, t)/dt$ . Dan geldt voor een willekeurige synchrone variatie van het type (36) dat

$$\delta S' = \delta \int_{t_0}^{t_1} dt L' = \delta S + \int_{t_0}^{t_1} dt \frac{d}{dt} \delta G \stackrel{G(q,t)}{=} \delta S + \left[ \frac{\partial G}{\partial q} \delta q \right]_{t=t_0}^{t=t_1} \stackrel{\delta q(t_0)=\delta q(t_1)=0}{=} \delta S .$$

Als  $q(t)$  nu voldoet aan de bewegingsvergelijking bij de Lagrangiaan  $L$ , dan geldt op grond van vergelijking (38) dat  $\delta S = \delta S' = 0$ , zodat wederom op grond van vergelijking (38) geconcludeerd kan worden dat  $q(t)$  ook voldoet aan de bewegingsvergelijking bij de Lagrangiaan  $L'$ .

- De Lagrange-vergelijking heeft dezelfde vorm voor willekeurige coördinatenstelsels.

Bewijs: schrijf  $q(t) \equiv q[\bar{q}(t), t]$ , zodat geldt

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) = \int_{t_0}^{t_1} dt L(q[\bar{q}(t), t], \dot{q}[\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t], t) \equiv \int_{t_0}^{t_1} dt \bar{L}(\bar{q}(t), \dot{\bar{q}}(t), t) .$$

De nieuwe Lagrangiaan  $\bar{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$  volgt op die manier regelrecht uit  $L(q, \dot{q}, t)$  door simpelweg  $\dot{q} = (\partial q / \partial \bar{q}) \dot{\bar{q}} + \partial q / \partial t$  en  $q = q(\bar{q}, t)$  in te vullen. Als  $q(t)$  nu voldoet aan de Lagrange-vergelijking bij de Lagrangiaan  $L(q, \dot{q}, t)$ , dan geldt op grond van vergelijking (38) dat  $\delta S = 0$ , zodat wederom op grond van vergelijking (38)  $\bar{q}(t)$  moet voldoen aan de Lagrange-vergelijking bij de Lagrangiaan  $\bar{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$ . Deze vorminvariantie van de Lagrange-vergelijkingen is dus een rechtstreeks gevolg van het verband tussen de oplossingen van de bewegingsvergelijkingen en de extrema van een scalaire grootte. Dit bevestigt trouwens ook de procedure die we tot nu toe hebben gehanteerd door de Lagrangiaan  $L = T - V$  eerst in termen van Cartesische coördinaten te bepalen en daarna om te schrijven naar willekeurige coördinaten. Uit deze omgeschreven functie in termen van de nieuwe coördinaten volgen dan de relevante Lagrange-vergelijkingen voor de nieuwe coördinaten.

Vraag: *wat gebeurt er nu als we een ander inertiaalstelsel kiezen om  $T$  te definiëren?*

We verwachten dat er in feite niets verandert onder de bijbehorende Galilei-transformatie  $x(t) = q(t) + vt$  voor constante snelheid  $v$ . Omschrijven van de kinetische energie levert

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{q} + v)^2 = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{d}{dt} (mvq + \frac{1}{2} mv^2 t) .$$

Op grond van het bovenstaande mogen we deze totale tijdsafgeleide uit de omgeschreven Lagrangiaan verwijderen zonder dat daarbij iets aan de bewegingsvergelijkingen verandert. Dus we hadden net zo goed meteen van de inertiaalcoördinaat  $q$  uit kunnen gaan om  $T$  te definiëren. Gelukkig maar!

Inclusief randvoorwaarde: voor de volledigheid beschouwen we tenslotte de situatie dat er een holonome randvoorwaarde  $f(q, t) = 0$  aan het systeem is opgelegd. Wederom passen we het variatieprincipe toe voor paden met vaste eindpunten. Echter, om ervoor te zorgen dat de paden ook nog eens aan de randvoorwaarde voldoen gebruiken we de zogenaamde multiplicatorenmethode van Lagrange. We voegen hiertoe een extra term aan de actie toe:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ L(q, \dot{q}, t) + \lambda(q, t) f(q, t) \right] = 0 \quad \forall \quad \forall \\ \delta \lambda \quad \delta q \text{ uit (36)}$$

$$\Leftrightarrow f(q, t) = 0 \quad \text{én} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \lambda \frac{\partial f}{\partial q} \equiv Q' , \quad (39)$$

waarbij zowel de paden  $q$  als de Lagrange-multiplicatoren  $\lambda$  onafhankelijk worden gevarieerd. In de laatste stap is hierbij gebruikt dat

$$\delta(\lambda f) = f \delta \lambda + \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial q} \delta q + \lambda \frac{\partial f}{\partial q} \delta q ,$$

zodat uit de onafhankelijke variatie van de Lagrange-multiplicatoren  $\lambda$  automatisch volgt dat  $f(q, t) = 0$ . Om deze randvoorwaarde aan de beweging op te kunnen leggen moet de Lagrange-multiplicator  $\lambda$  (en dus de reactiekracht  $Q'$ ) een vorm hebben die rechtstreeks volgt uit de Lagrange-vergelijking met inachtneming van de randvoorwaarde, precies zoals we dat in § 1.3 hebben gedaan.

De multiplicatorenmethode wordt veelvuldig toegepast in de fysica om grootheden te minimaliseren dan wel maximaliseren onder bepaalde randvoorwaarden. Denk hierbij aan de bepaling van de kortste weg (geodeet) tussen twee punten op een gegeven oppervlak, hetgeen van belang is voor de algemene relativiteitstheorie. In de statistische fysica zal bijvoorbeeld de entropie van een thermodynamisch systeem in thermisch evenwicht gemaximaliseerd worden voor een gegeven gemiddelde energie van het systeem. Ook in de kwantummechanica wordt deze techniek gebruikt om bijvoorbeeld de energie van een systeem te minimaliseren voor een gegeven vast aantal deeltjes. In opgave 6 van het werkcollege bekijken we tenslotte het beroemde brachistochroon probleem dat aan de basis heeft gestaan van het ontstaan van de variatierekening.

## 1.6 Behoudswetten

Behoudswetten spelen een belangrijke rol in de fysica, aangezien ze informatie over een systeem verstrekken zonder dat het probleem volledig moet worden opgelost. Op basis van de Lagrangiaanmethode zijn er drie klassen van behoudswetten te formuleren. De eerste klasse volgt rechtstreeks uit de gebruikte Lagrangiaan, omdat bepaalde variabelen onmiddellijk als cyclische variabelen te identificeren zijn. De tweede klasse volgt uit algemene symmetrie-overwegingen, hetgeen ons in staat zal stellen additionele collectieve cyclische variabelen te vinden die verborgen zitten in de Lagrangiaan. De derde klasse van behoudswetten wordt gegeven door de randvoorwaarden van het systeem. Deze laatste klasse is een triviaal gevolg van de definitie van het beschouwde fysische systeem en zal hier dan ook niet verder onder de loep worden genomen.

(A) Behoudswetten die we zo van de Lagrangiaan kunnen aflezen.

- Als de gegeneraliseerde coördinaat  $q_k$  in het geheel niet voorkomt in de beschouwde Lagrangiaan én als tevens alle voor  $q_k$  relevante krachten in de potentiaal zijn opgenomen ( $\Rightarrow Q'_k = 0$ ), dan is  $p_{q_k}$  een behouden grootte.

Het bewijs hiervan is op pagina 5 terug te vinden.

Let wel: coördinaten die aan randvoorwaarden moeten voldoen vallen automatisch niet in deze categorie, omdat  $Q'_k \neq 0$ .

- Ook de tijd kan een cyclische variabele zijn indien  $\partial L / \partial t = 0$ . Dit houdt in dat de tijd uitsluitend in de Lagrangiaan voorkomt via de tijdsafhankelijkheid van de gebruikte coördinaten  $q_j(t)$  en niet als een (expliciete) afzonderlijke parameter. Ook voor deze situatie kan een behoudswet worden geformuleerd.

Als  $\partial L / \partial t = 0$  én als tevens geldt dat het systeem uitsluitend conservatieve krachten heeft die in de potentiaal zijn opgenomen ( $\Rightarrow \forall_k Q'_k = 0$ ), dan is de Hamiltoniaan  $H \equiv \sum_j p_{q_j} \dot{q}_j - L$  behouden.

$$\begin{aligned} \text{Bewijs: } \frac{dH}{dt} &\stackrel{(17)}{=} \sum_j \dot{q}_j \left( \dot{p}_{q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) + \sum_j \ddot{q}_j \left( p_{q_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \\ &\stackrel{(18),(19)}{=} \sum_j \dot{q}_j Q'_j - \frac{\partial L}{\partial t} \stackrel{\text{gegeven}}{=} 0. \end{aligned}$$

Onder bepaalde voorwaarden is deze Hamiltoniaan de totale energie van het beschouwde systeem (zie opgave 7 van het werkcollege).

In geval van randvoorwaarden moet worden voorkomen dat een tijdsafhankelijkheid aan de Lagrangiaan wordt toegevoegd. Er zal dan moeten worden geëist dat de randvoorwaarden en coördinatentransformaties geen expliciete tijdsafhankelijkheid hebben, d.w.z. de randvoorwaarden zijn van de vorm  $f_k(\{x_j\}) = 0$  met  $x_j = x_j(\{q_l\})$  in



termen van de Cartesische coördinaten  $\{x_j\}$ . Nu kunnen we gebruik maken van het feit dat de bijbehorende reactiekrachten loodrecht op de opgelegde beweging staan en dientengevolge geen arbeid verrichten. Per eenheid van tijd geeft dit aanleiding tot de volgende vergelijking:

$$0 = \frac{dA'}{dt} = \sum_j \dot{x}_j F'_j \stackrel{(5), \partial x_j / \partial t = 0}{=} \sum_{j,l} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} \dot{q}_l F'_j \stackrel{(11)}{=} \sum_l \dot{q}_l Q'_l .$$

Op basis hiervan valt één van de twee termen in de uitdrukking voor  $dH/dt$  weer netjes weg. Als ook nog geldt dat  $\partial L / \partial t = 0$ , dan is de Hamiltoniaan wederom een behouden grootte.

(B) Behouden grootheden bij symmetrieën van de Lagrangiaan.

We spreken in de analytische mechanica van een symmetrie als het beschouwde systeem aan de volgende eisen voldoet in termen van de Cartesische coördinaten  $\{x_j\}$ :

- (i) de randvoorwaarden van het systeem zijn van de vorm  $f_k(\{x_j\}) = 0$ , om te voorkomen dat de reactiekrachten arbeid kunnen verrichten;
- (ii) afgezien van de reactiekrachten heeft het systeem verder uitsluitend conservatieve krachten die in de Lagrangiaan zijn opgenomen;
- (iii) deze Lagrangiaan is invariant onder een bepaalde infinitesimale synchrone coördinatentransformatie die consistent is met de randvoorwaarden, d.w.z.  $\delta L = 0$  voor een transformatie  $\{x_j(t)\} \rightarrow \{x_j(t) + \delta x_j(t)\}$  die voldoet aan  $f_k(\{x_j + \delta x_j\}) = 0$ .

Ten gevolge van deze symmetrie is de collectieve grootte  $\sum_j p_{x_j} \delta x_j$  behouden.

Bewijs: onder de infinitesimale synchrone coördinatentransformatie geldt enerzijds dat

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} dt L = \int_{t_0}^{t_1} dt \delta L \stackrel{(iii)}{=} 0 \quad \forall \quad t_0, t_1 .$$

Anderzijds weten we op grond van vergelijkingen (38) en (39) dat een oplossing van de Lagrange-vergelijking aanleiding geeft tot de volgende synchrone variatie van S:

$$\delta S = \left[ \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \right]_{t=t_0}^{t=t_1} ,$$

waarbij is gebruikt dat de aangegeven coördinatentransformatie de eindpunten van de paden niet vasthoudt. Door beide identiteiten te combineren volgt de gezochte behoudswet:

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \delta x_j \stackrel{(18)}{=} \sum_j p_{x_j} \delta x_j = \text{constant in de tijd} .$$

Voorbeeld: translatiesymmetrie en behoud van impuls.

Beschouw een 3-dimensionaal  $N$ -deeltjessysteem met Cartesische coördinaten  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ . Deze coördinaten voldoen aan randvoorwaarden van het type  $f_k(\{\vec{r}_j\}) = 0$ . Afgezien van de bijbehorende reactiekrachten heeft het systeem uitsluitend conservatieve krachten die in de Lagrangiaan zijn opgenomen. Neem verder aan dat zowel de potentiaal  $V(\{\vec{r}_j\})$  als de randvoorwaarden  $f_k(\{\vec{r}_j\}) = 0$  invariant zijn onder een constante infinitesimale translatie van alle plaatsvectoren over  $\delta\vec{a}$ :

$$\forall_j \quad \vec{r}_j(t) \rightarrow \vec{r}_j(t) + \delta\vec{a} \equiv \vec{r}_j(t) + \delta\vec{r}_j(t) . \quad (40)$$

Omdat de translatie constant is in de tijd geldt  $\delta\dot{\vec{r}}_j(t) = \frac{d}{dt}\delta\vec{r}_j(t) = 0$ , zodat de snelheden van de deeltjes niet veranderen. Naast de potentiaal is dan ook de kinetische energie  $T = \frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j^2(t)$  invariant onder de translatie, oftewel  $\delta T = 0$ . We hebben hier dus inderdaad te maken met een Lagrangiaan die invariant is onder een infinitesimale synchrone coördinatentransformatie die consistent is met de randvoorwaarden. Derhalve geldt op grond van het voorgaande dat

$$\sum_j \vec{p}_j \cdot \delta\vec{a} = \left( \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j \right) \cdot \delta\vec{a} \equiv \vec{P} \cdot \delta\vec{a} = \text{constant in de tijd} . \quad (41)$$

De component van de totale impuls  $\vec{P}$  in de richting van de translatie  $\delta\vec{a}$  is behouden.

Opmerking: de eis dat de coördinatentransformatie consistent moet zijn met de randvoorwaarden is weldegelijk cruciaal. Voor de slingeropstelling op pagina 6 geldt dat  $V = -mgy$  invariant is onder constante translaties in de  $x$ -richting. Echter, het puntdeeltje kan niet zomaar getransleerd worden in de  $x$ -richting met behoud van de randvoorwaarde, aangezien het ophangpunt geen puntdeeltje van het systeem is en dus niet wordt meegetransleerd. De impuls in de  $x$ -richting is dan ook niet behouden tijdens de slingerbeweging, in tegenstelling tot een puntdeeltje dat niet aan het ophangpunt vastzit. In dit opzicht zijn de randvoorwaarden van een star lichaam fundamenteel anders. Deze randvoorwaarden ontstaan door de onderlinge interacties tussen de puntdeeltjes, zodat er geen essentiële onderdelen uit het systeem worden weggelaten als we alleen de puntdeeltjes beschouwen.

In opgave 9 van het werkcollege zal verder op overeenkomstige wijze een verband worden gelegd tussen rotatiesymmetrie enerzijds en het behoud van impulsmoment in de richting van de rotatie-as anderzijds.

## 2 Bewegingen van starre lichamen

Een star lichaam is gedefinieerd door de eis dat alle onderlinge afstanden tussen de deeltjes binnen het systeem vastliggen, oftewel  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = d_{ij} = \text{constant}$  voor elk paar puntdeeltjes in het lichaam. Dit houdt in dat bijna alle coördinaten van een star lichaam door randvoorwaarden zijn vastgelegd. Uiteindelijk blijven slechts zes vrijheidsgraden over, immers de positie van elk deeltje wordt vastgelegd door de positie van één enkel punt en door de oriëntatie van het lichaam ten opzichte van dit punt. Voor het referentiepunt van een star lichaam zullen we het massamiddelpunt (CM) gaan gebruiken, zodat uiteindelijk maar twee typen bewegingen overblijven voor een star lichaam:

- translaties van het massamiddelpunt;
- rotaties van het lichaam ten opzichte van het massamiddelpunt.

Voor het construeren van de Lagrangiaan van een star lichaam moeten we in principe de kinetische en potentiële energie van alle puntdeeltjes bepalen met inachtneming van alle randvoorwaarden. Dit zal feitelijk neerkomen op het bepalen van de collectieve energieën die horen bij de twee mogelijke bewegingen van het starre lichaam. Hierbij zal ook het coördinatenstelsel, d.w.z. de gegeneraliseerde coördinaten, slim moeten worden gekozen. Om dit netjes op te zetten doen we eerst even een stap terug naar de Newtonse mechanica voor (continue) veeldeeltjessystemen.

### 2.1 Het massamiddelpunt en relatieve coördinaten

We beginnen de discussie van veeldeeltjessystemen met het volgende fundamentele concept: voor elk veeldeeltjessysteem is er een collectief punt te definiëren dat effectief beweegt als een puntdeeltje onder de totale externe kracht. Dit punt wordt massamiddelpunt dan wel zwaartepunt genoemd. Bekijk hiertoe de krachten die werken op deeltje  $i$ :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \vec{F}_i^{\text{int}} \quad , \quad \vec{F}_i^{\text{int}} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_i^{(j)} . \quad (42)$$

Hier is  $\vec{F}_i^{\text{ext}}$  de externe kracht die van buiten het systeem op deeltje  $i$  inwerkt en  $\vec{F}_i^{\text{int}}$  de interne kracht veroorzaakt door de andere deeltjes binnen het systeem. Hieruit kan de volgende collectieve bewegingsvergelijking worden afgeleid:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_i \vec{F}_i^{\text{int}} \equiv \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{0} , \quad (43)$$

waarbij  $\vec{F}^{\text{ext}}$  de totale externe kracht op het systeem wordt genoemd. In de laatste stap is gebruikt dat de totale interne kracht verdwijnt ten gevolge van de 3<sup>e</sup> wet van Newton (actie = – reactie):

$$\sum_i \vec{F}_i^{\text{int}} \stackrel{(42)}{=} \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_i^{(j)} = \sum_{\text{paren}} (\vec{F}_i^{(j)} + \vec{F}_j^{(i)}) \stackrel{3^{\text{e}} \text{ wet}}{=} \vec{0} . \quad (44)$$

Definieer nu

$$\vec{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \quad , \quad M \equiv \sum_i m_i \quad \xrightarrow{(43)} \quad \vec{F}^{\text{ext}} = M \ddot{\vec{R}} \quad , \quad (45)$$

waarbij de vector  $\vec{R}$  te interpreteren is als de plaatsvector van het massamiddelpunt en de totale massa  $M$  van het systeem als de massa van het massamiddelpunt. We zien dat het zo gedefinieerde massamiddelpunt zich inderdaad effectief gedraagt als een puntdeeltje dat het collectieve gedrag van het systeem representeert. Om een scheiding te maken tussen collectieve en relatieve bewegingen is het verstandig om de coördinaten  $\vec{r}_i$  van de puntdeeltjes van het systeem weer te geven ten opzichte van het massamiddelpunt. Dit wordt gedaan door invoering van de relatieve coördinaten  $\vec{r}'_i$  volgens

$$\vec{r}_i \equiv \vec{R} + \vec{r}'_i \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'_i \equiv \vec{V} + \vec{v}'_i \quad . \quad (46)$$

Een directe consequentie van deze schrijfwijze is dat de relatieve impulsen van de deeltjes optellen tot nul:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \vec{r}'_i &\stackrel{(46)}{=} \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \stackrel{(45)}{=} M \vec{R} - M \vec{R} = \vec{0} \\ \Rightarrow \sum_i \vec{p}'_i &\equiv \sum_i m_i \vec{v}'_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}'_i = \vec{0} \quad , \end{aligned} \quad (47)$$

zodat de totale impuls van het systeem volgt uit de beweging van het massamiddelpunt:

$$\begin{aligned} \vec{P} &\equiv \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i \stackrel{(45)}{=} M \dot{\vec{R}} \stackrel{(46)}{=} M \vec{V} \\ &\stackrel{(45)}{\xrightarrow{}} \quad \dot{\vec{P}} = \vec{F}^{\text{ext}} \quad . \end{aligned} \quad (48)$$

Het massamiddelpunt is dus ook op te vatten als het impulsmiddelpunt. Vervolgens kan de totale kinetische energie worden opgesplitst in twee termen:

$$\begin{aligned} T &\equiv \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 \stackrel{(46)}{=} \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{V}^2 + 2\vec{V} \cdot \vec{v}'_i + \vec{v}'_i{}^2) \stackrel{(47)}{=} \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{V}^2 + \vec{v}'_i{}^2) \\ &\stackrel{(45)}{\xrightarrow{}} \quad T = \frac{1}{2} M \vec{V}^2 + T' \quad , \quad \text{met} \quad T' = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}'_i{}^2 \quad . \end{aligned} \quad (49)$$

De eerste term van  $T$  is de kinetische energie van het massamiddelpunt, terwijl de tweede term de kinetische energie van de deeltjes aangeeft ten opzichte van het massamiddelpunt. Voor een star lichaam zal deze tweede term de rotatiebewegingen ten opzichte van het massamiddelpunt bevatten. Op analoge wijze geldt voor het totale impulsmoment ten

opzichte van de oorsprong  $O$  van het gebruikte coördinatenstelsel:

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &\equiv \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \stackrel{(46)}{=} \sum_i m_i (\vec{R} + \vec{r}'_i) \times (\vec{V} + \vec{v}'_i) \\ \stackrel{(45),(47)}{\implies} \vec{L}_O &= M \vec{R} \times \vec{V} + \vec{L}_{\text{CM}}, \quad \text{met} \quad \vec{L}_{\text{CM}} = \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i.\end{aligned}\quad (50)$$

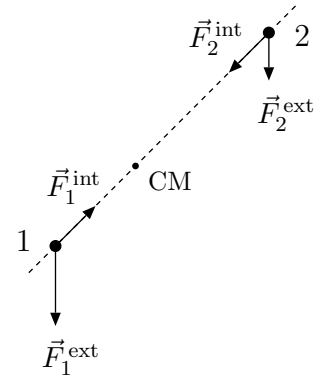
De eerste term van  $\vec{L}_O$  is het impulsmoment van het massamiddelpunt ten opzichte van de oorsprong  $O$ , terwijl de tweede term het impulsmoment van de deeltjes aangeeft ten opzichte van het massamiddelpunt.

