

Extra oefenopgave bij het college

Kwantummechanica 3

Extra oefenopgave 2: Ruimtelijke inversie (pariteit) en de Dirac-vergelijking

Beschouw de Dirac-vergelijking voor vrije spin-1/2 deeltjes. De transformatiekenarakteristiek van de Dirac-spinoren onder ruimtelijke inversie wordt gegeven door

$$\psi'(x') = S(\Lambda_P)\psi(x) ,$$

waarbij $S(\Lambda_P)$ de unitaire transformatiematrix is behorende bij de Lorentz-transformatie

$$(\Lambda_P)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \emptyset \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ \emptyset & & & -1 \end{pmatrix} .$$

(i) Laat zien dat uit het relativiteitsprincipe volgt dat

$$[S(\Lambda_P), \gamma^0] = \{S(\Lambda_P), \gamma^1\} = \{S(\Lambda_P), \gamma^2\} = \{S(\Lambda_P), \gamma^3\} = 0 .$$

(ii) Leid hieruit af dat voor de unitaire transformatiematrix $S(\Lambda_P)$ moet gelden dat

$$S(\Lambda_P) = \exp(i\varphi_P)\gamma^0 \quad (\varphi_P \in \mathbb{R}) .$$

Hint: ontbind $S(\Lambda_P)$ ten opzichte van de basismatrices (303). Bekijk vervolgens of de afzonderlijke basismatrices aan de voorwaarden uit onderdeel (i) voldoen: als aan één van de voorwaarden niet is voldaan, dan is de bij deze basismatrix behorende ontbindingscoëfficiënt van $S(\Lambda_P)$ automatisch nul. Dit laatste volgt uit het feit dat de basismatrices bij vermenigvuldiging met γ^ρ ($\rho = 0, 1, 2, 3$) één-op-één overgaan in een specifieke permutatie van de basismatrices.

(iii) Beschouw de stationaire vlakke-golf oplossingen van de vrije Dirac-vergelijking in het ruststelsel (zie collegedictaat). Hoe transformeren deze oplossingen onder pariteit? Maak hierbij een onderscheid tussen de oplossingen met energie $-mc^2$ en $+mc^2$.