Het 2-deeltjessysteem: het veruit eenvoudigste voorbeeld van een veeldeeltjessysteem is een 2-deeltjes-systeem. In dat geval zijn er twee 3-dimensionale coördinaten  $\vec{r}_1$  en  $\vec{r}_2$ . Deze coördinaten zijn uit te drukken in termen van de 3-dimensionale coördinaat van het massamiddelpunt

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (51)$$

en een 3-dimensionale relatieve coördinaat  $\vec{r}$  die is gedefinieerd volgens

$$\begin{aligned}\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}} &\equiv \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 \stackrel{(42)}{=} \frac{\vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_1^{\text{int}}}{m_1} - \frac{\vec{F}_2^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{int}}}{m_2} \\ &\stackrel{(44)}{=} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F}_1^{\text{int}} + \frac{\vec{F}_1^{\text{ext}}}{m_1} - \frac{\vec{F}_2^{\text{ext}}}{m_2}.\end{aligned}$$



De bewegingsvergelijking voor de relatieve coördinaat heeft dus de vorm

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_1^{\text{int}} + \mu \left( \frac{\vec{F}_1^{\text{ext}}}{m_1} - \frac{\vec{F}_2^{\text{ext}}}{m_2} \right), \quad \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \underline{\text{gereduceerde massa}}. \quad (52)$$

Voor puntdeeltjes hangt de interne kracht in het algemeen uitsluitend van de relatieve coördinaat  $\vec{r}$  af. De externe krachten komen van buiten het systeem en kunnen als zodanig ook afhankelijk zijn van de locatie van het massamiddelpunt van het systeem. In twee speciale gevallen ontkoppelt de beweging van de relatieve coördinaat volledig van de beweging van het massamiddelpunt:

- als er geen externe krachten op het systeem werken, zodat  $\vec{F}_1^{\text{ext}} = \vec{F}_2^{\text{ext}} = \vec{0}$ ;
- als de externe krachten het gevolg zijn van de gravitatiewerking van een massief object op grote afstand, zodat  $\vec{F}_1^{\text{ext}}/m_1 \approx \vec{F}_2^{\text{ext}}/m_2$ .

In zulke gevallen heeft de bewegingsvergelijking voor de relatieve coördinaat de vorm van een bewegingsvergelijking van een puntdeeltje met massa  $\mu$  onder invloed van een krachtcentrum in de oorsprong  $\vec{r} = \vec{0}$  van het relatieve coördinatenstelsel:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_1^{\text{int}}(\vec{r}) .$$

Voor een algemeen 2-deeltjessysteem zijn de relatieve coördinaten ten opzichte van het massamiddelpunt als volgt te schrijven in termen van  $\vec{r}$ :

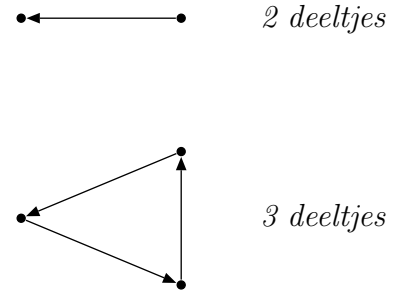
$$\begin{aligned} \vec{r}'_1 &= \vec{r}_1 - \vec{R} = \vec{r}_1 \left(1 - \frac{m_1}{M}\right) - \frac{m_2}{M} \vec{r}_2 = \frac{m_2}{M} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ \Rightarrow \vec{r}'_1 &= \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad \text{en evenzo} \quad \vec{r}'_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{r} . \end{aligned} \quad (53)$$

De relatieve kinetische energie  $T'$  en relatief impulsmoment  $\vec{L}_{\text{CM}}$  worden dan simpelweg gegeven door

$$T' = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}'_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}'_2{}^2 \stackrel{(53)}{=} \frac{1}{2} \dot{r}^2 \left( \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{M^2} \right) \stackrel{(52)}{=} \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 , \quad (54)$$

$$\vec{L}_{\text{CM}} = m_1 \vec{r}'_1 \times \dot{\vec{r}}'_1 + m_2 \vec{r}'_2 \times \dot{\vec{r}}'_2 \stackrel{\text{evenzo}}{=} \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} . \quad (55)$$

Willekeurige veeldeeltjessystemen: voor een veeldeeltjessysteem met een willekeurig aantal deeltjes beweegt het massamiddelpunt als een puntdeeltje, maar de bewegingen van de relatieve coördinaten ontkoppelen in het algemeen niet. De relatieve coördinaten beïnvloeden elkaar namelijk (zie plaatje). Zulke systemen moeten dan ook meestal met benaderende dan wel numerieke methoden worden opgelost.



Continue systemen: met het oog op de behandeling van starre lichamen voeren we tenslotte een limietprocedure in. Als in een veeldeeltjessysteem de afstand tussen naburige puntdeeltjes veel kleiner is dan de uitgebreidheid (afmeting) van het systeem zelf, dan is het zinvol om over te gaan op een continuümlimiet. In deze limiet is er sprake van een continue massaverdeling (massadichtheid)  $\rho(\vec{r})$ , waarbij zich in een volume-element  $dV$  rond het punt  $\vec{r}$  een hoeveelheid massa  $\rho(\vec{r})dV$  bevindt. Alle sommaties gaan daarbij over in volume-integralen. Bijvoorbeeld geldt in de continuümlimiet

$$M = \int dV \rho(\vec{r}) \quad \text{en} \quad \vec{R} = \frac{1}{M} \int dV \vec{r} \rho(\vec{r}) . \quad (56)$$

In dit collegedictaat zullen we uitsluitend situaties bekijken met een homogene massaverdeling, hetgeen inhoudt dat de massadichtheid  $\rho(\vec{r})$  constant is binnen het lichaam.

## 2.2 Bewegingsvergelijkingen voor rotaties

Voor de beschrijving van rotaties van veeldeeltjessystemen voeren we het totale impulsmoment van het systeem in ten opzichte van een referentiepunt  $P$ :

$$\vec{L}_P = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times m_i (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_P) . \quad (57)$$

Hieruit volgt de volgende uitdrukking voor het totale krachtmoment ten opzichte van dit referentiepunt:

$$\dot{\vec{L}}_P = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times m_i (\ddot{\vec{r}}_i - \ddot{\vec{r}}_P) \stackrel{(42),(45)}{=} \vec{N}_P^{\text{ext}} + \vec{N}_P^{\text{int}} + M(\vec{r}_P - \vec{R}) \times \ddot{\vec{r}}_P , \quad (58)$$

met

$$\vec{N}_P^{\text{ext}} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = \underline{\text{totaal extern krachtmoment}} , \quad (59)$$

$$\vec{N}_P^{\text{int}} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times \vec{F}_i^{\text{int}} = \underline{\text{totaal intern krachtmoment}} . \quad (60)$$

Voor een star lichaam geldt nu dat  $\vec{N}_P^{\text{int}} = \vec{0}$ , anders zou een vrij bewegend star lichaam met  $\vec{N}_P^{\text{ext}} = \vec{0}$  spontaan beginnen te roteren. Dit laatste is alleen mogelijk voor niet-starre lichamen waarvoor de onderlinge afstand tussen de deeltjes niet constant hoeft te blijven, waardoor het mogelijk is opgeslagen potentiële energie om te zetten in rotatie-energie.

Starre lichamen: omdat we bezig zijn de discussie van starre lichamen voor te bereiden wordt vanaf nu aangenomen dat

$$\vec{N}_P^{\text{int}} = \vec{0} \stackrel{(58)}{\implies} \dot{\vec{L}}_P = \vec{N}_P^{\text{ext}} + M(\vec{r}_P - \vec{R}) \times \ddot{\vec{r}}_P . \quad (61)$$

Er kunnen nu twee realistische speciale gevallen worden geïdentificeerd waarvoor de tweede term volledig verdwijnt, zodat  $d\vec{L}_P/dt = \dot{\vec{L}}_P = \vec{N}_P^{\text{ext}}$ :

- als het referentiepunt eenparig beweegt ten opzichte van de oorsprong  $O$  van het vaste coördinatenstelsel, zodat  $\ddot{\vec{r}}_P = \vec{0}$ ;
- als het referentiepunt samenvalt met het massamiddelpunt van het systeem, zodat  $\vec{r}_P - \vec{R} = \vec{0}$ : in dat geval noteren we de bijbehorende impuls- en krachtmomenten als  $\vec{L}_{\text{CM}}$  respectievelijk  $\vec{N}_{\text{CM}}^{\text{ext}}$ .

Relevante bewegingen van een star lichaam: zoals al opgemerkt vallen de mogelijke bewegingen van een star lichaam uiteen in twee categorieën:

- translaties van het massamiddelpunt, behorende bij de drie bewegingsvergelijkingen

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{\text{ext}} \equiv \vec{F} ; \quad (62)$$

- rotaties ten opzichte van het massamiddelpunt, behorende bij de drie bewegingsvergelijkingen

$$\dot{\vec{L}}_{\text{CM}} = \vec{N}_{\text{CM}}^{\text{ext}} \equiv \vec{N}_{\text{CM}} . \quad (63)$$

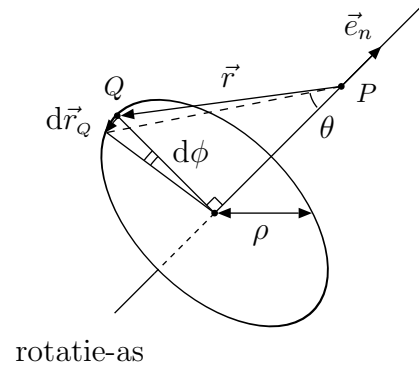
Let wel: de beweging van het massamiddelpunt kan zelf ook weer een pure rotatiebeweging zijn. Denk hierbij aan de bewegingen van een tol met een vast draaipunt (zie §2.12).

Opmerking: een star lichaam roteert en bloc, zodat  $\vec{L}_{\text{CM}} = \vec{0}$  de situatie beschrijft dat de oriëntatie van het lichaam niet verandert ten opzichte van het massamiddelpunt. Voor een niet-star lichaam kan  $\vec{L}_{\text{CM}} = \vec{0}$  weldegelijk een oriëntatie-veranderende situatie beschrijven als het lichaam bijvoorbeeld uit tegen elkaar indraaiende onderdelen bestaat.

### 2.3 Rotaties en hoeksnelheden

In de volgende stap gaan we het begrip rotatie wat nader bekijken, waarbij de nadruk zal liggen op de rotaties van starre lichamen.

Rotatie om een rotatie-as: een punt  $Q$  voert een rotatie uit om een gegeven rotatie-as als bij de beweging de afstand van  $Q$  tot elk willekeurig punt op de rotatie-as constant blijft (zie plaatje). Als de rotatie wordt uitgevoerd over een infinitesimale hoek  $d\phi$ , dan houdt dit in dat de plaatsvector  $\vec{r}_Q$  verandert met  $d\vec{r}_Q$  zodanig dat zowel  $d\vec{r}_Q \perp \vec{e}_n$  als  $d\vec{r}_Q \perp (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \equiv \vec{r}$ , waarbij  $P$  een willekeurig punt op de rotatie-as is en  $\vec{e}_n$  de eenheidsvector in de richting van de rotatie-as.



Zoals uit het plaatje is af te lezen is de infinitesimale verandering  $d\vec{r}_Q$  te schrijven als

$$d\vec{r}_Q = (\vec{e}_n \times \vec{r}) d\phi , \quad \text{met} \quad |\vec{e}_n \times \vec{r}| = r \sin \theta = \rho = \underline{\text{rotatiestraal}} .$$

Hieruit volgt rechtstreeks dat de snelheid van  $Q$  ten opzichte van  $P$  wordt gegeven door

$$\vec{v}_{\text{rot}} = \frac{d\vec{r}_Q}{dt} = (\vec{e}_n \times \vec{r}) \frac{d\phi}{dt} = (\vec{e}_n \times \vec{r}) \dot{\phi} . \quad (64)$$

Op basis hiervan voeren we de zogenaamde hoeksnelheid  $\vec{\omega}$  in volgens

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_n \equiv \dot{\phi}(t) \vec{e}_n(t) , \quad (65)$$

zodat de snelheid van  $Q$  ten opzichte van  $P$  is uit te drukken in de compacte vorm

$$\vec{v}_{\text{rot}} = \vec{\omega} \times \vec{r} . \quad (66)$$



Let wel: door een expliciete tijdsafhankelijkheid aan  $\vec{e}_n(t)$  toe te kennen is in rekening gebracht dat de oriëntatie van de rotatie-as in de tijd zou kunnen veranderen ten opzichte van een vast coördinatenstelsel. Later zullen we deze tijdsafhankelijkheid gaan elimineren door het coördinatenstelsel geschikt te kiezen.

Als het punt  $P$  op de rotatie-as met translatiesnelheid  $\vec{v}_P$  beweegt ten opzichte van een vast coördinatenstelsel, dan is de snelheid van het punt  $Q$  ten opzichte van dit vaste coördinatenstelsel gegeven door

$$\vec{v} = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (67)$$

Rotaties van een star lichaam: alle puntdeeltjesparen van een star lichaam moeten voldoen aan de randvoorwaarde  $d(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2/dt = 2(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j) = 0$ . Een snelheidsveld van het type (67) voldoet hieraan, vooropgesteld dat geldt dat  $\vec{v}_{P,i} = \vec{v}_{P,j} \equiv \vec{v}_P$  én  $\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_j \equiv \vec{\omega}$ . Alle puntdeeltjes roteren zo rond dezelfde as met dezelfde hoeksnelheid.

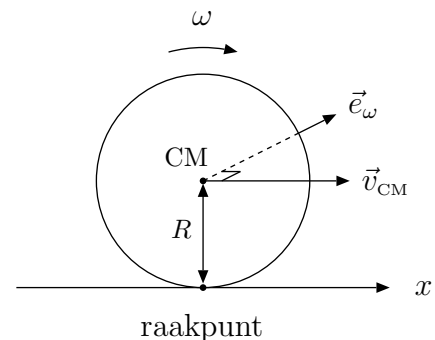
Bewijs: vul in en gebruik dat  $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)] = 0$ .

Bij rotaties rond assen door het punt  $P$  worden de snelheden van alle deeltjes in een star lichaam volledig vastgelegd door zes onafhankelijke getallen:  $\vec{v}_P$  en  $\vec{\omega}$ .

Deze observatie bevestigt dus datgene wat we op basis van intuïtie al voorspeld hadden.

Opmerking: er is een fundamenteel verschil tussen rotaties en translaties. Opeenvolgende rotaties rond verschillende assen laten zich niet combineren door simpelweg de hoeksnelheden op te tellen, aangezien de volgorde van de rotaties van belang is. In het fysicajargon zeggen we dat rotaties om verschillende assen niet commuteren. Opeenvolgende translaties commuteren wel, zodat de snelheden in de niet-relativistische mechanica wel opgeteld kunnen worden.

Voorbeeld: beschouw een schijf met straal  $R$  die zonder te slippen over een vast horizontaal vlak rolt in de  $x$ -richting (zie plaatje). Neem aan dat de massa van de schijf homogeen verdeeld is. De eis dat de schijf moet rollen zonder te slippen houdt in dat de schijf geen wrijving ondervindt ten gevolge van de ondergrond: het raakpunt tussen schijf en ondergrond is in rust ten opzichte van de ondergrond. De beweging van de schijf is opgebouwd uit de translatiebeweging van het midden (massamiddelpunt) van de schijf in de  $x$ -richting en de rotatiebeweging rond de as  $\vec{e}_\omega$  waarvan het massamiddelpunt deel uitmaakt. De snelheid van het op de rotatie-as gelegen massamiddelpunt wordt gegeven door  $\vec{v}_{CM} = v_{CM} \vec{e}_x$ . De snelheid van een willekeurig punt op de schijf ten opzichte van



het massamiddelpunt wordt gegeven door de rotatiesnelheid

$$\vec{v}_{\text{rot}} = \vec{\omega} \times \vec{r}' \equiv \omega \vec{e}_\omega \times \vec{r}' ,$$

waarbij  $\vec{r}'$  de coördinaat van het desbetreffende punt is ten opzichte van het massamiddelpunt. De overeenkomstige snelheid ten opzichte van de vaste ondergrond wordt dan

$$\vec{v} = v_{\text{CM}} \vec{e}_x + \vec{v}_{\text{rot}} .$$

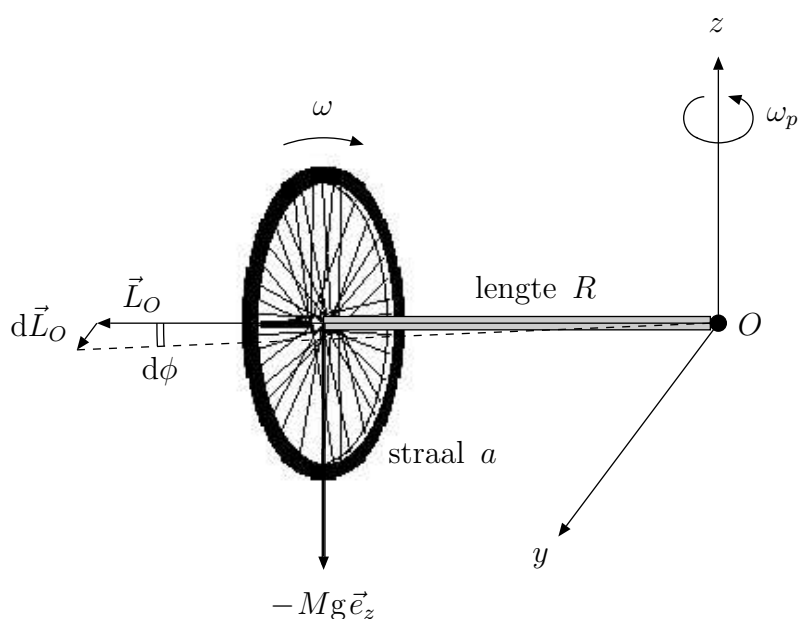
Het raakpunt tussen schijf en ondergrond moet nu stilstaan, zodat

$$\vec{0} = (v_{\text{CM}} - R\omega) \vec{e}_x \quad \Rightarrow \quad v_{\text{CM}} = R\omega .$$

Dit is nu te gebruiken als de fundamentele randvoorwaarde voor het rollen zonder te slippen in één dimensie.

## 2.4 Het gyroscopisch effect

Een mooie toepassing van rotatiebewegingen en externe krachtmomenten is het zogenaamde gyroscopisch effect (zie plaatje). Beschouw hiertoe een wiel met straal  $a$  en met homogeen verdeelde massa die uitsluitend in de rand zit. Het wiel draait aanvankelijk met hoeksnelheid  $\omega \vec{e}_x$  rond een massaloze stang die langs de  $x$ -as ligt. De stang zit vast aan het montagepunt  $O$  dat als oorsprong fungeert van een vast coördinatenstelsel. Op die manier heeft het wiel te allen tijde een constante afstand tot het referentiepunt  $O$ , zodat het alleen rotatiebewegingen kan uitvoeren rond assen door het punt  $O$ .



Ten opzichte van het punt  $O$  geldt

$$\vec{L}_O \stackrel{(50)}{=} M \vec{R} \times \vec{V} + \vec{L}_{\text{CM}} \stackrel{\vec{V}=\vec{0}}{=} \vec{L}_{\text{CM}} = L_O \vec{e}_x ,$$

waarbij gebruikt is dat het massamiddelpunt (met coördinaat  $\vec{R}$ ) zich aanvankelijk in rust bevindt op de  $x$ -as, zodat  $\vec{V} = \vec{0}$ . Verder geldt

$$\begin{aligned}\vec{L}_{\text{CM}} &\stackrel{(50)}{=} \sum_i m_i \vec{r}_i' \times \vec{v}_i' \stackrel{(66)}{=} \sum_i m_i \vec{r}_i' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i') \stackrel{\vec{\omega} = \omega \vec{e}_x}{=} \omega \sum_i m_i \vec{r}_i' \times (\vec{e}_x \times \vec{r}_i') \\ &\stackrel{\vec{r}_i' \perp \vec{e}_x}{=} \omega \sum_i m_i \vec{r}_i'^2 \vec{e}_x \stackrel{|\vec{r}_i'| = a, (45)}{=} M\omega a^2 \vec{e}_x \Rightarrow L_O = L_{\text{CM}} = M\omega a^2.\end{aligned}$$

Ten gevolge van de zwaartekracht in de negatieve  $z$ -richting ondervindt het wiel het volgende krachtmoment ten opzichte van  $O$ :

$$\vec{N}_O = \vec{N}_{\text{CM}} + \vec{R} \times \vec{F} = \vec{0} - MgR(\vec{e}_x \times \vec{e}_z) = MgR\vec{e}_y \equiv N_O\vec{e}_y,$$

gebruik makende van

$$\vec{N}_O - \vec{N}_{\text{CM}} \stackrel{(59)}{=} \sum_i [(\vec{r}_i - \vec{0}) - (\vec{r}_i - \vec{R})] \times \vec{F}_i^{\text{ext}} = \sum_i \vec{R} \times \vec{F}_i^{\text{ext}} \stackrel{(43), (62)}{=} \vec{R} \times \vec{F},$$

alsmede

$$\vec{N}_{\text{CM}} \stackrel{(46), (59)}{=} \sum_i \vec{r}_i' \times (-m_i g \vec{e}_z) \stackrel{(47)}{=} \vec{0} \quad \text{en} \quad \vec{F} = -\sum_i m_i g \vec{e}_z \stackrel{(45)}{=} -Mg\vec{e}_z.$$

De relevante bewegingsvergelijking voor de rotatiebewegingen wordt dan

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{N}_O \perp \vec{L}_O, \vec{e}_z$$

voor een vast referentiepunt  $O$ . Van boven het  $xy$ -vlak gezien begint  $\vec{L}_O$  tegen de wijzers van de klok rond de  $z$ -as te roteren. Dit fenomeen wordt precessie genoemd. In een infinitesimale tijdsperiode  $dt$  verandert het impulsmoment  $\vec{L}_O$  met een bijdrage

$$d\vec{L}_O = \vec{N}_O dt \Rightarrow |d\vec{L}_O| = MgR dt \equiv |\vec{L}_O| d\phi = M\omega a^2 d\phi.$$

Op basis hiervan vinden we

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{N_O}{L_O} = \frac{gR}{\omega a^2} \equiv \omega_p. \quad (68)$$

Dit is de constante hoeksnelheid van de precessie van het wiel rond de  $z$ -as in de benadering dat  $\vec{N}_O$  gedurende de beweging loodrecht op  $\vec{L}_O$  blijft staan en in het  $xy$ -vlak blijft liggen.

Let wel: in feite moet ook het impulsmoment van de precessiebeweging in de beschouwing worden betrokken. Ten gevolge hiervan zal er ook een oscillatie (nutatie) ten opzichte van het  $xy$ -vlak gaan optreden. Alle bewegingen bij elkaar zullen later met behulp van de Lagrangiaanmethode worden aangepakt.

## 2.5 Traagheidsmomenten en deviatie momenten

Voor de kinematische beschrijving van veeldeeltjessystemen die pure rotatiebewegingen uitvoeren is het handig om een paar nieuwe begrippen te introduceren. Beschouw hiertoe een veeldeeltjessysteem dat roteert rond assen die door het vaste (draai)punt  $O$  gaan. Het totale impulsmoment van dit veeldeeltjessysteem ten opzichte van het punt  $O$  op de rotatie-as wordt voor een rotatie met hoeksnelheid  $\vec{\omega}$  gegeven door

$$\vec{L}_O = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \stackrel{(66)}{=} \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{\omega} \sum_i m_i r_i^2 - \sum_i m_i \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}), \quad (69)$$

waarbij is gebruikt dat

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}) = (\vec{a} \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{a}. \quad (70)$$

De Cartesische inertiaalcoördinaten  $r_i$  van de puntdeeltjes zijn hier gegeven ten opzichte van het punt  $O$  dat dus als oorsprong fungeert van een vast coördinatenstelsel. De eerste observatie die we kunnen doen op basis van vergelijking (69) is dat  $\vec{L}_O$  in het algemeen niet langs  $\vec{\omega}$  hoeft te liggen, in tegenstelling tot het voorbeeld dat in §2.4 is behandeld. In componenten uitgeschreven hebben we dus gevonden dat

$$\begin{aligned} L_{O,x} &= +\omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i, \\ L_{O,y} &= -\omega_x \sum_i m_i y_i x_i + \omega_y \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) - \omega_z \sum_i m_i y_i z_i, \\ L_{O,z} &= -\omega_x \sum_i m_i z_i x_i - \omega_y \sum_i m_i z_i y_i + \omega_z \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2). \end{aligned} \quad (71)$$

Voer vervolgens de volgende definities in:

$$\begin{aligned} I_{xx} &\equiv \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_{yy} \equiv \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad I_{zz} \equiv \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2), \\ I_{xy} &\equiv -\sum_i m_i x_i y_i = I_{yx}, \quad I_{xz} \equiv -\sum_i m_i x_i z_i = I_{zx}, \\ I_{yz} &\equiv -\sum_i m_i y_i z_i = I_{zy}, \end{aligned} \quad (72)$$

waarbij  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  en  $I_{zz}$  de traagheidsmomenten van het systeem worden genoemd en  $I_{xy} = I_{yx}$ ,  $I_{xz} = I_{zx}$  en  $I_{yz} = I_{zy}$  de deviatie momenten. Samen vormen deze grootheden de zogenaamde symmetrische traagheidstensor

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}. \quad (73)$$

Vergelijking (69) kan dan worden herschreven in de vorm

$$L_{O,j} = \sum_k I_{jk} \omega_k \quad (j, k = \{x, y, z\}), \quad (74)$$

oftewel in matrixnotatie

$$\vec{L}_O = \begin{pmatrix} L_{O,x} \\ L_{O,y} \\ L_{O,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \equiv \vec{I} \cdot \vec{\omega}. \quad (75)$$

De kinetische energie behorende bij de pure rotatiebeweging wordt tenslotte gegeven door

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i^2 \stackrel{(66)}{=} \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left[ \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \right] \\ &\stackrel{(69)}{=} \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_O \stackrel{(74)}{=} \frac{1}{2} \sum_{j,k} \omega_j I_{jk} \omega_k = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega}, \end{aligned} \quad (76)$$

waarbij gebruik is gemaakt van de vectoridentiteit  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ . Let wel: deze kinetische energie hangt niet af van de oriëntatie van het vaste coördinatenstelsel, zodat we de vrijheid hebben om deze oriëntatie handig te kiezen.

Ten opzichte van het vaste punt  $O$  wordt de bewegingsvergelijking voor pure rotatiebewegingen nu dus gegeven door

$$\vec{N}_O \stackrel{(61)}{=} \dot{\vec{L}}_O \stackrel{(75)}{=} \frac{d}{dt} (\vec{I} \cdot \vec{\omega}). \quad (77)$$

## 2.6 Rotaties van een star lichaam rond een vaste as

Bovenstaande uitdrukkingen voor de bewegingsvergelijking en kinetische energie van een pure rotatiebeweging vertonen sterke overeenkomsten met de bewegingsvergelijking en kinetische energie van een translatiebeweging. Om deze overeenkomsten wat nader te belichten beschouwen we het speciale geval van een star lichaam dat aan een stang is gemonteerd. Door kogellagers te gebruiken wordt ervoor gezorgd dat het lichaam vrij rond de stang kan roteren. Denk bij deze constructie bijvoorbeeld aan een fietswiel. De stang wordt verder via een aantal bevestigingspunten gefixeerd in de experimentele opstelling, zodat er sprake is van een vaste rotatie-as. In deze speciale situatie speelt het niet-commutatieve karakter van rotaties geen rol, zodat translaties en rotaties sterke overeenkomsten vertonen.

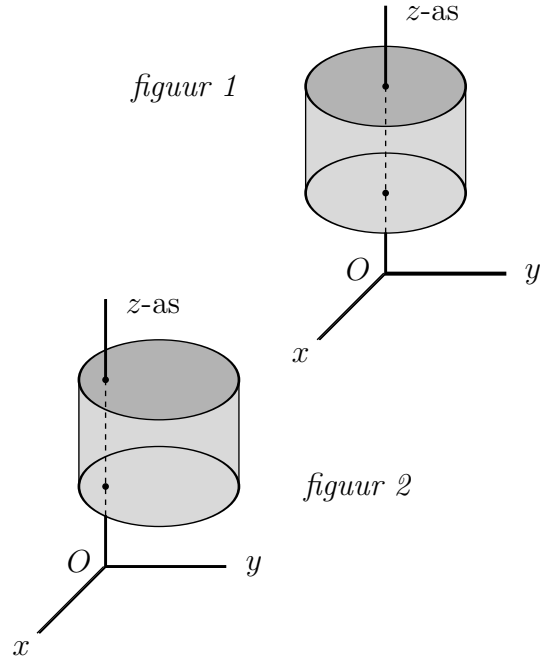
Gebruik nu een vast coördinatenstelsel met het punt  $O$  op de vaste rotatie-as als oorsprong en met de rotatie-as als  $z$ -as. De hoeksnelheid van de rotatiebeweging wordt dan gegeven door  $\vec{\omega} = \omega_z \vec{e}_z$  en het totale impulsmoment  $\vec{L} \equiv \vec{L}_O$  ten opzichte van  $O$  door

$$\vec{L} \stackrel{(75)}{=} \vec{I} \cdot (\omega_z \vec{e}_z) \Rightarrow L_x = I_{xz} \omega_z, \quad L_y = I_{yz} \omega_z, \quad L_z = I_{zz} \omega_z. \quad (78)$$

De voor de rotatiebeweging noodzakelijke krachtmomenten zijn dan

$$\vec{N} \equiv \vec{N}_O \xrightarrow{(77)} N_x = \frac{d}{dt}(I_{xz}\omega_z) , N_y = \frac{d}{dt}(I_{yz}\omega_z) , N_z = \frac{d}{dt}(I_{zz}\omega_z) . \quad (79)$$

Als het starre lichaam symmetrisch is rond de  $z$ -as (figuur 1), dan geldt  $I_{xz} = I_{yz} = 0 \xrightarrow{(79)} N_x = N_y = 0$ , zodat de bevestigingspunten van de rotatie-as geen krachtmoment hoeven te leveren. Als echter geldt dat  $I_{xz} \neq 0$  of  $I_{yz} \neq 0$  (figuur 2), dan is het roterende starre lichaam niet in balans en moeten de bevestigingspunten van de rotatie-as de krachtmomenten  $N_x$  en  $N_y$  leveren om te voorkomen dat de rotatie-as beweegt. Door middel van reactiekrachtmomenten implementeren de bevestigingspunten dan de randvoorwaarde dat de rotatie-as vast moet liggen.



Er blijft zo slechts één relevant traagheidsmoment over, namelijk  $I_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$ . Dit traagheidsmoment is tijdsonafhankelijk, aangezien de afstand  $\rho_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$  tot de rotatie-as constant blijft tijdens de rotatie. De relevante bewegingsvergelijking wordt dan

$$N_z = \dot{L}_z = I_{zz}\dot{\omega}_z , \quad (80)$$

hetgeen sterk lijkt op de bewegingsvergelijking  $F_z = m\dot{v}_z$  voor een 1-dimensionale translatiebeweging. Evenzo lijkt de kinetische energie van de pure rotatiebeweging

$$T_{\text{rot}} \xrightarrow{(76)} \frac{1}{2} I_{zz}\omega_z^2 \quad (81)$$

precies op de kinetische energie  $T = \frac{1}{2}mv_z^2$  van een 1-dimensionale translatiebeweging.

Dit verband kan worden samengevat in de volgende tabel:

1-dimensionale translaties	rotaties rond een vaste as
massa : $m$	traagheidsmoment: $I_{zz}$
plaatscoördinaat: $z$	hoekcoördinaat: $\phi$
snelheid: $v_z = \dot{z}$	hoeksnelheid: $\omega_z = \dot{\phi}$
impuls: $p_z = mv_z$	impulsmoment: $L_z = I_{zz}\omega_z$
kracht: $F_z = m\dot{v}_z$	krachtmoment: $N_z = I_{zz}\dot{\omega}_z$
kinetische energie: $T = \frac{1}{2}mv_z^2$	kinetische energie: $T = \frac{1}{2}I_{zz}\omega_z^2$

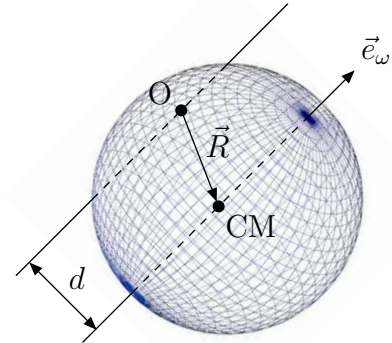
Rotaties van een star lichaam rond een vaste as vormen een 1-dimensionaal Newtons systeem met als enige vrijheidsgraad de hoek ten opzichte van de rotatie-as.

## 2.7 Rekenregels voor de bepaling van traagheidsmomenten

Alvorens de keuze van het coördinatenstelsel wat nader onder de loep te nemen bekijken we eerst een paar handige rekenregels voor het bepalen van traagheidsmomenten.

Stelling van Steiner: stel we willen het relevante traagheidsmoment  $I_O$  bepalen voor rotaties rond een vaste as door het punt  $O$  met richting  $\vec{e}_\omega$ . Er bestaat dan een verband met het traagheidsmoment  $I_{\text{CM}}$  voor rotaties rond een parallelle as die door het massamiddelpunt van het systeem gaat (zie plaatje):

$$I_O = I_{\text{CM}} + Md^2, \quad (82)$$



waarbij  $d$  de afstand tussen beide assen aangeeft.

Dit verband wordt de stelling van Steiner genoemd,

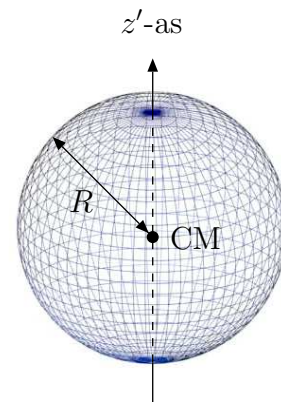
of ook wel parallelle-as regel. Het nut van deze rekenregel ligt in het feit dat  $I_{\text{CM}}$  meestal een stuk makkelijker te berekenen is dan  $I_O$ .

Bewijs: ten opzichte van het punt  $O$  geldt  $\vec{L}_O \stackrel{(50)}{=} M\vec{R} \times \vec{V} + \vec{L}_{\text{CM}}$ . Voor rotaties rond de vaste as door het punt  $O$  wordt de snelheid van het massamiddelpunt gegeven door  $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R}$ . In analogie met de uitdrukking  $L_z = I_{zz}\omega_z$  in §2.6 geldt dan

$$\begin{aligned} \vec{L}_O \cdot \vec{e}_\omega &\equiv \omega I_O = \vec{L}_{\text{CM}} \cdot \vec{e}_\omega + M\omega \vec{e}_\omega \cdot (\vec{R} \times (\vec{e}_\omega \times \vec{R})) \equiv \omega I_{\text{CM}} + M\omega (\vec{e}_\omega \times \vec{R})^2 \\ &= \omega (I_{\text{CM}} + Md^2), \end{aligned}$$

waarbij wederom de vectoridentiteit  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$  is gebruikt.

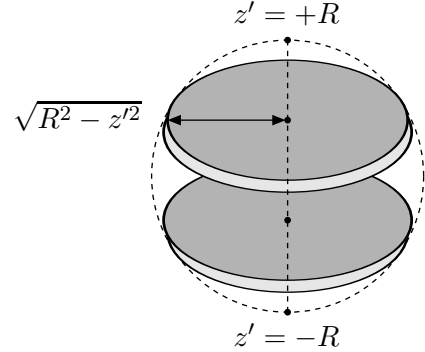
Voorbeeld: beschouw een bol met massa  $M$ , straal  $R$  en een homogene massaverdeling (zie plaatje). De massadichtheid wordt binnen de bol gegeven door  $\rho = 3M/(4\pi R^3)$ . Bekijk vervolgens een willekeurige rotatie-as door het massamiddelpunt (midden) van de bol en ga werken met relatieve coördinaten ten opzichte van het massamiddelpunt, waarbij de  $z'$ -as langs de rotatie-as wordt gelegd.



In de continuümlimiet geldt  $I_{\text{CM}} = \rho \int dV' (x'^2 + y'^2)$ . Ga vervolgens over op cilindercoördinaten

$$x' = r' \sin \varphi' \quad , \quad y' = r' \cos \varphi' \quad \text{en} \quad z' = z' \quad \Rightarrow \quad dV' = r' d\varphi' dr' dz' \quad , \quad (83)$$

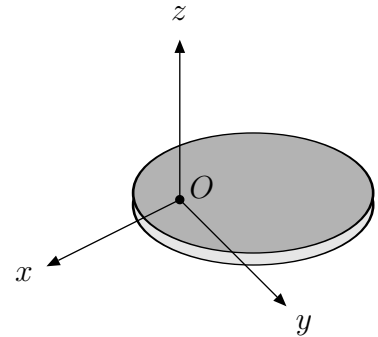
hetgeen inhoudt dat in het  $x'y'$ -vlak poolcoördinaten zijn gebruikt en dat  $r'$  de afstand is tot de  $z'$ -as. Intuïtief zou je denken dat bolcoördinaten het meest geschikt zijn om een bol te beschrijven. Echter, de  $z'$ -as is de rotatie-as. Voor de bepaling van het traagheidsmoment van de bol is het derhalve beter de bol te ontbinden in bijdragen van infinitesimale schijven loodrecht op de  $z'$ -as (zie plaatje), zodat



$$\begin{aligned} I_{\text{CM}} &= \rho \int_{-R}^R dz' \int_0^{\sqrt{R^2 - z'^2}} dr' r'^3 \int_0^{2\pi} d\varphi' = \rho \int_{-R}^R dz' \frac{1}{4} (R^2 - z'^2)^2 2\pi \\ &= 2\pi\rho \left[ \frac{R^4}{4} (2R) - \frac{R^2}{2} (2R^3/3) + \frac{1}{4} (2R^5/5) \right] = \frac{8\pi}{15} \rho R^5 = \frac{2}{5} MR^2 \quad . \quad (84) \end{aligned}$$

Het traagheidsmoment van de bol voor rotaties rond willekeurige andere assen volgt dan op triviale wijze uit  $I_{\text{CM}}$  (zie opgave 12 van het werkcollege).

Loodrechte-as regel: beschouw een (plat) star lichaam met een massaverdeling die bij benadering in het  $xy$ -vlak ligt (zie plaatje). Bekijk vervolgens rotaties rond assen die door het in het  $xy$ -vlak gelegen punt  $O$  gaan. Als we de continue massaverdeling per oppervlakte-eenheid van het platte starre lichaam aangeven met  $\sigma(x, y)$ , dan worden de drie relevante traagheidsmomenten voor rotaties rond de  $x$ -,  $y$ - dan wel  $z$ -as gegeven door



$$I_{xx} = \int dA \sigma(x, y) y^2 \quad , \quad I_{yy} = \int dA \sigma(x, y) x^2 \quad , \quad I_{zz} = \int dA \sigma(x, y) (x^2 + y^2) \quad .$$

Met  $dA$  wordt hier een oppervlakte-element in het  $xy$ -vlak aangegeven, waarbinnen zich een hoeveelheid massa  $\sigma(x, y)dA$  bevindt. Hieruit volgt dan de loodrechte-as regel:

$$I_{xx} + I_{yy} = I_{zz} \quad . \quad (85)$$

Alle deviatiemomenten verdwijnen met uitzondering van  $I_{xy} = - \int dA \sigma(x, y) xy$ , hetgeen van belang is voor rotaties rond in het  $xy$ -vlak gelegen assen die niet met de  $x$ - of  $y$ -as samenvallen. Als de massaverdeling  $\sigma(x, y)$  symmetrisch is rond de  $z$ -as, d.w.z. het platte starre lichaam heeft azimutale symmetrie, dan geldt  $I_{xx} = I_{yy} \stackrel{(85)}{=} \frac{1}{2} I_{zz}$ . Tevens geldt in dat geval dat  $I_{xy} = 0$ . In opgave 10 van het werkcollege zullen nog een aantal andere eigenschappen van platte starre lichamen worden afgeleid.



## 2.8 Overgang naar een versneld coördinatenstelsel

Om willekeurige rotaties van een star lichaam efficiënt te kunnen beschrijven is het beter om geen vast assenstelsel te gebruiken, immers in het algemeen verandert de oriëntatie van het starre lichaam ten opzichte van zo'n vast assenstelsel tijdens het uitvoeren van de rotatiebeweging. Op die manier zal ook de traagheidstensor veranderen tijdens de rotatie. Het is meestal veel makkelijker om het assenstelsel met het lichaam te laten meedraaien, zodat  $\vec{I}$  tijdsafhankelijk is.

We bekijken derhalve de overgang van een inertiaalstelsel met eenheidsvectoren  $\vec{e}_{x_I}$ ,  $\vec{e}_{y_I}$  en  $\vec{e}_{z_I}$  naar een versneld assenstelsel met eenheidsvectoren  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  en  $\vec{e}_z$ . Eenheidsvectoren geven uitsluitend richtingen aan en behouden (in de niet-relativistische mechanica) hun lengte en orthogonaliteit. Dit houdt in dat  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  en  $\vec{e}_z$  hooguit een rotatie kunnen ondergaan ten opzichte van de inertiaaloriëntatie. Een assenstelsel is wat dat betreft op te vatten als een star object. Neem eerst aan dat het versnelde assenstelsel dezelfde oorsprong heeft als het inertiaalstelsel en bekijk vervolgens een vectorgrootheid

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z, \quad (86)$$

zoals een plaatsvector of snelheid. Vanuit de optiek van een inertiaalwaarnemer geldt dan

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left( \frac{dA_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{dA_y}{dt} \vec{e}_y + \frac{dA_z}{dt} \vec{e}_z \right) + \left( A_x \frac{d\vec{e}_x}{dt} + A_y \frac{d\vec{e}_y}{dt} + A_z \frac{d\vec{e}_z}{dt} \right). \quad (87)$$

De eerste set van drie termen geeft de verandering van  $\vec{A}$  aan zoals waargenomen in het versnelde coördinatenstelsel, hetgeen we zullen aangeven met de notatie  $\delta\vec{A}/\delta t$ . De tweede set van drie termen geeft de verandering van  $\vec{A}$  aan ten gevolge van de rotatie van het versnelde coördinatenstelsel ten opzichte van de inertiaaloriëntatie. Stel nu dat deze rotatie wordt gegeven door de hoeksnelheid  $\vec{\omega}$ . Dan geldt  $d\vec{e}_x/dt = \vec{\omega} \times \vec{e}_x$ ,  $d\vec{e}_y/dt = \vec{\omega} \times \vec{e}_y$  en  $d\vec{e}_z/dt = \vec{\omega} \times \vec{e}_z$ , zodat

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\delta\vec{A}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{A}. \quad (88)$$

Voorbeelden: • als  $\vec{A} = \vec{\omega}$ , dan simplificeert deze vergelijking tot

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\delta\vec{\omega}}{\delta t} = \dot{\vec{\omega}}; \quad (89)$$

- als  $\vec{A} = \vec{r}$ , dan geldt

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{r}; \quad (90)$$

- als  $\vec{A} = d\vec{r}/dt$ , dan geldt tenslotte

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &\stackrel{(90)}{=} \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) \\ &\stackrel{(89),(90)}{=} \frac{\delta^2\vec{r}}{\delta t^2} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}. \end{aligned} \quad (91)$$

Schijnkrachten: stel de plaatsvector van een puntdeeltje wordt gegeven door  $\vec{r}_I$  ten opzichte van een inertiaalstelsel. Vervolgens gaan we over op een versneld coördinatenstelsel waarvan de oorsprong zich bevindt op de inertiaalpositie  $\vec{R}_I$ . De plaatsvector van het puntdeeltje ten opzichte van het versnelde coördinatenstelsel wordt dan

$$\vec{r} = \vec{r}_I - \vec{R}_I . \quad (92)$$

Beschouw vervolgens de 2<sup>e</sup> wet van Newton, die is geformuleerd voor inertiaalcoördinaten:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \frac{d^2 \vec{r}_I}{dt^2} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m \frac{d^2 \vec{R}_I}{dt^2} \stackrel{(91)}{=} m \left[ \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \frac{d^2 \vec{R}_I}{dt^2} \right] \\ \Rightarrow m \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} &= \vec{F} - m \left[ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \frac{d^2 \vec{R}_I}{dt^2} \right] \equiv \vec{F}_{\text{eff}} . \end{aligned} \quad (93)$$

Aan de linkerkant van deze laatste vergelijking staat de waargenomen versnelling van het deeltje in het versnelde coördinatenstelsel, net zoals  $\delta \vec{r} / \delta t \equiv \vec{v}$  de waargenomen snelheid is. De effectieve (waargenomen) kracht

$$\vec{F}_{\text{eff}} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{cf}} + \vec{F}_{\text{cor}} + \vec{F}_{\text{az}} + \vec{F}_{\text{tr}} \quad (94)$$

bevat verscheidene schijnkrachten:

$$\vec{F}_{\text{cf}} = m \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega}) \stackrel{(70)}{=} m \vec{\omega}^2 \vec{r} - m (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{\omega} = \underline{\text{centrifugaalkracht}} , \quad (95)$$

$$\vec{F}_{\text{cor}} = -2m \vec{\omega} \times \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} \equiv -2m \vec{\omega} \times \vec{v} = \underline{\text{Corioliskracht}} , \quad (96)$$

$$\vec{F}_{\text{az}} = -m \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = \underline{\text{azimutaalkracht}} , \quad (97)$$

$$\vec{F}_{\text{tr}} = -m \frac{d^2 \vec{R}_I}{dt^2} = \underline{\text{translatiekracht}} . \quad (98)$$

We laten deze schijnkrachten even één voor één de revue passeren.

De centrifugaalkracht: deze schijnkracht is een rechtstreeks gevolg van de rotatie van het coördinatenstelsel en staat loodrecht op de rotatie-as ( $\vec{\omega} \cdot \vec{F}_{\text{cf}} = 0$ ). Neem bijvoorbeeld als rotatie-as de  $z$ -as, dan geldt

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z \stackrel{(95)}{\implies} \vec{F}_{\text{cf}} = m\omega^2 (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) .$$

Hieruit lezen we onmiddellijk af dat de centrifugaalkracht radieel naar buiten is gericht ten opzichte van de rotatie-as.

De Corioliskracht: deze schijnkracht is een gevolg van de beweging van het puntdeeltje ten opzichte van het roterende coördinatenstelsel en staat loodrecht op zowel de rotatie-as als de waargenomen snelheid ( $\vec{\omega} \cdot \vec{F}_{\text{cor}} = \vec{v} \cdot \vec{F}_{\text{cor}} = 0$ ).

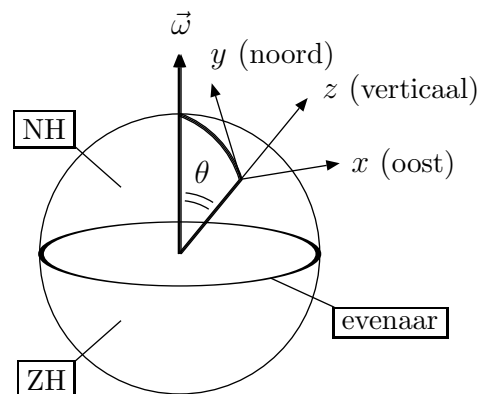
Beschouw bijvoorbeeld een met de aarde meedraaiend assenstelsel aan het aardoppervlak (zie plaatje). In dit coördinatenstelsel wordt de hoeksnelheid van de aarde ten gevolge van de rotatie om de polaire as gegeven door

$$\vec{\omega} = 0 \vec{e}_x + \omega \sin \theta \vec{e}_y + \omega \cos \theta \vec{e}_z .$$

Een puntdeeltje dat beweegt ten opzichte van het assenstelsel ondervindt dan de volgende Corioliskracht:

$$\vec{F}_{\text{cor}} = 2m\omega \left[ (v_y \cos \theta - v_z \sin \theta) \vec{e}_x - v_x \cos \theta \vec{e}_y + v_x \sin \theta \vec{e}_z \right] . \quad (99)$$

Het verband tussen bewegingsrichting van het puntdeeltje en deflectierichting ten gevolge van de Corioliskracht laat zich in de volgende tabel samenvatten:



Noordelijk Halfrond (NH)						
$\vec{v}$ -richting	N	O	Z	W	↑	↓
deflectierichting	O	Z, ↑	W	N, ↓	W	O
Zuidelijk Halfrond (ZH)						
$\vec{v}$ -richting	N	O	Z	W	↑	↓
deflectierichting	W	N, ↑	O	Z, ↓	W	O

Beschouw nu uitsluitend bewegingen langs het aardoppervlak, d.w.z.  $v_z = 0$ . Dan zijn alleen bewegingen in het  $xy$ -vlak relevant, d.w.z. bewegingen in de kompasrichtingen N, O, Z en W. Uit de tabel lezen we af dat het deeltje ten opzichte van de bewegingsrichting een deflectie naar rechts krijgt op het NH en naar links op het ZH. De consequenties hiervan zijn in het dagelijks leven terug te vinden:

- een lagedrukgebied correspondeert met aanvoer van lucht  $\Rightarrow$  een lagedrukgebied draait tegen de wijzers van de klok in op het NH en met de wijzers van de klok mee op het ZH. Op analoge wijze correspondeert een hogedrukgebied met afvoer van lucht  $\Rightarrow$  een hogedrukgebied draait met de wijzers van de klok mee op het NH en tegen de wijzers van de klok in op het ZH;
- passaatwinden ontstaan door een continue aanvoer van lucht naar de evenaar toe  $\Rightarrow$  passaatwinden komen uit het noordoosten (zuidoosten) op het NH (ZH);
- in een “ideale gootsteen” stroomt het water tegen de wijzers van de klok in weg op het NH en met de wijzers van de klok mee op het ZH. Echter, in een normale gootsteen stroomt het water te snel weg en zal in feite de vorm van de gootsteen de stroomrichting vastleggen.

De azimutaalkracht: deze schijnkracht is een gevolg van de tijdsafhankelijkheid van de hoeksnelheid van het roterende coördinatenstelsel en staat loodrecht op de plaatsvector van het deeltje ( $\vec{r} \cdot \vec{F}_{az} = 0$ ). Als  $\vec{\omega}$  alleen van grootte verandert en niet van richting, dan gaat  $\vec{F}_{az}$  tegen deze verandering in.

De translatiekracht: deze schijnkracht is een gevolg van de versnelling van de oorsprong van het versnelde coördinatenstelsel ten opzichte van het inertiaalstelsel. Deze kracht gaat tegen de versnelling in.

## 2.9 De bewegingsvergelijkingen van Euler

In §2.5 is de bewegingsvergelijking besproken voor rotaties van een star lichaam. In twee speciale (maar veelvoorkomende) situaties is deze rotatiebewegingsvergelijking van de vorm

$$\vec{N} \stackrel{(77)}{=} \dot{\vec{L}} \stackrel{(75)}{=} \frac{d}{dt} (\vec{I} \cdot \vec{\omega}), \quad \text{met} \quad \vec{N} \equiv \vec{N}_O^{\text{ext}} \quad \text{en} \quad \vec{L} \equiv \vec{L}_O.$$

Ten eerste als de rotaties plaatsvinden rond assen die door de oorsprong  $O$  gaan van een inertiaalstelsel. Denk hierbij aan systemen met een vast draaipunt, zoals de gyroscoop in §2.4 of de tol in voorbeeld 2 van §2.13. Ten tweede als de rotaties plaatsvinden rond het massamiddelpunt van het starre lichaam en we een coördinatenstelsel gebruiken waarvan de oorsprong  $O$  samenvalt met het massamiddelpunt en waarvan de oriëntatie niet verandert in de tijd. Dit betekent dat het bijbehorende assenstelsel niet roteert ten opzichte van een inertiaalstelsel. Echter, tijdens de rotatie van het starre lichaam verandert de oriëntatie van dat lichaam ten opzichte van het gekozen assenstelsel, zodat ook de traagheidstensor  $\vec{I}$  in de tijd verandert. Het is dan ook meestal veel makkelijker om een zogenaamd lichaamsvast assenstelsel te gebruiken dat met het lichaam meedraait. Dit houdt in dat het assenstelsel en het starre lichaam samen ook weer een star geheel vormen. In termen van zulke lichaamsvaste coördinaten is de traagheidstensor  $\vec{I}_v$  tijdsonafhankelijk. Omdat het starre lichaam in rust is ten opzichte van het meedraaiende coördinatenstelsel, heeft elk puntdeeltje van het starre lichaam een waargenomen snelheid  $\delta \vec{r}_i / \delta t = \vec{0}$ . De bovenstaande impuls- en krachtmomenten alsmede de kinetische energie van de rotatiebeweging kunnen dan als volgt in lichaamsvaste vorm worden omgeschreven:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{r}_i}{dt} \stackrel{(88)}{=} \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \stackrel{(69),(75)}{=} \vec{I}_v \cdot \vec{\omega}, \quad (100)$$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} \stackrel{(88)}{=} \frac{\delta \vec{L}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{L} \stackrel{(100)}{=} \vec{I}_v \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\vec{I}_v \cdot \vec{\omega}), \quad (101)$$

$$T_{\text{rot}} \stackrel{(76)}{=} \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} \stackrel{(100)}{=} \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I}_v \cdot \vec{\omega}. \quad (102)$$

Voor een lichaamsvaste waarnemer is  $\vec{\omega}$  te bepalen door te kijken naar de beweging van objecten die zich op grote afstand van het starre lichaam bevinden.

Een verdere vereenvoudiging wordt verkregen door over te gaan op hoofdassen  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  en  $\vec{e}_3$  zodanig dat de traagheidstensor diagonaal wordt en dus geen deviatiemomenten meer heeft ten opzichte van deze basis:

$$L_j = (I_v)_{jj} \omega_j \equiv I_j \omega_j \quad (j = 1, 2, 3) . \quad (103)$$

De eigenwaarden  $I_1, I_2$  en  $I_3$  worden hoofdtraagheidsmomenten genoemd. Als  $\vec{\omega} \parallel \vec{e}_j$ , dan geldt automatisch dat  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$  en  $\vec{N} \stackrel{(101)}{=} \vec{I}_v \cdot \dot{\vec{\omega}}$ , zodat er geen krachtmomenten nodig zijn voor constante rotaties rond de hoofdassen! Ten opzichte van zo'n hoofdassenstelsel gelden voor rotaties de zogenaamde bewegingsvergelijkingen van Euler:

$$\begin{aligned} N_1 &= I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 \quad , \quad N_2 = I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \quad , \\ N_3 &= I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 \quad . \end{aligned} \quad (104)$$

De eigenwaarden van  $\vec{I}_v$ : de hoofdtraagheidsmomenten van een star lichaam met lichaamsvaste traagheidstensor  $\vec{I}_v$  volgen uit de eigenwaardevergelijking

$$\begin{vmatrix} (I_v)_{xx} - I & (I_v)_{xy} & (I_v)_{xz} \\ (I_v)_{xy} & (I_v)_{yy} - I & (I_v)_{yz} \\ (I_v)_{xz} & (I_v)_{yz} & (I_v)_{zz} - I \end{vmatrix} = 0 . \quad (105)$$

Dit is een 3<sup>e</sup>-graadsvergelijking met drie reële oplossingen voor  $I$ , aangezien de traagheidstensor een reële symmetrische matrix is. Stel dat de drie eigenwaarden verschillend zijn. Dan liggen de drie hoofdassen van het lichaam langs de drie bijbehorende eigenvectorrichtingen, die loodrecht op elkaar staan en dus via een draaiing van het oorspronkelijke lichaamsvaste assenstelsel (d.w.z. via een basistransformatie) te verkrijgen zijn. Als twee van de drie eigenwaarden aan elkaar gelijk zijn, dan spreken we van een tweevoudig ontaarde eigenwaarde. In dat geval zijn alle vectoren loodrecht op de hoofdas bij de niet-ontaarde eigenwaarde automatisch eigenvectoren van de traagheidstensor. Dit treedt bijvoorbeeld op als de massaverdeling van het lichaam volledig rotatiesymmetrisch is ten opzichte van een as, zoals een homogene cilinder rond de cilinderas. Echter, er bestaan andere lichaamsymmetrieën die tot hetzelfde resultaat leiden (zie opgave 10 van het werkcollege). Als drie eigenwaarden aan elkaar gelijk zijn, dan spreken we van drievoudige ontaarding en zijn alle vectoren eigenvectoren van de traagheidstensor. Voorbeeld: een homogene bol wanneer het lichaamsvaste assenstelsel het massamiddelpunt als oorsprong heeft.

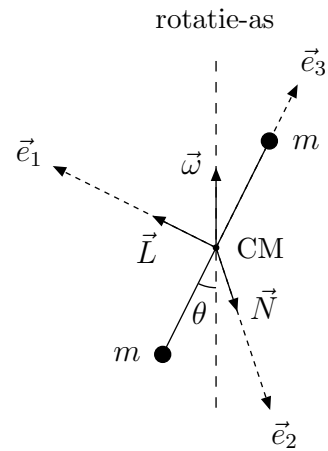
Symmetrie-argumenten voor het vinden van de hoofdassen:

- Als de massaverdeling van het starre lichaam volledig rotatiesymmetrisch is ten opzichte van een bepaalde as, zoals een homogene cilinder rond de cilinderas, dan is deze symmetrie-as automatisch een hoofdas. Tevens zijn dan alle orthogonale paren van assen die loodrecht op de symmetrie-as staan te gebruiken als hoofdassen.

- Als de massaverdeling van het starre lichaam spiegelingssymmetrisch is ten opzichte van een bepaald vlak, zoals bijvoorbeeld geldt voor een plat star lichaam, dan is de as loodrecht op het symmetrievlak automatisch een hoofd-as. De overige twee hoofdassen liggen dan in het symmetrievlak.

In het laatste geval komen alle massa-elementen van het lichaam gespiegeld aan weerszijden van het symmetrievlak voor, zodat ze paarsgewijs tegen elkaar wegvallen in de relevante deviatiemomenten. In het eerste geval is elk vlak waarvan de symmetrie-as deel uitmaakt zo'n symmetrievlak.

Rekenvoorbeeld: beschouw twee constante puntmassa's met massa  $m$  verbonden door middel van een onvervormbare massaloze verbindingsstaaf met lengte  $\ell$  (zie plaatje). Dit haltersysteem roteert met constante hoeksnelheid  $\vec{\omega}$  rond een rotatie-as die door het massamiddelpunt van de halter gaat en die een hoek  $\theta$  maakt met de verbindingsstaaf. Ga nu werken met een assenstelsel waarvan de oorsprong samenvalt met het massamiddelpunt (midden) van de halter. De asrichting  $\vec{e}_3$  wordt langs de staaf gelegd en de asrichting  $\vec{e}_1$  in het vlak dat wordt opgespannen door de staaf en de hoeksnelheid  $\vec{\omega}$ . Deze keuzes leggen dan de derde asrichting  $\vec{e}_2$  vast. Omdat het massamiddelpunt als oorsprong wordt gebruikt zien we dat de coördinaten van de twee puntdeeltjes precies langs de as  $\vec{e}_3$  liggen, zodat de traagheidstensor in het gekozen assenstelsel geen enkel deviatiemoment heeft en dus diagonaal is. Het gekozen assenstelsel is dus in feite een hoofdassenstelsel, met



$$I_1 = m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 = I_2 \quad \text{en} \quad I_3 = 0 .$$

Tenslotte bepalen we het impulsmoment van de rotatie en het krachtmoment dat nodig is om de constante rotatie mogelijk te maken:

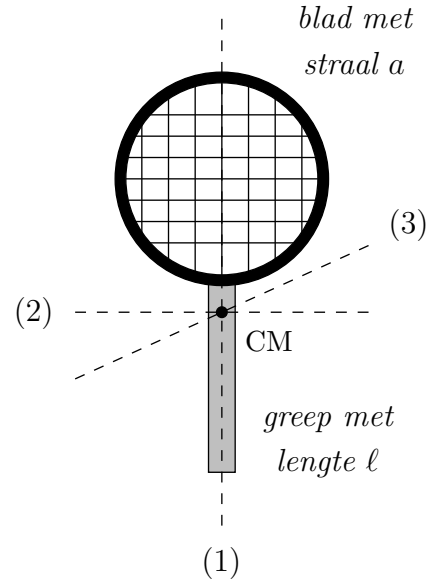
$$\vec{\omega} = \omega \sin \theta \vec{e}_1 + \omega \cos \theta \vec{e}_3 \xrightarrow{(75), (104), \dot{\vec{\omega}} = \vec{0}} \vec{L} = I_1 \omega_1 \vec{e}_1 = \frac{1}{2} m \ell^2 \omega \sin \theta \vec{e}_1 ,$$

$$\vec{N} = I_1 \omega_1 \omega_3 \vec{e}_2 = \frac{1}{2} m \ell^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta \vec{e}_2 .$$

In dit voorbeeld liggen de hoofdassen dus langs  $\vec{L}$ ,  $\vec{N}$  en de staaf. Het haltersysteem is in feite een 1-dimensionaal systeem met rotatiesymmetrie ten opzichte van de verbindingsstaaf. Derhalve valt één van de hoofdassen samen met de verbindingsstaaf en kunnen de overige twee hoofdassen willekeurig worden gekozen in het vlak loodrecht op de staaf.

## 2.10 Het tennisracket-theorema

Als een prachtige toepassing van de bewegingsvergelijkingen van Euler beschouwen we nu rotaties van een tennisracket (zie plaatje). In geïdealiseerde vorm is een tennisracket bij benadering op te vatten als een 2-dimensionaal star lichaam dat is opgebouwd uit een dunne cirkelvormige hoepel (blad) met straal  $a$  en massa  $m_a$  die verbonden is met een dunne staaf (greep) met lengte  $\ell$  en massa  $m_\ell$ . De dunne hoepel en staaf hebben allebei een homogene massaverdeling die bij benadering 1-dimensionaal is. Ga nu werken met een hoofdassenstelsel waarvan de oorsprong samenvalt met het massamiddelpunt van het racket. Op grond van symmetrie-eigenschappen zien we onmiddellijk wat de drie hoofdassen zijn:



- hoofdas (1) loopt door de greep en het midden van het blad;
- hoofdas (2) staat loodrecht op de greep en ligt in het vlak dat wordt opgespannen door het blad;
- hoofdas (3) staat zowel loodrecht op de greep als op het blad. Kortweg, de 3<sup>e</sup> hoofdas staat loodrecht op het vlak opgespannen door het bij benadering 2-dimensionale lichaam.

Dit zijn trouwens ook de hoofdassen van een niet-geïdealiseerd tennisracket, zoals eenvoudig is in te zien op grond van de spiegelingssymmetrie van het racket ten opzichte van zowel het 12-vlak als het 13-vlak.

Neem vervolgens aan dat er ten opzichte van het massamiddelpunt geen totaal extern krachtmoment op het racket werkt, d.w.z.  $\vec{N} \equiv \vec{N}_{\text{CM}}^{\text{ext}} = \vec{0}$ . Deze situatie treedt bijvoorbeeld op aan het aardoppervlak waar de zwaartekracht in goede benadering uniform is. In dat geval vereenvoudigen de bewegingsvergelijkingen van Euler tot

$$\dot{\omega}_1 + \frac{I_3 - I_2}{I_1} \omega_2 \omega_3 = 0 \quad , \quad \dot{\omega}_2 - \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_3 \omega_1 = 0 \quad , \quad \dot{\omega}_3 + \frac{I_2 - I_1}{I_3} \omega_1 \omega_2 = 0 . \quad (106)$$

In de volgende stap berekenen we de hoofdtraagheidsmomenten  $I_1$ ,  $I_2$  en  $I_3$  voor rotaties rond de aangegeven hoofdassen. Hiervoor bepalen we eerst de positie van het massamiddelpunt van het racket ten opzichte van het midden van de hoepel. Dit massamiddelpunt zal op de hoofdas (1) liggen op een afstand  $R$  onder het midden van de hoepel:

$$MR = m_a 0 + \frac{m_\ell}{\ell} \int_a^{a+\ell} d\ell' \ell' = m_\ell(a + \ell/2) \Rightarrow M = m_a + m_\ell, \quad R = \frac{m_\ell}{M}(a + \ell/2).$$

Hier is gebruikt dat het massamiddelpunt van de hoepel samenvalt met het midden van de hoepel en dat de massa per lengte-eenheid van de staaf wordt gegeven door  $m_\ell/\ell$ .

Voor rotaties om hoofdas (1) geldt dat de staaf geen bijdrage levert omdat de dikte van de staaf verwaarloosbaar is genomen. De hoepel geeft een bijdrage  $\frac{1}{2}m_a a^2$ , hetgeen op grond van de loodrechte-as regel (85) en de symmetrische massaverdeling van de hoepel precies de helft is van het traagheidsmoment dat op pagina 25 is afgeleid voor het gyroscopisch effect. Opgeteld vinden we dus

$$I_1 = \frac{1}{2}m_a a^2. \quad (107)$$

Voor rotaties om hoofdas (2) geldt met behulp van de parallelle-as regel (82) dat de bijdrage van de hoepel wordt gegeven door

$$I_2^{\text{hoepel}} = \frac{1}{2}m_a a^2 + m_a R^2$$

en de bijdrage van de staaf door

$$I_2^{\text{staaf}} = \frac{m_\ell}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} d\ell' \ell'^2 + m_\ell(a + \ell/2 - R)^2,$$

hetgeen optelt tot

$$I_2 = \frac{1}{2}m_a a^2 + \frac{1}{12}m_\ell \ell^2 + \frac{m_a m_\ell}{M}(a + \ell/2)^2. \quad (108)$$

Voor rotaties om hoofdas (3) kan rechtstreeks de loodrechte-as regel (85) worden gebruikt:

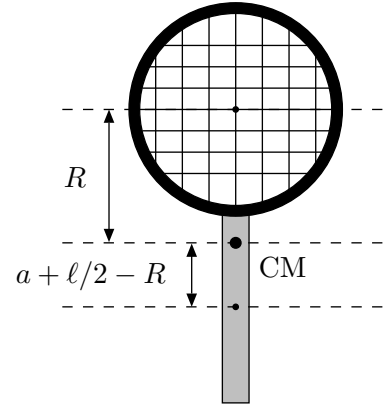
$$I_3 = I_1 + I_2. \quad (109)$$

Voor het geïdealiseerde tennisracket geldt dus dat  $I_1 < I_2 < I_3$ , zodat de bewegingsvergelijkingen van Euler als volgt kunnen worden geschreven:

$$\dot{\omega}_1 + r_1 \omega_2 \omega_3 = 0, \quad \dot{\omega}_2 - r_2 \omega_3 \omega_1 = 0, \quad \dot{\omega}_3 + r_3 \omega_1 \omega_2 = 0,$$

$$\text{met } r_1 = \frac{I_3 - I_2}{I_1} > 0, \quad r_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2} > 0, \quad r_3 = \frac{I_2 - I_1}{I_3} > 0. \quad (110)$$

Vervolgens gaan we proberen een uitspraak te doen over de stabiliteit van rotaties rond de verschillende hoofdassen. Hiertoe beschouwen we een drietal scenario's.





**Scenario (A)**: beschouw rotaties die aanvankelijk bijna uitsluitend rond de hoofdas (2) plaatsvinden, d.w.z. leg aan de bewegingsvergelijkingen van Euler de volgende beginconditie voor  $t = 0$  op:  $\vec{\omega}(0) \approx \omega_2 \vec{e}_2$  en  $|\omega_{1,3}(0)| \ll |\omega_2|$ . Uit vergelijking (110) volgt dan dat  $\dot{\omega}_2 \approx 0 \Rightarrow \omega_2 \approx \text{constant}$ . Voor de overige twee hoeksnelheden geldt een gekoppelde set differentiaalvergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_1 + (r_1 \omega_2) \omega_3 &= 0 \\ \dot{\omega}_3 + (r_3 \omega_2) \omega_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ddot{\omega}_1 - (r_1 r_3 \omega_2^2) \omega_1 = 0 \quad \text{en} \quad \ddot{\omega}_3 - (r_1 r_3 \omega_2^2) \omega_3 = 0 .$$

Dit laat zich op triviale wijze oplossen in termen van e-machten:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= c_1 \exp(\omega_2 t \sqrt{r_1 r_3}) + c_2 \exp(-\omega_2 t \sqrt{r_1 r_3}) \quad (c_{1,2} \text{ klein}) , \\ \omega_3(t) &= \sqrt{\frac{r_3}{r_1}} \left[ -c_1 \exp(\omega_2 t \sqrt{r_1 r_3}) + c_2 \exp(-\omega_2 t \sqrt{r_1 r_3}) \right] . \end{aligned} \quad (111)$$

De groeiende e-machten zullen ervoor zorgen dat na verloop van tijd  $\omega_1(t)$  en  $\omega_3(t)$  groot worden, zelfs als de beginwaarden op  $t = 0$  zeer klein zijn. Op den duur moeten  $\omega_1$  en  $\omega_3$  dan ook in de vergelijking voor  $\omega_2$  worden meegenomen.

Conclusie: rotaties rond de hoofdas (2) zijn instabiel.

**Scenario (B)**: beschouw rotaties die aanvankelijk bijna uitsluitend rond de hoofdas (1) plaatsvinden, d.w.z. leg aan de bewegingsvergelijkingen van Euler de volgende beginconditie voor  $t = 0$  op:  $\vec{\omega}(0) \approx \omega_1 \vec{e}_1$  en  $|\omega_{2,3}(0)| \ll |\omega_1|$ . Uit vergelijking (110) volgt dan dat  $\dot{\omega}_1 \approx 0 \Rightarrow \omega_1 \approx \text{constant}$ . Voor de overige twee hoeksnelheden geldt een gekoppelde set differentiaalvergelijkingen

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_2 - (r_2 \omega_1) \omega_3 &= 0 \\ \dot{\omega}_3 + (r_3 \omega_1) \omega_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ddot{\omega}_2 + (r_2 r_3 \omega_1^2) \omega_2 = 0 \quad \text{en} \quad \ddot{\omega}_3 + (r_2 r_3 \omega_1^2) \omega_3 = 0 .$$

Dit laat zich op triviale wijze oplossen in termen van sinussen en cosinussen:

$$\begin{aligned} \omega_2(t) &= c \cos(\omega_1 t \sqrt{r_2 r_3} + \alpha) \quad (c \text{ klein}) , \\ \omega_3(t) &= -c \sqrt{\frac{r_3}{r_2}} \sin(\omega_1 t \sqrt{r_2 r_3} + \alpha) . \end{aligned} \quad (112)$$

Als de beginwaarden  $\omega_2(0)$  en  $\omega_3(0)$  op  $t = 0$  klein zijn, dan blijven  $\omega_2(t)$  en  $\omega_3(t)$  klein voor willekeurige tijden. Conclusie: rotaties rond de hoofdas (1) zijn wel stabiel.

**Scenario (C)**: beschouw rotaties die aanvankelijk bijna uitsluitend rond de hoofdas (3) plaatsvinden. De verschillende uitwerkingsstappen voor dit scenario lopen volledig analoog aan de stappen voor scenario (B), zodat rotaties rond de hoofdas (3) ook stabiel zijn.

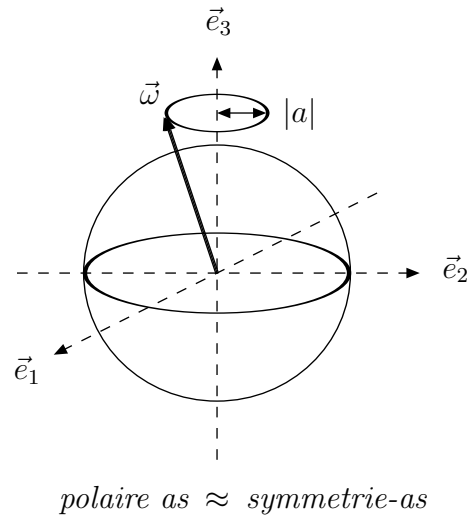
Dit alles kunnen we als volgt samenvatten:

- voor rotaties rond de hoofdasrichting  $\vec{e}_1$  (dan wel  $\vec{e}_3$ ) zien we dat de totale hoeksnelheid  $\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3$  een precessie ondergaat op een kleine ellips rond  $\vec{e}_1$  (dan wel  $\vec{e}_3$ );
- rotaties rond de hoofdasrichting  $\vec{e}_2$  onttaarden snel in rotaties rond de andere hoofdasen, aangezien de desbetreffende hoeksnelheidscomponenten snel toenemen.

Het tennisracket-theorema: beschouw een star lichaam met de eigenschap dat de drie hoofdtraagheidsmomenten verschillend zijn ten opzichte van een hoofdassenstelsel met het massamiddelpunt als oorsprong. Als nu  $\vec{N} \equiv \vec{N}_{\text{CM}}^{\text{ext}} = \vec{0}$ , dan heeft het lichaam stabiele rotaties rond de hoofdas met het grootste dan wel kleinste hoofdtraagheidsmoment en instabiele rotaties rond de andere hoofdas.

## 2.11 De aarde als vrije symmetrische tol

De hoofdassen van de aarde worden gegeven door de polaire as  $\vec{e}_3$  en twee willekeurige orthogonale assen  $\vec{e}_1$  en  $\vec{e}_2$  in het equatoriale vlak (zie plaatje). De aarde is namelijk bij benadering rotatiesymmetrisch rond de polaire as met een ietwat afgeplatte vorm aan de polen, d.w.z.  $I_1 \approx I_2 \equiv I < I_3$ . Gebruik nu een lichaamsvast hoofdassenstelsel waarvan de oorsprong samenvalt met het massamiddelpunt (midden) van de aarde. Omdat het totale externe krachtmoment dat de aarde ondervindt ten gevolge van de zon en maan relatief klein is, hebben de bewegingsvergelijkingen van Euler de volgende benaderde vorm:



$$\dot{\omega}_1 + \frac{I_3 - I}{I} \omega_2 \omega_3 = 0 \quad , \quad \dot{\omega}_2 - \frac{I_3 - I}{I} \omega_3 \omega_1 = 0 \quad \text{en} \quad \dot{\omega}_3 = 0 . \quad (113)$$

Dit zijn de bewegingsvergelijkingen van Euler voor een zogenaamde vrije symmetrische tol. De oplossing van deze set bewegingsvergelijkingen is (zie scenario (B) in § 2.10)

$$\omega_1(t) = a \cos(\Omega t + \alpha) \quad , \quad \omega_2(t) = a \sin(\Omega t + \alpha) \quad \text{en} \quad \omega_3(t) = \omega_3(0) \equiv \omega_3 \quad (114)$$

in termen van de constante grootheden

$$\Omega = \omega_3 \frac{I_3 - I}{I} \quad \text{en} \quad \vec{\omega}^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = a^2 + \omega_3^2 . \quad (115)$$

De realiteit is nu dat de afwijking  $a$  ten opzichte van de polaire richting zeer klein is, zodat een waarnemer op aarde de hoeksnelheid  $\vec{\omega}$  een precessie ziet ondergaan op een kegel vlak rond de polaire symmetrie-as (“Chandler wobble”). Deze precessiebeweging heeft een hoeksnelheid  $\Omega$  en een periode

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{I}{I_3 - I} \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{I}{I_3 - I} \text{ dagen} \approx 440 \text{ dagen} . \quad (116)$$

De waarnemer herkent de richting van  $\vec{\omega}$  als de richting in de nachthemel waar de sterren stationair zijn. Let wel: de aarde is in feite geen star lichaam, zodat de precessie door toedoen van visceuze effecten gedempt wordt en door toedoen van aardbevingen etc. weer gevoed kan worden. Er is dan ook in feite geen sprake van een constante precessie.

Voor een vrije symmetrische tol beweegt het massamiddelpunt eenparig. Naast een hoofdasstelsel met het massamiddelpunt als oorsprong bestaat er dan ook een inertiaalstelsel met het massamiddelpunt als oorsprong. Het enige verschil tussen beide coördinatenstelsels is derhalve de rotatiebeweging weergegeven door de hoeksnelheid  $\vec{\omega}$ . Aangezien er geen totaal extern krachtmoment op het systeem werkt, zal voor een waarnemer in het inertiaalstelsel het impulsmoment  $\vec{L}_{\text{CM}} \equiv \vec{L}$  constant zijn. Nu geldt

$$\left. \begin{aligned} \vec{\omega} &= (\omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2) + \omega_3 \vec{e}_3 \\ \vec{L} &\stackrel{(75)}{=} \vec{I}_v \cdot \vec{\omega} = I(\omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2) + I_3 \omega_3 \vec{e}_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{\omega} \stackrel{(115)}{=} \frac{\vec{L}}{I} - \Omega \vec{e}_3 , \quad (117)$$

zodat  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{L}$  en  $\vec{e}_3$  te allen tijde in één vlak liggen. Terwijl voor de lichaamsvaste waarnemer  $\vec{\omega}$  rond de constante symmetrie-as  $\vec{e}_3$  draait, zal de inertiaalwaarnemer de symmetrie-as  $\vec{e}_3$  rond het constante impulsmoment  $\vec{L}$  zien draaien. Voor deze rotatiebeweging geldt  $\dot{\vec{e}}_3 = \vec{\omega} \times \vec{e}_3 \stackrel{(117)}{=} \vec{L} \times \vec{e}_3 / I$ , oftewel  $\vec{e}_3$  draait rond  $\vec{L}$  met de constante hoeksnelheid

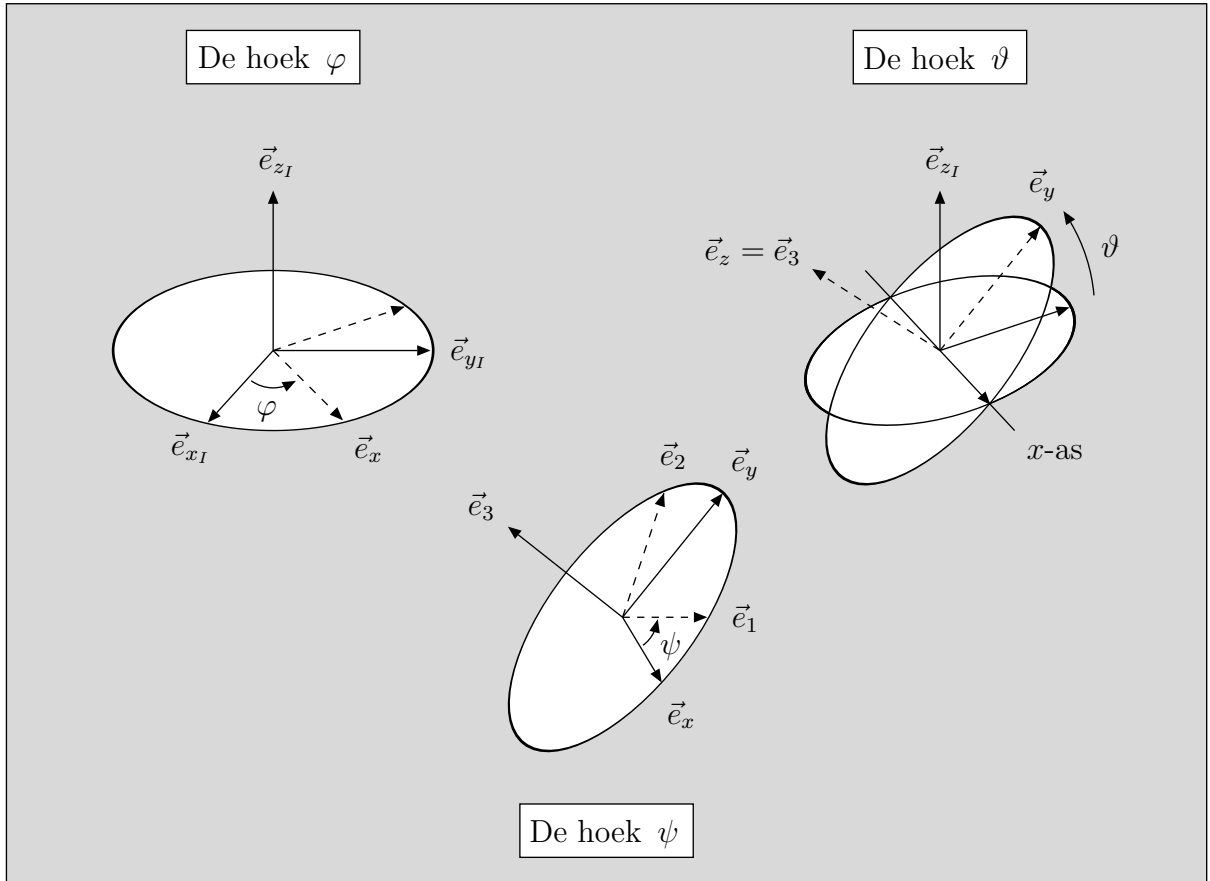
$$\vec{\omega}_L \equiv \frac{\vec{L}}{I} = \frac{L}{I} \vec{e}_L \equiv \omega_L \vec{e}_L . \quad (118)$$

## 2.12 Hoeken van Euler

Alvorens de Lagrangiaanmethode los te laten op specifieke problemen met starre lichamen, moeten we nog een laatste ingrediënt onder de loep nemen: het verband tussen de oriëntatie van het hoofdasstelsel  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  van een star lichaam en de inertiaaloriëntatie gegeven door de eenheidsvectoren  $\vec{e}_{x_I}, \vec{e}_{y_I}, \vec{e}_{z_I}$ . Dit verband wordt gegeven in de vorm van een drietal rotaties waardoor de inertiaaleenheidsvectoren zijn over te voeren in de hoofdasrichtingen. De bijbehorende drie hoeken  $\varphi$ ,  $\vartheta$  en  $\psi$  worden de hoeken van Euler genoemd. Deze hoeken zijn te vinden met behulp van de volgende procedure.

- De hoofdas  $\vec{e}_3$  spant samen met  $\vec{e}_{z_I}$  een vlak op. In de eerste stap roteren we het inertiaalstelsel over een hoek  $\varphi$  rond de  $\vec{e}_{z_I}$ -as zodanig dat de nieuwe  $x$ -as loodrecht op dat vlak komt te staan (zie het plaatje links).

- Dit wordt gevolgd door een rotatie over een hoek  $\vartheta$  om de nieuwe  $x$ -as, zodanig dat een nieuw assenstelsel  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  ontstaat waarvan de  $z$ -as samenvalt met de hoofdas  $\vec{e}_3$  (zie het plaatje rechts).
- Tenslotte zijn de overige twee assen op de juiste hoofdaspositie te krijgen door te roteren over een hoek  $\psi$  rond de hoofdas  $\vec{e}_z = \vec{e}_3$  (zie het middelste plaatje).



Het verband tussen de oriëntaties van beide assenstelsels is derhalve op de volgende wijze in matrixvorm uit te drukken:

$$\vec{e}_\alpha = \sum_k R_{\alpha k} \vec{e}_k \quad \text{en} \quad \vec{e}_k = \sum_\alpha (R^{-1})_{k\alpha} \vec{e}_\alpha = \sum_\alpha R_{\alpha k} \vec{e}_\alpha, \quad (119)$$

met  $\alpha = 1, 2, 3$  en  $k = x_I, y_I, z_I$ . De coëfficiënten  $R_{\alpha k}$  zijn de componenten van een  $3 \times 3$  rotatiematrix

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (120)$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos\vartheta \sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi & \cos\vartheta \cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi & \sin\vartheta \sin\psi \\ -\cos\vartheta \sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi & \cos\vartheta \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi & \sin\vartheta \cos\psi \\ \sin\vartheta \sin\varphi & -\sin\vartheta \cos\varphi & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Neem nu aan dat het hoofdassenstelsel met een hoeksnelheid  $\vec{\omega}$  roteert ten opzichte van het inertiaalstelsel. Dan geldt

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_1 &= \vec{\omega} \times \vec{e}_1 = \omega_3 \vec{e}_2 - \omega_2 \vec{e}_3 \\ \dot{\vec{e}}_2 &= \vec{\omega} \times \vec{e}_2 = \omega_1 \vec{e}_3 - \omega_3 \vec{e}_1 \\ \dot{\vec{e}}_3 &= \vec{\omega} \times \vec{e}_3 = \omega_2 \vec{e}_1 - \omega_1 \vec{e}_2, \end{aligned}$$

waarbij  $\omega_1, \omega_2$  en  $\omega_3$  de componenten van de hoeksnelheid zijn ten opzichte van het hoofdassenstelsel. Hieruit kunnen we aflezen dat

$$\omega_1 = \dot{\vec{e}}_2 \cdot \vec{e}_3, \quad \omega_2 = \dot{\vec{e}}_3 \cdot \vec{e}_1 \quad \text{en} \quad \omega_3 = \dot{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_2.$$

Met behulp van bovenstaande matrix kan dit na aardig wat schrijfwerk worden omgeschreven in termen van de hoeken van Euler:

$$\vec{\omega} = (\dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\psi + \dot{\vartheta} \cos\psi) \vec{e}_1 + (\dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi - \dot{\vartheta} \sin\psi) \vec{e}_2 + (\dot{\varphi} \cos\vartheta + \dot{\psi}) \vec{e}_3. \quad (121)$$

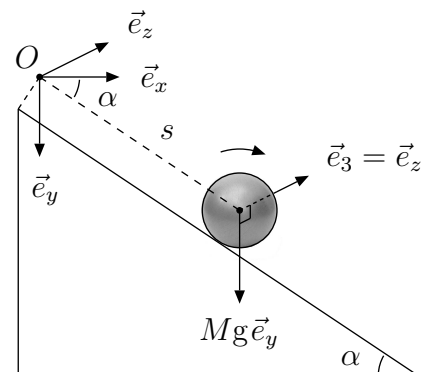
Zoals in het werkcollege zal worden afgeleid kan deze hoeksnelheid van een roterend star lichaam ook worden geschreven in de volgende equivalente vormen:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\varphi} \vec{e}_{z_I} + \dot{\vartheta} \vec{e}_x + \dot{\psi} \vec{e}_3 \\ &= \dot{\vartheta} \vec{e}_x + \dot{\varphi} \sin\vartheta \vec{e}_y + (\dot{\varphi} \cos\vartheta + \dot{\psi}) \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (122)$$

## 2.13 Lagrangianen voor roterende starre lichamen

Aan de hand van een aantal voorbeelden gaan we nu bekijken hoe de Lagrangiaanmethode kan worden toegepast op starre lichamen.

Voorbeeld 1: beschouw een homogene bol met massa  $M$  en straal  $R$ , die zonder te slippen van een helling afrolt. De helling maakt een hoek  $\alpha$  ten opzichte van het aardoppervlak. Tijdens het rollen roteert de bol om de hoofdas  $\vec{e}_3$  die evenwijdig ligt aan de helling en loodrecht staat op de rolrichting en het gravitatieveld. We kiezen er nu voor om dit systeem te beschrijven ten opzichte van een vast



coördinatenstelsel waarvan de oorsprong  $O$  de aanvankelijke rustpositie is van het massamiddelpunt van de bol. De  $z$ -as leggen we langs de hoofdasrichting  $\vec{e}_3$ , de  $y$ -as langs de richting van de zwaartekracht en de  $x$ -as dus langs het aardoppervlak. Als gegeneraliseerde coördinaat gebruiken we tenslotte de door het massamiddelpunt afgelegde afstand  $s$  ten opzichte van de beginpositie  $O$ .

Het eerste ingrediënt van de Lagrangiaan is de kinetische energie  $T \stackrel{(49)}{=} \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + T_{\text{rot}}$ , bestaande uit de kinetische energie van het massamiddelpunt en de kinetische energie van de rotatiebeweging ten opzichte van het massamiddelpunt. De kinetische energie van de pure rotatiebeweging wordt gegeven door

$$T_{\text{rot}} \stackrel{(76)}{=} \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I} \cdot \vec{\omega} \stackrel{\text{hoofdassen}}{=} \frac{1}{2} \omega_1^2 I_1 + \frac{1}{2} \omega_2^2 I_2 + \frac{1}{2} \omega_3^2 I_3, \quad (123)$$

zodat voor het beschouwde systeem in totaal geldt

$$T = \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \omega_3^2 I_3 = \frac{1}{2} \left( M + \frac{I_3}{R^2} \right) \dot{s}^2 \stackrel{(84)}{=} \frac{7}{10} M \dot{s}^2. \quad (124)$$

Hier is in de voorlaatste stap de conditie  $ds/dt = R\omega_3$  gebruikt voor het rollen zonder te slippen (zie het voorbeeld op pagina 24).

Als tweede ingrediënt van de Lagrangiaan nemen we de potentiële energie ten opzichte van de beginpositie  $O$ , hetgeen wordt gegeven door

$$V = -Mgy = -Mgs \sin \alpha. \quad (125)$$

Nu kan de Lagrangiaan worden opgesteld:

$$L(s, \dot{s}) = \frac{7}{10} M \dot{s}^2 + Mgs \sin \alpha. \quad (126)$$

Deze Lagrangiaan brengt alle relevante randvoorwaarden van het systeem in rekening. Het lichaam is namelijk star, zodat we te maken hebben met zes vrijheidsgraden. Verder rolt het lichaam langs een vaste curve de helling af, terwijl het daarbij rond een vaste richting draait. Hierdoor blijven er van de zes vrijheidsgraden nog maar twee over. Tenslotte rolt het lichaam zonder te slippen, hetgeen inhoudt dat er inderdaad maar één coördinaat nodig is om de beweging van het systeem volledig te beschrijven.

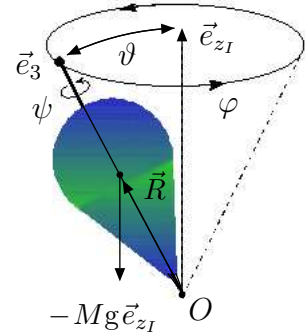
De Lagrange-vergelijking voor deze resterende coördinaat is dan

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = \frac{7}{5} M \ddot{s} - Mg \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{s} = \frac{5g}{7} \sin \alpha. \quad (127)$$

Deze bewegingsvergelijking gaat gepaard met een constante versnelling die gereduceerd is ten opzichte van het geval dat een puntdeeltje langs de helling beweegt. Dit is geen verrassing aangezien de translatiesnelheid gekoppeld is aan een rotatiesnelheid.

Voorbeeld 2: symmetrische tollen in een gravitatieveld.

Beschouw een symmetrische tol met massa  $M$  en hoofdtraagheidsmomenten  $I_1 = I_2 \equiv I$  en  $I_3$ . De tol bevindt zich in een gravitatieveld met een constante versnelling in de negatieve inertiaalrichting  $\vec{e}_{z_I}$ . Het contactpunt tussen de tol en de ondergrond waarop de tol draait wordt vastgehouden. Er is hier dus sprake van een vast draaipunt  $O$ . De tol is rotatiesymmetrisch met als symmetrie-as de hoofdas  $\vec{e}_3$ . Dit houdt automatisch in dat elk orthogonaal paar assen loodrecht op  $\vec{e}_3$  ook hoofdassen zijn.



Omdat het draaipunt  $O$  vastligt kan het lichaam uitsluitend rotatiebewegingen uitvoeren rond assen die door het punt  $O$  gaan. We kiezen er dan ook voor om dit systeem te beschrijven ten opzichte van het niet-lichaamsvaste hoofdassenstelsel  $\vec{e}_x, \vec{e}_y$  en  $\vec{e}_z = \vec{e}_3$  met het punt  $O$  als oorsprong en  $\vec{e}_x \perp \vec{e}_{z_I}$  (zie het rechtse plaatje op pagina 42). Ten opzichte van het punt  $O$  heeft het lichaam het volgende impulsmoment ten gevolge van de pure rotatiebeweging:

$$\vec{L}_O \stackrel{(75)}{=} \vec{I}_v \cdot \vec{\omega} \stackrel{\text{hoofdassen}, (122)}{=} I(\dot{\vartheta} \vec{e}_x + \dot{\varphi} \sin \vartheta \vec{e}_y) + I_3(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \vec{e}_z, \quad (128)$$

met bijbehorende kinetische energie

$$T = T_{\text{rot}} \stackrel{(76)}{=} \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I}_v \cdot \vec{\omega} \stackrel{(122), (128)}{=} \frac{1}{2} I(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{1}{2} I_3(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2. \quad (129)$$

In deze uitdrukkingen hebben we de hoeken van Euler uit § 2.12 gebruikt als gegeneraliseerde coördinaten. Deze hoeken zijn bij uitstek geschikt om de drie verschillende typen van rotatiebewegingen van de tol te beschrijven:

$$\vec{\omega} \stackrel{(122)}{=} \dot{\varphi} \vec{e}_{z_I} + \dot{\vartheta} \vec{e}_x + \dot{\psi} \vec{e}_z.$$

De eerste term representeert de rotatiebeweging (precessie) van de symmetrie-as van de tol rond de (verticale) richting van het gravitatieveld. De tweede term geeft de verandering weer van de neiging van de symmetrie-as ten opzichte van de verticale stand (nutatie). De derde term beschrijft simpelweg de rotatiebeweging van de tol rond de symmetrie-as. De tol ondervindt verder de volgende zwaartekrachtspotentiaal:

$$V = Mg |\vec{R}| \cos \vartheta \equiv MgR \cos \vartheta. \quad (130)$$

Hieruit volgt dan de Lagrangiaan van het systeem:

$$L = T - V = \frac{1}{2} I(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) + \frac{1}{2} I_3(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 - MgR \cos \vartheta. \quad (131)$$

In opgave 9 van het werkcollege is deze Lagrangiaan in feite al geanalyseerd, waarbij werd gevonden dat er twee gegeneraliseerde impulsen behouden zijn:

$$\begin{aligned} p_\psi &= I_3(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \equiv I_3 \omega_3 = \text{constant} , \\ p_\varphi &= I \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + I_3 \omega_3 \cos \vartheta = \text{constant} . \end{aligned} \quad (132)$$

Hier is  $\omega_3$  de constante totale component van de hoeksnelheid langs de symmetrie-as van de tol [zie vergelijking (121)]. Voor de neiging  $\vartheta$  geldt tenslotte de bewegingsvergelijking

$$I \ddot{\vartheta} = \left( MgR - I_3 \omega_3 \dot{\varphi} + I \dot{\varphi}^2 \cos \vartheta \right) \sin \vartheta . \quad (133)$$

Gedurende deze beweging is de totale energie

$$E = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \frac{1}{2} I \dot{\vartheta}^2 + MgR \cos \vartheta \quad (134)$$

behouden, zoals in opgave 9 van het werkcollege is aangetoond. Er zijn nu een tweetal interessante speciale gevallen te beschouwen.

(A) Oplossingen met pure precessie: in dat geval geldt  $\vartheta(t) = \vartheta(0) \equiv \vartheta_0$ . Uit de bewegingsvergelijking (133) volgt dan

$$\dot{\varphi} = \frac{I_3 \omega_3}{2I \cos \vartheta_0} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4MgRI \cos \vartheta_0}{I_3^2 \omega_3^2}} \right) . \quad (135)$$

Voor  $\cos \vartheta_0 > 0$  en  $\omega_3 > 0$  houdt dit in dat pure precessie alleen mogelijk is als

$$I_3 \omega_3 \geq \sqrt{4MgRI \cos \vartheta_0} = I_3 \omega_3^{\min} . \quad (136)$$

Als  $\omega_3 \gg \omega_3^{\min}$ , dan zijn er twee soorten van pure precessie te identificeren:

$$\dot{\varphi}(t) \approx \frac{I_3 \omega_3}{I \cos \vartheta_0} \quad (\text{snelle precessie}) \quad , \quad \dot{\varphi}(t) \approx \frac{MgR}{I_3 \omega_3} \equiv \omega_p \quad (\text{langzame precessie}) .$$

Bij snelle precessie valt de zwaartekracht effectief weg uit de bewegingsvergelijking, zodat het systeem lijkt op een vrije symmetrische tol. Bij langzame precessie geldt  $\dot{\varphi} \ll \omega_3$  en  $\vec{L}_O \approx I_3 \omega_3 \vec{e}_z$ , zodat het systeem lijkt op de gyroscoop uit §2.4. Voor een gegeven energie  $E$  van het systeem voldoet de neiging van de tol in dat geval aan de vergelijking  $2MgR \cos \vartheta_0 \approx 2E - I_3 \omega_3^2$ .

(B) Oplossingen met een snelle rotatie, langzame precessie en zwakke nutatie: in dat geval kunnen termen met meer dan één tijdsafgeleide van  $\varphi$  en/of  $\vartheta$  worden verwaarloosd. De bewegingsvergelijkingen (132) en (133) geven dan aanleiding tot

$$\begin{aligned} \dot{p}_\varphi = 0 &\Rightarrow \ddot{\varphi} \sin \vartheta \approx \frac{I_3 \omega_3}{I} \dot{\vartheta} \equiv \omega_L \dot{\vartheta} , \\ \ddot{\vartheta} &\approx \left( \frac{MgR}{I} - \frac{I_3 \omega_3}{I} \dot{\varphi} \right) \sin \vartheta = -\omega_L (\dot{\varphi} - \omega_p) \sin \vartheta . \end{aligned}$$



Door nog een afgeleide te nemen naar de tijd treedt er een effectieve ont koppeling op van de bewegingsvergelijkingen:

$$\ddot{\varphi} \approx -\omega_L^2(\varphi - \omega_p) \Rightarrow \dot{\varphi}(t) \approx \omega_p + a \cos(\omega_L t + \alpha) \quad , \quad \dot{\vartheta}(t) \approx -a \sin \vartheta(t) \sin(\omega_L t + \alpha) .$$

Stel de begincondities van het systeem zijn gegeven door  $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$ ,  $\vartheta(0) = \vartheta_0$  en  $\dot{\vartheta}(0) = 0$ . Dan geldt  $\alpha = 0$  en  $a = \omega_0 - \omega_p$ , zodat

$$\dot{\varphi}(t) \approx \omega_p + (\omega_0 - \omega_p) \cos(\omega_L t) \Rightarrow \varphi(t) \approx \varphi_0 + \omega_p t - \frac{\omega_p - \omega_0}{\omega_L} \sin(\omega_L t) . \quad (137)$$

In deze uitdrukking voor de precessie zijn zowel  $\omega_p \propto \omega_3^{-1}$  als  $\omega_0$  kleine hoeksnelheden vergeleken bij de hoeksnelheid  $\omega_3$  van de snelle rotatiebeweging van de tol rond de symmetrie-as. Verder geldt in eerste benadering dat  $\vartheta(t)$  constant is, zodat

$$\dot{\vartheta}(t) \approx (\omega_p - \omega_0) \sin \vartheta_0 \sin(\omega_L t) \Rightarrow \vartheta(t) \approx \vartheta_0 + \frac{\omega_p - \omega_0}{\omega_L} \sin \vartheta_0 [1 - \cos(\omega_L t)] . \quad (138)$$

De precessie bestaat dus uit een superpositie van een langzame pure precessie  $\omega_p t$  en een sinusvormige beweging ten gevolge van de nutatie. De nutatie bestaat uit een oscillatie tussen  $\vartheta_0$  en  $\vartheta_0 + 2\Delta\vartheta$  met een hoge frequentie  $\omega_L/(2\pi) \propto \omega_3$  en een zwakke amplitude  $\Delta\vartheta = \omega_L^{-1}(\omega_p - \omega_0) \sin \vartheta_0 \propto \omega_3^{-1}$ . Naarmate de tol sneller om de symmetrie-as draait zal de precessie om de verticale as langzamer worden en de nutatie sneller en zwakker.

Het intuïtieve plaatje dat bij deze situatie hoort is relatief simpel. Voor een snel draaiende tol wordt het impulsmoment bij benadering gegeven door  $\vec{L}_O = L_O \vec{e}_z = I_3 \omega_3 \vec{e}_z$ . Ten gevolge van de zwaartekracht gaat er een gyroscopische precessie plaatsvinden rond de verticale  $\vec{e}_{z_I}$ -richting (zie § 2.4):

$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{N}_O = \begin{cases} MgR \sin \vartheta \vec{e}_x \perp \vec{L}_O \\ (\omega_p \vec{e}_{z_I} \times L_O \vec{e}_z) = \omega_p L_O \sin \vartheta \vec{e}_x \end{cases} \Rightarrow \omega_p = \frac{MgR}{L_O} = \frac{MgR}{I_3 \omega_3} .$$

Deze precessie van  $\vec{L}_O$  rond de  $\vec{e}_{z_I}$ -as is dus langzaam. Het feit dat daardoor  $\vec{L}_O$  niet meer exact zal samenvallen met de symmetrie-as zal aanleiding geven tot een precessie van de symmetrie-as op een kegel vlak rond  $\vec{L}_O$ , net zoals in § 2.11 is afgeleid voor een vrije symmetrische tol. De bijbehorende hoeksnelheid bedraagt  $\omega_L \stackrel{(118)}{=} L_O/I = I_3 \omega_3/I$ , zodat deze beweging snel is. De totale beweging van de symmetrie-as is dan een superpositie van de snelle cirkelbeweging van een vrije symmetrische tol rond  $\vec{L}_O$  en de trage gyroscopische precessie van  $\vec{L}_O$  rond de verticale as.

### 3 Via de Hamiltoniaan naar de kwantummechanica

Om de link met de kwantummechanica te leggen gaan we de Lagrangiaanformulering van de analytische mechanica zodanig aanpassen dat coördinaten en impulsen op gelijke voet worden behandeld. Hiertoe gaan we over van een beschrijving in termen van de variabelen  $\{q_j\}$ ,  $\{\dot{q}_j\}$  en  $t$  naar een nieuwe beschrijving in termen van  $\{q_j\}$ ,  $\{p_{q_j} = \partial L / \partial \dot{q}_j\}$  en  $t$ . Hiertoe wordt de Hamiltoniaan

$$H(\{q_j\}, \{p_{q_j}\}, t) = \sum_j p_{q_j} \dot{q}_j - L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) \quad (139)$$

ingevoerd. Dit is een voorbeeld van wat in de wiskunde een Legendre-transformatie wordt genoemd. Dat het ons door middel van deze transformatie is gelukt om de variabelen  $\{\dot{q}_j\}$  te verruilen voor  $\{p_{q_j}\}$  wordt duidelijk als we bekijken hoe de Hamiltoniaan zich gedraagt onder een variatie:

$$\begin{aligned} dH &\stackrel{(139)}{=} \sum_j \left( \dot{q}_j dp_{q_j} + p_{q_j} d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &\stackrel{(18),(19)}{=} \sum_j \left( \dot{q}_j dp_{q_j} + [Q'_j - \dot{p}_{q_j}] dq_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt . \end{aligned} \quad (140)$$

Het is inderdaad correct om de Hamiltoniaan te beschouwen als een functie van  $\{q_j\}$ ,  $\{p_{q_j}\}$  en  $t$ , zodat op basis van de linkerkant van vergelijking (139) tevens moet gelden

$$dH = \sum_j \left( \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_{q_j}} dp_{q_j} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt . \quad (141)$$

Door beide vergelijkingen in elkaar te schuiven vinden we de bewegingsvergelijkingen

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_{q_j}} \quad \text{en} \quad -\dot{p}_{q_j} + Q'_j = \frac{\partial H}{\partial q_j} . \quad (142)$$

Deze zogenaamde Hamilton-vergelijkingen zijn equivalent met de Lagrange-vergelijkingen die in hoofdstukken 1 en 2 zijn gebruikt. Het voordeel van de Hamiltoniaanformulering van de analytische mechanica zit in het verband tussen de Hamiltoniaan en de energie van een systeem, hetgeen deze formulering bijzonder geschikt maakt als startpunt voor o.a. de chaostheorie, statistische mechanica en kwantumtheorie.

Let wel: om de Hamilton-vergelijkingen correct te kunnen gebruiken is het noodzakelijk om de Hamiltoniaan als functie van de coördinaten en impulsen te schrijven. Hierbij mag nergens meer een snelheid voorkomen, d.w.z. vul in  $\dot{q}_j \stackrel{(18)}{=} \dot{q}_j(\{q_k\}, \{p_{q_k}\}, t)$ .

De Hamilton-vergelijkingen hebben de volgende eigenschappen:

- een formulering met  $N$  2<sup>e</sup>-orde Lagrange-vergelijkingen voor  $N$  onafhankelijke generaliseerde coördinaten  $q_j$  heeft hier dus plaatsgemaakt voor een alternatieve formulering met  $2N$  1<sup>e</sup>-orde Hamilton-vergelijkingen voor  $2N$  variabelen  $q_j$  en  $p_{q_j}$ . Het aantal begincondities om de beweging vast te leggen blijft zo dus netjes hetzelfde.

- als  $\partial H/\partial t = 0$  én als tevens geldt dat het systeem uitsluitend conservatieve krachten heeft die in de potentiaal zijn opgenomen ( $\Rightarrow \forall Q'_k = 0$ ), dan is de Hamiltoniaan behouden aangezien net als in § 1.6 geldt dat  $\frac{\partial L}{\partial t} \stackrel{(140),(141)}{=} -\partial H/\partial t = 0$ ;
- als de gegeneraliseerde coördinaat  $q_k$  niet in de Hamiltoniaan voorkomt én als tevens alle voor  $q_k$  relevante krachten in de potentiaal zijn opgenomen ( $\Rightarrow Q'_k = 0$ ), dan is  $p_{q_k}$  een behouden grootte aangezien  $\dot{p}_{q_k} \stackrel{(142)}{=} Q'_k - \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$ ;
- als de gegeneraliseerde impuls  $p_{q_k}$  niet in de Hamiltoniaan voorkomt, dan is  $q_k$  een behouden grootte aangezien  $\dot{q}_k \stackrel{(142)}{=} \frac{\partial H}{\partial p_{q_k}} = 0$ .

Onder bepaalde voorwaarden is de Hamiltoniaan de totale energie van het beschouwde systeem (zie opgave 7 van het werkcollege). Stel dat het verband tussen de gegeneraliseerde coördinaten  $\{q_j\}$  en een even grote Cartesische set coördinaten  $\{x_k\}$  wordt gegeven door  $x_k = x_k(\{q_j\}, t)$ . Dan geldt

$$\sum_j p_{q_j} \dot{q}_j \stackrel{(7)}{=} \sum_{j,k} p_{x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \dot{q}_j = \sum_k p_{x_k} \left( \dot{x}_k - \frac{\partial x_k}{\partial t} \right) \stackrel{(16)}{=} 2T - \sum_k p_{x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t},$$

aangezien de potentiële energie onafhankelijk is van de snelheden  $\dot{x}_k$ . Dit houdt in dat

$$H = 2T - \sum_k p_{x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t} - T + V = T + V - \sum_k p_{x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t}, \quad (143)$$

zodat  $H$  gelijk is aan de totale energie  $E = T + V$  van het systeem als  $\forall_k \frac{\partial x_k}{\partial t} = 0$ .

Elementair voorbeeld: beschouw een 1-dimensionale oscillator met

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 & \text{en} & & V &= \frac{1}{2} k x^2 & \Rightarrow & & L &= T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \\ \Rightarrow & & p_x & \stackrel{(18)}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m \dot{x} & \text{en} & & & m \ddot{x} & \stackrel{(19)}{=} -kx. \end{aligned}$$

De bijbehorende Hamiltoniaan en Hamilton-vergelijkingen worden dan

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 = T + V \stackrel{(142)}{\Rightarrow} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \quad \text{en} \quad -\dot{p}_x = \frac{\partial H}{\partial x} = kx.$$

Tevens geldt

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = E = \text{constant}.$$

Let wel: de 1<sup>e</sup>-orde vergelijkingen  $\dot{x} = p_x/m$  en  $\dot{p}_x = -kx$  zijn te combineren tot de 2<sup>e</sup>-orde Lagrange-vergelijking  $m\ddot{x} = -kx$ , zodat de Hamilton- en Lagrange-vergelijkingen fysisch equivalent zijn. Als we  $\dot{x}$  in de uitdrukking  $H = p_x \dot{x} - L$  hadden vergeten om te schrijven in termen van  $p_x$ , dan was deze bewegingsvergelijking verloren gegaan omdat  $\dot{x} = \partial H/\partial p_x = \dot{x}$  dan geen informatie meer had bevat.

### 3.1 Het Poissonhaakje

Beschouw een systeem met uitsluitend conservatieve krachten die in de potentiaal zijn opgenomen. De totale tijdsafgeleide van een dynamische grootte  $A(\{q_j\}, \{p_{q_j}\}, t)$  wordt dan

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_j \left( \frac{\partial A}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial A}{\partial p_{q_j}} \dot{p}_{q_j} \right) \stackrel{(142)}{=} \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_j \left( \frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_{q_j}} - \frac{\partial A}{\partial p_{q_j}} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \\ &\equiv \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}, \end{aligned} \quad (144)$$

waarbij  $\{A, H\} = -\{H, A\}$  het Poissonhaakje van  $A$  en  $H$  wordt genoemd. Als  $A$  nu niet expliciet van de tijd afhangt, zodat  $\partial A/\partial t = 0$ , dan geldt  $dA/dt = \{A, H\}$ . Als ook nog eens geldt dat  $A$  en  $H$  commuteren, d.w.z.  $\{A, H\} = 0$ , dan geldt  $dA/dt = 0$  en is  $A$  dus een behouden grootte.

Voorbeelden:

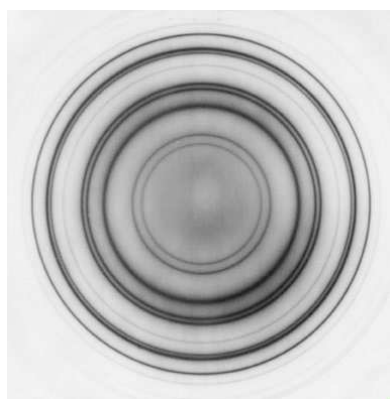
- $\{H, H\} = 0 \Rightarrow dH/dt = \partial H/\partial t$ , zodat  $H$  een behouden grootte is als het niet expliciet van de tijd afhangt;
- $\dot{p}_{q_k} \stackrel{(142)}{=} -\partial H/\partial q_k = \{p_{q_k}, H\} \Rightarrow$  als de gegeneraliseerde coördinaat  $q_k$  niet in de Hamiltoniaan voorkomt, dan is  $\{p_{q_k}, H\} = 0$  en is  $p_{q_k}$  een behouden grootte;
- $\dot{q}_k \stackrel{(142)}{=} \partial H/\partial p_{q_k} = \{q_k, H\} \Rightarrow$  als de gegeneraliseerde impuls  $p_{q_k}$  niet in de Hamiltoniaan voorkomt, dan is  $\{q_k, H\} = 0$  en is  $q_k$  een behouden grootte.

Deze schrijfwijze in termen van Poissonhaakjes is nauw verbonden met de kwantummechanica. In de kwantummechanica wordt (waar mogelijk) uitgegaan van de klassieke Hamiltoniaan, maar de coördinaten en impulsen worden vervangen door operatoren. Dit wordt het correspondentieprincipe genoemd.

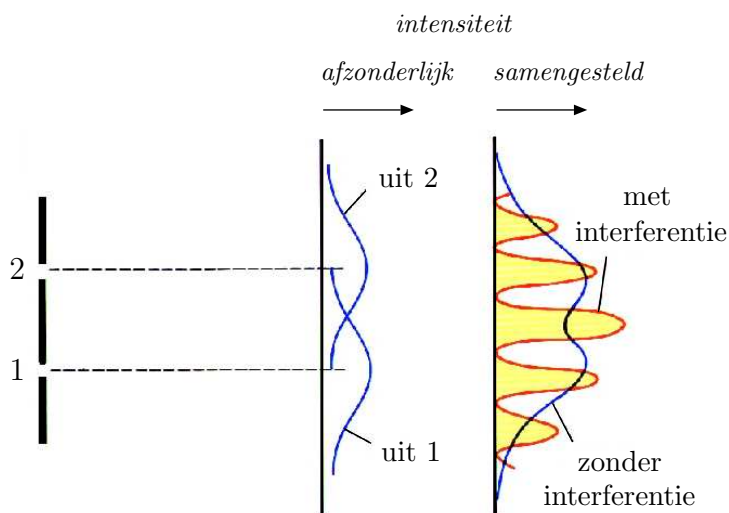
Het volgende verband blijkt te gelden tussen klassieke mechanica en kwantummechanica:

Klassieke mechanica	Kwantummechanica
Dynamische variabelen $u, v$	Operatoren $\hat{u}, \hat{v}$ ; $h = 2\pi\hbar = 6.62607 \times 10^{-34}$ Js = constante van Planck
Poissonhaakje: $\{u, v\}$	Commutator/ $(i\hbar)$ : $-\frac{i}{\hbar} [\hat{u}, \hat{v}] \equiv -\frac{i}{\hbar} (\hat{u}\hat{v} - \hat{v}\hat{u})$
$\{p_{q_k}, p_{q_j}\} = \{q_k, q_j\} = 0$	$[\hat{p}_{q_k}, \hat{p}_{q_j}] = [\hat{q}_k, \hat{q}_j] = 0$
$\{p_{q_k}, q_j\} = -\delta_{kj}$	$[\hat{p}_{q_k}, \hat{q}_j] = -i\hbar \delta_{kj}$
Bewegingsvergelijking voor $u$ :	Bewegingsvergelijking voor $\hat{u}$ :
$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \{u, H\}$	$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} [\hat{u}, \hat{H}]$ in het Heisenbergbeeld

Deze vertaaltabel van klassieke mechanica naar kwantummechanica is bijzonder handig om mee te werken, maar komt op dit moment nog uit de lucht vallen. Om bovenstaand verband te kunnen begrijpen zal het golfkarakter van de deeltjes en de daarmee samenhangende periodiciteit in rekening moeten worden gebracht. De noodzaak om aan deeltjes ook een golfkarakter toe te kennen werd in 1927 duidelijk tijdens verstrooiingsexperimenten waarbij bundels van deeltjes verstrooid werden aan kristallen/folies. Bij die experimenten werden namelijk net als bij röntgendiffractie aan kristallen ringvormige interferentiepatronen (diffractiepatronen) waargenomen (zie plaatje). Zo'n interferentiepatroon met een plaatsgebonden versterking/verzwakking van het signaal is een typisch golf fenomeen. Op basis van de verstrooiing van individuele klassieke puntdeeltjes wordt zo'n interferentiepatroon namelijk in het geheel niet verwacht. Het verschil tussen deeltjes- en golfkarakter is al zichtbaar in een 2-spleten experiment, waarbij een bundel deeltjes op een scherm met twee spleten valt. Achter het scherm wordt een interferentiepatroon waargenomen voor de intensiteit en niet slechts de som van de intensiteiten afkomstig van de afzonderlijke spleten (zie plaatje). Ook volgt uit de existentie van stabiele atomen automatisch dat atomaire elektronen geen klassieke puntdeeltjes kunnen zijn. Een klassiek elektron dat zich in een elliptische omloopbaan rond een atoomkern bevindt zal als versnelde lading onophoudelijk energie verliezen ten gevolge van de emissie van elektromagnetische straling (synchrotronstraling), simpelweg omdat alle energieën  $E < 0$  corresponderen met een legitieme gebonden toestand. Zoals ook uit atoomspectra is af te lezen, kunnen atomen slechts zeer bepaalde (discrete) energiewaarden  $E_1, E_2, \dots$  hebben, waarbij de laagste energie overeenkomt met de stabiele grondtoestand van het atoom. Aanverwante discrete energiespectra worden ook gevonden voor vibratie- en oscillatiebewegingen van moleculen en kristallen.



*Elektrondiffractie aan nikkelfolie:  
er wordt een ringpatroon gevonden*



*Het 2-spleten experiment:  
er wordt een interferentiepatroon gevonden*

### 3.2 Kanonieke transformaties en Hamilton–Jacobi vergelijking

Als eerste stap om bovenstaande golfaspecten in rekening te kunnen brengen, doen we eerst een poging om het oplossen van een mechanisch probleem zo direct mogelijk te maken. Hiertoe gaan we op zoek naar een nieuwe set van coördinaten en impulsen zodanig dat ze allemaal behouden zijn. Op grond van het variatieprincipe van Hamilton, dat in § 1.5 is behandeld, weten we dat er een keuzevrijheid is voor de Lagrangiaan van het systeem. Er kan namelijk altijd een totale tijdsafgeleide bij de Lagrangiaan worden opgeteld zonder dat de bewegingsvergelijkingen veranderen. Tevens mogen we de gegeneraliseerde coördinaten vrij kiezen, zodat ook via de combinatie  $\sum_j p_{q_j} \dot{q}_j$  de Hamiltoniaan is aan te passen. We gaan nu van deze keuzevrijheden gebruik maken om een Hamiltoniaan te vinden die de gewenste vorm heeft. Om de link met de kwantummechanica te leggen, waar randvoorwaarden limietsituaties representeren, beschouwen we van nu af aan uitsluitend systemen met conservatieve krachten die in de potentiaal zijn opgenomen.

Zoals gezegd gaan we werken met een nieuwe set gegeneraliseerde coördinaten  $\{\bar{q}_j\}$  én tevens een nieuwe Lagrangiaan  $L'(\{\bar{q}_j\}, \{\dot{\bar{q}}_j\}, t)$  die op de volgende wijze gerelateerd is aan de Lagrangiaan  $L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t)$ :

$$L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) - L'(\{\bar{q}_j\}, \{\dot{\bar{q}}_j\}, t) = \frac{dF}{dt}. \quad (145)$$

De bijbehorende Hamiltonianen zijn dan gerelateerd volgens

$$\sum_j p_{q_j} \dot{q}_j - H(\{q_j\}, \{p_{q_j}\}, t) - \sum_j \bar{p}_j \dot{\bar{q}}_j + H'(\{\bar{q}_j\}, \{\bar{p}_j\}, t) = \frac{dF}{dt}, \quad (146)$$

waarbij  $\bar{p}_j \equiv p_{\bar{q}_j}$ . Zo'n transformatie wordt een kanonieke transformatie genoemd en de functie  $F$  heet dan de genererende functie van de transformatie. Een kanonieke transformatie is op te vatten als een generalisatie van de in hoofdstuk 1 behandelde coördinaten-transformaties die de Lagrangiaan ongemoeid lieten.

Voor de genererende functie hebben we nu enige keuzevrijheid met betrekking tot de coördinaten en impulsen die als onafhankelijke variabelen gebruikt gaan worden. We kiezen

$$F \equiv S(\{q_j\}, \{\bar{p}_j\}, t) - \sum_j \bar{q}_j \bar{p}_j, \quad (147)$$

waarbij  $S$  bekend staat onder de naam “Hamilton’s principal function”. Door middel van deze Legendre-transformatie selecteren we dus  $q_j$ ,  $\bar{p}_j$  en  $t$  als onafhankelijke variabelen. Invullen van deze genererende functie in de vergelijking (146) levert namelijk

$$\begin{aligned} & \sum_j p_{q_j} dq_j - H(\{q_j\}, \{p_{q_j}\}, t) dt - \sum_j \bar{p}_j d\bar{q}_j + H'(\{\bar{q}_j\}, \{\bar{p}_j\}, t) dt \\ &= \sum_j \left( \frac{\partial S}{\partial q_j} dq_j - \bar{p}_j d\bar{q}_j + \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_j} d\bar{p}_j - \bar{q}_j d\bar{p}_j \right) + \frac{\partial S}{\partial t} dt, \end{aligned} \quad (148)$$

zodat de volgende set vergelijkingen moet gelden:

$$H'(\{\bar{q}_j\}, \{\bar{p}_j\}, t) = H(\{q_j\}, \{p_{q_j}\}, t) + \frac{\partial}{\partial t} S(\{q_j\}, \{\bar{p}_j\}, t),$$

$$p_{q_j} = \frac{\partial S}{\partial q_j} \quad \text{en} \quad \bar{q}_j = \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_j}. \quad (149)$$

Verder gelden zoals gebruikelijk de Hamilton-vergelijkingen voor de twee afzonderlijke Hamiltonianen:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_{q_j}}, \quad \dot{p}_{q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad \text{en} \quad \dot{\bar{q}}_j = \frac{\partial H'}{\partial \bar{p}_j}, \quad \dot{\bar{p}}_j = -\frac{\partial H'}{\partial \bar{q}_j}. \quad (150)$$

Tenslotte gaan we het bewegingsprobleem maximaal vereenvoudigen door de algemene functie  $S$  slim te kiezen, namelijk zodanig dat  $H'(\{\bar{q}_j\}, \{\bar{p}_j\}, t) = 0$ . In dat geval geldt op grond van de Hamilton-vergelijkingen (150) dat zowel de nieuwe coördinaten  $\bar{q}_j$  als de nieuwe impulsen  $\bar{p}_j$  behouden zijn. Deze bewegingsconstanten zijn dan volledig vastgelegd door de beginvoorwaarden van de beweging. De existentie van zo'n transformatie kan aan-nemelijk worden gemaakt als we ons realiseren dat de oplossing van het bewegingsprobleem te schrijven is als functie van de beginvoorwaarden op het tijdstip  $t = t_0$ . Als we weten dat  $\{q_j(t = t_0)\} \equiv \{q_{j,0}\}$  voor de coördinaten en  $\{p_j(t = t_0)\} \equiv \{p_{j,0}\}$  voor de impulsen, dan wordt de beweging gegeven door  $q_k = q_k(\{q_{j,0}\}, \{p_{j,0}\}, t)$  en  $p_k = p_k(\{q_{j,0}\}, \{p_{j,0}\}, t)$ . Het oplossen van het bewegingsprobleem komt zo dus neer op het vinden van de oplossing  $S$  van de zogenaamde Hamilton–Jacobi vergelijking

$$0 \stackrel{(149)}{=} H(\{q_j\}, \{\frac{\partial S}{\partial q_j}\}, t) + \frac{\partial}{\partial t} S(\{q_j\}, \{\bar{p}_j\}, t), \quad (151)$$

waarbij de impulsen  $\bar{p}_j$  in  $S$  dus constant zijn in de tijd.

Opmerking: de functie  $S$  die voldoet aan de Hamilton–Jacobi vergelijking is nauw ver-bonden met de actie die in § 1.5 werd geïntroduceerd, immers

$$\frac{dS}{dt} = \sum_j \left( \frac{\partial S}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_j} \dot{\bar{p}}_j \right) + \frac{\partial S}{\partial t} \stackrel{(149),(151)}{=} \sum_j (p_{q_j} \dot{q}_j + \bar{q}_j \dot{\bar{p}}_j) - H \stackrel{(139), \dot{\bar{p}}_j=0}{=} L$$

$$\Rightarrow S(t_1) - S(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} dt L.$$

Let wel: de integraal  $\int dt L$  kan pas echt uitgerekend worden als de bewegingsoplossing  $q_j(t)$  expliciet bekend is, d.w.z. als het bewegingsprobleem is opgelost met behulp van bijvoorbeeld vergelijking (151).

Rekenvoorbeeld: beschouw wederom de 1-dimensionale oscillator. Zoals op pagina 49 is aangetoond heeft de Hamiltoniaan dan de vorm

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 \equiv E \xrightarrow{(149),(151)} \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = E = - \frac{\partial S}{\partial t} .$$

De totale energie  $E \geq 0$  is een behouden grootte en is dus een logische kandidaat voor de constante nieuwe impuls  $\bar{p}$ . Dit kan worden gerealiseerd door te schrijven

$$S(x, \bar{p}, t) = W(x, \bar{p}) - \bar{p}t \Rightarrow -E = -H \xrightarrow{(151)} \frac{\partial S}{\partial t} = -\bar{p} .$$

Omdat de functie  $W$  onafhankelijk is van  $t$  wordt de variabele  $t$  separabel genoemd. Verder moet gelden

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + mkx^2 \right] = E \xrightarrow{\text{kies}} W(x, E) = \int dx \sqrt{2mE - mkx^2} ,$$

waarbij de gekozen oplossing voor  $W$  is gegeven in termen van een onbepaalde integraal (primitieve functie) die slechts op een constante na bepaald is. Uit deze oplossing voor  $W$  halen we tenslotte de gezochte oplossing voor het bewegingsprobleem:

$$\begin{aligned} \bar{q} \xrightarrow{(149)} \frac{\partial S}{\partial E} &= \frac{\partial W}{\partial E} - t = \sqrt{\frac{m}{k}} \int \frac{dx}{\sqrt{2E/k - x^2}} - t \\ &= \sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin(x \sqrt{k/2E}) - t \equiv \tau = \text{constant} \\ \Rightarrow x(t) &= \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin([t + \tau] \sqrt{k/m}) . \end{aligned}$$

Het feit dat  $W$  met een constante verschoven mag worden en zelfs een ander teken mag hebben leidt slechts tot een verschuiving in de constante tijdsparameter  $\tau$ . Deze tijdsparameter  $\tau$  wordt net als de constante energie  $E$  vastgelegd door de beginvoorwaarden van de beweging. We zien hier trouwens iets wat in de kwantummechanica nog expliciet terug gaat komen, namelijk dat  $(\bar{q}, \bar{p}) = (\tau, E)$  geconjugeerde variabelen zijn net zoals plaats en impuls. Dit legt dus een verband tussen tijd enerzijds en energie anderzijds.

Uit dit rekenvoorbeeld lezen we af wat een handige strategie kan zijn voor het gebruik van de Hamilton–Jacobi vergelijking. Als je van een bepaald systeem evenveel behouden dynamische grootheden kent als dat er vrijheidsgraden zijn, dan is het handig om deze behouden grootheden te gebruiken als onafhankelijke impulsen. In opgave 21 van het werkcollege wordt deze strategie gebruikt voor een puntdeeltje dat in het  $xy$ -vlak beweegt onder invloed van een centrale potentiaal. Dit systeem heeft zowel twee vrijheidsgraden als twee simpele behouden grootheden, namelijk de totale energie en het impulsmoment in de  $z$ -richting. Deze behouden grootheden worden vervolgens gebruikt als onafhankelijke impulsen in de Hamilton–Jacobi vergelijking, hetgeen tot een verrassend simpele bepaling van de elliptische (periodieke) Kepler-banen zal leiden.



### 3.3 De oude kwantumtheorie

Als eerste poging om de link met de kwantummechanica te leggen gaan we nu kijken naar systemen met een tijdsonafhankelijke Hamiltoniaan  $H = E$  en met periodieke bewegingen als mogelijke oplossingen. Zulke bewegingen bestaan uit oscillatiebewegingen en/of rotatiebewegingen. In het eerste geval vindt de beweging plaats tussen twee nulpunten van de kinetische energie en doorlopen de coördinaten en impulsen een gesloten traject in de faseruimte opgespannen door deze coördinaten en impulsen. Denk hierbij aan een slinger die vanuit een gegeven beginstand wordt losgelaten. In het tweede geval kan de coördinaat onbeperkt toenemen, zoals de hoekvariabele bij een rotatie, maar de bijbehorende impuls is dan een periodieke functie in deze coördinaat. In beide gevallen wordt de beweging gekarakteriseerd door de frequentie waarmee deze beweging zich herhaalt. Voor de link met de kwantummechanica zijn dit soort bewegingen van groot belang in verband met de energiediscretisatie die moet gaan optreden voor gebonden periodieke systemen zoals atomen. We zijn daarbij niet zozeer geïnteresseerd in de beweging zelf, maar meer in de behouden periodiciteitseigenschappen waarvan de energie zal afhangen.

Met behulp van de Hamilton–Jacobi vergelijking gaan we nu een methode ontwikkelen om de behouden eigenschappen van periodieke bewegingen te bepalen zonder daarvoor het bewegingsprobleem volledig op te moeten lossen. Gegeven dat  $\partial H/\partial t = 0$  heeft de Hamilton–Jacobi vergelijking de volgende vorm:

$$0 \stackrel{(151)}{=} H(\{q_j\}, \{\frac{\partial S}{\partial q_j}\}) + \frac{\partial}{\partial t} S(\{q_j\}, \{\bar{p}_j\}, t) . \quad (152)$$

Zoals we in het rekenvoorbeeld op de vorige pagina hebben gezien is het tamelijk eenvoudig om de totale energie  $E$  van het systeem te selecteren als één van de behouden impulsen. Schrijf hiertoe

$$S(\{q_j\}, \{\bar{p}_j\}, t) \equiv W(\{q_j\}, \{\bar{p}_j\}) - \bar{p}_1 t , \quad (153)$$

dan geldt inderdaad

$$H(\{q_j\}, \{\frac{\partial S}{\partial q_j}\}) \stackrel{(152)}{=} \bar{p}_1 = E = \text{constante totale energie van het systeem} . \quad (154)$$

De genererende functie  $W$  wordt de karacteristieke functie van Hamilton genoemd.

Neem nu voor het gemak even aan dat het systeem één vrijheidsgraad heeft en dus effectief 1-dimensionaal is. Dan geldt  $W(q, \bar{p}) = W(q, E)$  en  $H(q, \partial W/\partial q) = E$ . Voer vervolgens de actieve variabele  $J$  in volgens

$$J = \oint dq p_q(q, E) = \oint dq \frac{\partial W}{\partial q}(q, E) = J(E) = \text{constant} \geq 0 , \quad (155)$$

waarbij de integratie precies één volledige omloop van de oscillatie/rotatiebeweging beslaat. Deze actieve variabele heeft dus de dimensie van een impulsmoment. Dat het ook niet-negatief

is volgt uit

$$J = \oint dq p_q = \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt \dot{q} p_q \stackrel{H=E}{=} 2 \int_{t_0}^{t_0+\tau} dt T \geq 0 ,$$

met  $\tau$  de periode van de omloop. Een direct gevolg van vergelijking (155) is nu dat

$$H = E(J) \quad \text{en} \quad W = W(q, E(J)) . \quad (156)$$

Rekenvoorbeeld: bekijk wederom de 1-dimensionale oscillator. Daarvoor geldt dat

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 \equiv E = \text{constant} \\ \Rightarrow \frac{p_x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} &= 1 , \quad \text{met} \quad a = \sqrt{2mE} \quad \text{en} \quad b = \sqrt{\frac{2E}{k}} . \end{aligned}$$

Dit is inderdaad een periodieke beweging, beschreven door een ellips in de faseruimte. De relevante actievariabele wordt dan

$$\begin{aligned} J &\equiv \oint dx p_x = \text{oppervlakte van de ellips} = \pi ab = 2\pi E \sqrt{\frac{m}{k}} \\ \Rightarrow E(J) &= \frac{J}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = J\nu , \end{aligned}$$

met  $\nu$  de karakteristieke frequentie van de oscillator.

Kwantisatiecondities: bovenstaand (1-dimensionaal) procédé laat zich onder bepaalde voorwaarden uitbreiden naar meerdere  $(q_j, p_{q_j})$  paren als die maar allemaal periodiek zijn en  $H = E(\{J_j\})$ . In de begindagen van het ontstaan van de kwantummechanica hebben juist deze actievariabelen een belangrijke rol gespeeld bij het formuleren van de discretisatiecondities voor de energie van gebonden periodieke systemen. Klassiek gezien heeft  $J_j$  een continu bereik, maar in een poging om een link te leggen met de kwantummechanica werd gepostuleerd dat het waardenbereik discreet zou moeten zijn, namelijk

$$J_j = \oint dq_j p_{q_j} = n_j h \quad (n_j = 0, 1, 2, \dots) \quad (157)$$

in termen van de zogenaamde kwantumgetallen  $n_j$ . De actievariabelen zijn zo dus gekwantiseerd in veelvouden van het zeer kleine werkingskwantum  $h = 6.62607 \times 10^{-34}$  Js (constante van Planck). Dit gepostuleerde kwantisatievoorschrift staat bekend als de “oude kwantumtheorie” (Sommerfeld & Wilson, 1915). Het is op te vatten als een soort staande-golf conditie voor de periodieke beweging, in de zin dat de beweging een geheel-talig aantal golflengten  $h/p_{q_j}$  moet beslaan. Op die manier is de energiediscretisatie gekoppeld aan een expliciet golfaspect, zodat beide niet-klassieke fenomenen in deze voorloper van de kwantumtheorie aanwezig zijn.

Kwantisatie voor oscillatoren: voor de 1-dimensionale oscillator geldt op grond van de berekening op pagina 56 dat  $E(J) = J\nu \stackrel{(157)}{=} nh\nu$ , met  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Een overgang tussen twee oscillatormodes met  $n = n_1$  en  $n = n_2$  gaat zo dus gepaard met een energieverandering  $(n_2 - n_1)h\nu$ , zodat er sprake is van een vast energiekwantum  $h\nu$ . Dit is in overeenstemming met de experimenteel waargenomen spectra van oscillatorsystemen.

Bohr-Sommerfeld atoommodel voor waterstof: de relatieve beweging van een 2-deeltjes-systeem bestaande uit een elektron met lading  $-|e|$  en een proton met lading  $+|e|$  wordt beschreven door een Hamiltoniaan van de volgende vorm:

$$H = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2} - \frac{C}{r} \quad \left( C = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}, \text{ met } \epsilon_0 \text{ de permittiviteit van het vacuüm} \right).$$

De relatieve coördinaat  $\vec{r}$  is hier op de gebruikelijke manier geschreven in termen van poolcoördinaten in het bewegingsvlak. Verder staat  $\mu$  voor de gereduceerde massa van het 2-deeltjessysteem. In opgave 21 van het werkcollege zijn de klassieke periodieke Keplerbanen van dit systeem bepaald. Nu gaan we echter de periodiciteit van de Keplerbanen vertalen naar een tweetal kwantisatiecondities.

1) Kwantisatieconditie voor de rotatiebeweging behorende bij de coördinaat  $\varphi$ :

$$J_\varphi = \oint d\varphi p_\varphi \stackrel{p_\varphi \text{ constant}}{=} 2\pi |p_\varphi| \stackrel{(157)}{=} \ell h \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots).$$

Dit houdt dus in dat het impulsmoment  $L \equiv |\vec{L}| \stackrel{\text{opg. 2}}{=} |p_\varphi| = \ell h / (2\pi) \equiv \ell \hbar$  hier expliciet gekwantiseerd is.

2) Kwantisatieconditie voor de oscillatiebeweging behorende bij de coördinaat  $r$ :

$$J_r = \oint dr p_r = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \sqrt{2\mu(E + C/r) - p_\varphi^2/r^2} = kh \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

met  $r_{\min}$  en  $r_{\max}$  de oplossingen van de vergelijking  $p_r = 0$  voor een verdwijnende radiële kinetische energieterm. Na wat rekenwerk volgt dat

$$J_r = 2\pi \sqrt{\frac{\mu C^2}{-2E}} - 2\pi |p_\varphi| = kh \stackrel{2\pi |p_\varphi| = \ell h}{\rightarrow} \frac{2\pi^2 \mu C^2}{-E} = (k + \ell)^2 h^2.$$

Voer nu het zogenaamde hoofdkwantumgetal  $n \equiv k + \ell$  in. Dan geldt

$$E_n = -\frac{2\pi^2 \mu C^2}{n^2 h^2} = -\frac{\mu C^2}{2n^2 \hbar^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

voor de bindingsenergie van de toegestane (gekwantiseerde) atoombanen. Deze atoombanen zijn ellipsbanen met excentriciteit  $\varepsilon_n = \sqrt{1 + 2E_n p_\varphi^2 / (\mu C^2)} = \sqrt{1 - (\ell/n)^2}$ . Afgezien van de grondtoestand voor  $n = 0$  klopt dit energiespectrum met het experiment.

De “oude kwantumtheorie” benadert dus de werkelijkheid, maar kan niet alle experimentele data verklaren. Met name de interferentiefenomenen blijven op deze manier onbegrepen!

### 3.4 De Schrödinger-vergelijking

Om de uiteindelijke link met de kwantummechanica te leggen zal het golfkarakter van de deeltjes in rekening moeten worden gebracht. In 1923 postuleerde de Broglie dat er sprake moest zijn van een deeltjes–golf dualiteit, hetgeen een verband legt tussen vrije deeltjes met energie  $E$  en impuls  $\vec{p}$  en vlakke golven  $\exp(2\pi i[\vec{p}\cdot\vec{r}-Et]/h) \equiv \exp(i[\vec{p}\cdot\vec{r}-Et]/\hbar)$ . De waargenomen diffractiepatronen bij verstrooiing van deeltjes aan kristallen/folies ondersteunen dit verband tussen vrije impuls  $\vec{p}$  enerzijds en de de Broglie-golflengte  $\lambda = h/|\vec{p}|$  anderzijds. Op basis hiervan gaan we nu proberen een golfvergelijking te distilleren uit de Hamilton–Jacobi vergelijking, zodanig dat er oplossingen  $\propto \exp(i[\vec{p}\cdot\vec{r}-Et]/\hbar)$  gaan optreden voor vrije deeltjes. Tevens moeten de energieën van gebonden periodieke systemen op de juiste manier gekwantiseerd zijn.

Beschouw een 3-dimensionaal systeem met

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) = E = \text{constant} . \quad (158)$$

De Hamilton–Jacobi vergelijking wordt dan

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = E = H(\vec{r}, \vec{p} = \vec{\nabla}S) = \frac{(\vec{\nabla}S)^2}{2m} + V(\vec{r}) , \quad (159)$$

met

$$S \equiv S(\vec{r}, E, \bar{p}_2, \bar{p}_3, t) \stackrel{(153)}{=} W(\vec{r}, E, \bar{p}_2, \bar{p}_3) - Et . \quad (160)$$

Voer vervolgens de functie

$$\psi(\vec{r}, t) \equiv \exp(S/K) \stackrel{(160)}{=} \exp(-Et/K) \exp(W(\vec{r}, E, \bar{p}_2, \bar{p}_3)/K) \quad (161)$$

in, waarbij de constante  $K$  de dimensie van actie heeft. Voor deze functie geldt

$$K \frac{\partial \psi}{\partial t} = -E\psi \quad , \quad K \vec{\nabla} \psi = \psi \vec{\nabla} S \quad \text{en} \quad K^2 \vec{\nabla}^2 \psi = \psi \left[ K \vec{\nabla}^2 S + (\vec{\nabla}S)^2 \right] . \quad (162)$$

De Hamilton–Jacobi vergelijking (159) gaat dan over in de vergelijking

$$-K \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi = \psi \left( \frac{(\vec{\nabla}S)^2}{2m} + V(\vec{r}) \right) \stackrel{(162)}{=} \left( \frac{K^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}) \right) \psi - \frac{K}{2m} \psi \vec{\nabla}^2 S . \quad (163)$$

Ten gevolge van de term  $\propto \vec{\nabla}^2 S$  is dit in feite nog geen golfvergelijking. Een willekeurige lineaire superpositie (lineaire combinatie) van oplossingen van deze vergelijking is namelijk niet automatisch ook een oplossing, hetgeen voor een legitieme golfvergelijking wel noodzakelijk is aangezien golven aanleiding geven tot interferentie en dus samenstelbaar moeten zijn (superpositieprincipe). Dit probleem zullen we nu gaan oplossen.

Theoretische input: vlakke-golf oplossingen voor vrije deeltjes.

Beschouw een vrij deeltje met impuls  $\vec{p}$ , zodat  $E = \vec{p}^2/(2m)$  en  $V(\vec{r}) = 0$ . In dat geval is  $\vec{p}$  behouden en geldt dus dat  $\vec{\nabla} \cdot \vec{p} \stackrel{(149)}{=} \vec{\nabla}^2 S = 0$ . Vergelijking (163) heeft dan inderdaad vlakke-golf oplossingen  $\propto \exp(i[\vec{p} \cdot \vec{r} - Et]/\hbar)$  mits

$$K \equiv \frac{\hbar}{i} = -i\hbar. \quad (164)$$

Experimentele input: de klassieke limiet.

Tenslotte leggen we de eis op dat een systeem zich klassiek moet gaan gedragen als de eindige kwantummechanische golflengte  $\lambda = h/|\vec{p}|$  geen rol van betekenis speelt:

$$\text{klassieke mechanica} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\text{kwantummechanica}). \quad (165)$$

Dit houdt bijvoorbeeld in dat zware objecten zoals biljartballen als klassiek te beschouwen zijn, omdat  $\lambda$  dan zeer klein is. Voor een bal met massa  $m = 0.2 \text{ kg}$  en snelheid  $v = 1 \text{ m/s}$  is de bijbehorende de Broglie-golflengte  $\lambda = h/(mv) = 3.3 \times 10^{-33} \text{ m}$ . Op basis hiervan kunnen we het probleem met de ongewenste  $\vec{\nabla}^2 S$ -term oplossen. Omdat

$$\frac{|K \vec{\nabla}^2 S|}{|\vec{\nabla} S|^2} \stackrel{(149),(164)}{=} \frac{\hbar |\vec{\nabla} \cdot \vec{p}|}{\vec{p}^2} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{|\vec{\nabla} \cdot \vec{p}|}{|\vec{p}|}$$

heeft de term  $\propto \vec{\nabla}^2 S$  in vergelijking (163) een verwaarloosbare invloed als de kwantummechanische golflengte  $\lambda = h/|\vec{p}|$  van het deeltje zo klein is dat de impuls slechts met een verwaarloosbare fractie verandert over een afstand  $\lambda$ . In de klassieke limiet is er dus geen verschil tussen vergelijking (163) met of zonder de term  $\propto \vec{\nabla}^2 S$ , zodat de Hamilton–Jacobi vergelijking klassiek equivalent is met de volgende golfvergelijking:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}, t) = E \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t). \quad (166)$$

Dit is de zogenaamde Schrödinger-vergelijking voor een geïsoleerd systeem weergegeven in de plaatsrepresentatie. De Hamiltoniaan  $H(\vec{r}, \vec{p})$  is hierbij dus overgegaan in een Hamilton-operator

$$\hat{H} = H(\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}) \stackrel{\text{plaatsrepr.}}{=} H(\vec{r}, -i\hbar \vec{\nabla}) \quad (167)$$

die werkt op de golf functie

$$\psi(\vec{r}, t) \equiv \psi(\vec{r}) \exp(-iEt/\hbar). \quad (168)$$

In tegenstelling tot de klassieke Hamilton–Jacobi vergelijking (163) geeft de eigenwaardenvergelijking  $\hat{H} \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$  aanleiding tot de vereiste kwantisatie van de energieën van gebonden periodieke systemen. In de colleges *Kwantummechanica 1a+b* zal het volgende worden bewezen:

- Kwantisatie voor oscillatoren: de Hamilton-operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2} k \hat{x}^2 \quad \text{plaatsrepr.} \quad - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} k x^2$$

heeft energie-eigenwaarden  $E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \sqrt{k/m} = (n + \frac{1}{2}) h \nu$ , met  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Dit leidt tot exact dezelfde (experimenteel ondersteunde) energiever verschillen als in de oude kwantumtheorie, maar dan wel met een zogenaamde nulpuntsenergie  $E_0 = \frac{1}{2} h \nu$  die ongelijk is aan nul!

- Kwantisatie voor het Kepler-probleem: de Hamilton-operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + V(\hat{r}) \quad \text{plaatsrepr.} \quad - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 - \frac{C}{r}$$

heeft gebonden energie-eigenwaarden  $E_n = -\frac{1}{2} \mu C^2 / (\hbar^2 n^2) < 0$ , met  $n = 1, 2, \dots$ . Dit is hetzelfde spectrum als verkregen met de oude kwantumtheorie, maar dan wel met  $n \neq 0$  zodat er sprake is van een stabiele grondtoestand met eindige laagste energie  $E_1 = -\frac{1}{2} \mu C^2 / \hbar^2$ .

Dus ook de kwantisatie-aspecten van de kwantumtheorie zijn correct ingebouwd in bovenstaande golfvergelijking.

In de kwantummechanica gaat men derhalve uit van de Schrödinger-vergelijking (166) als gepostuleerde extensie van de klassieke Hamilton–Jacobi vergelijking. Hoe de oplossingen van deze Schrödinger-vergelijking precies kwantummechanisch geïnterpreteerd moeten worden zal tijdens de kwantummechanicacolleges uit de doeken worden gedaan.

Opmerking: definieer de zogenaamde commutator  $[\hat{p}_{x_j}, \hat{x}_k] \equiv \hat{p}_{x_j} \hat{x}_k - \hat{x}_k \hat{p}_{x_j}$ . Dan geldt voor een testfunctie  $\psi$ :

$$[\hat{p}_{x_j}, \hat{x}_k] \psi \quad \text{plaatsrepr.} \quad - i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} (x_k \psi) + i\hbar x_k \frac{\partial}{\partial x_j} \psi = -i\hbar \psi \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = -i\hbar \delta_{jk} \psi,$$

geheel in overeenstemming met het op pagina 50 geschetste verband met de Poissonhaakjes.