Opgaven bij het college Kwantummechanica 2
Week 11

Opgave 18: Tijdsafhankelijke breedte van een oneindige potentiaalput!!!

Een deeltje met massa m bevindt zich in de grondtoestand van een 1-dimensionale oneindige potentiaalput met breedte L, gekarakteriseerd door de potentiaal

$$V(x) \;=\; \begin{cases} 0 & 0 < x < L \\ \infty & x < 0 \;\vee\; x > L \end{cases} \; .$$

De energie-eigenfuncties worden in de plaatsrepresentatie gegeven door

$$\psi_n(x) \;=\; \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin(n\pi x/L) & 0 < x < L \\ 0 & x \leq 0 \;\vee\; x \geq L \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \cdots) \; ,$$

met bijbehorende energie-eigenwaarden

$$E_n \;=\; \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}\, n^2 \; .$$

We gaan voor dit systeem de volgende twee tijdsafhankelijke scenario's bekijken.

Scenario 1: een abrupte verandering in de breedte van de oneindige potentiaalput.

Op het tijdstip $t = 0$ wordt de potentiaalput in een zeer korte tijdspanne $\tau > 0$ twee keer zo breed gemaakt ($L \to 2L$). We willen nu uitzoeken wat de waarschijnlijkheid is om het deeltje op tijdstip $t > \tau$ in één van de stationaire toestanden van de grotere potentiaalput te vinden. Hiervoor gebruiken we de sudden approximation.

(i) Wat moet in dit geval ruwweg voor τ gelden om de sudden approximation te mogen gebruiken?

(ii) Schets de absolute waarde van de toestandsfunctie $|\psi(x,t)|$ vlak vóór de abrupte verandering (d.w.z. op $t = 0$) en vlak na de abrupte verandering (d.w.z. op $t = \tau$).

(iii) Toon aan dat er bij benadering een 50% waarschijnlijkheid is om het deeltje in de stationaire eindtoestand met $n = 2$ te vinden, oftewel $P_{21}^{\text{sud}} = 0.5$.

(iv) Bepaal vervolgens de waarschijnlijkheden $P^{\rm sud}_{n\neq 2,1}$ voor de overgangen naar de stationaire eindtoestanden met $n \neq 2$.

Hint: gebruik de integraalidentiteit $\int\limits_0^\pi {\rm d}z \, \sin(z)\sin(nz/2) \; = \; -\,4\,\dfrac{\sin(n\pi/2)}{n^2-4}$.

(v) Beredeneer dat de energieverwachtingswaarden van het beschouwde systeem vóór en na de abrupte verandering precies hetzelfde zijn.

Scenario 2: een langzame verandering in de breedte van de oneindige potentiaalput.

Vanaf tijdstip $t = 0$ wordt in een tijdspanne T de potentiaalput geleidelijk twee keer zo breed gemaakt, d.w.z. $L \to L(t) = (1 + t/T\,)\,L$ voor $t \in [0, T]$. Gebruik de adiabatische stelling om de volgende vragen te beantwoorden.

(vi) – Wat moet in dit geval ruwweg gelden voor de expansietijd T van de potentiaalput om de adiabatische stelling te mogen gebruiken?

– Herformuleer deze toepasbaarheidsconditie ook in termen van de expansiesnelheid L/T van de potentiaalput versus de karakteristieke snelheid van een deeltje in de grondtoestand van de potentiaalput.

(vii) Hoeveel energie raakt het deeltje kwijt tijdens de expansie van de potentiaalput?

(viii) Waar is deze energie naar toe gegaan?

(ix) Bepaal de toestandsfunctie van het deeltje in de plaatsrepresentatie op het tijdstip $t = T$, hetgeen het moment aangeeft waarop de potentiaalput twee keer zo breed is geworden. Je hoeft de fasefactorintegralen niet expliciet uit te werken. Beargumenteer wel of de dynamische en geometrische fasefactoren een bijdrage zullen leveren aan de toestandsfunctie of niet.

(x) Schets de absolute waarde van de toestandsfunctie $|\psi(x,t)|$ vlak vóór de langzame verandering (d.w.z. op $t = 0$) en vlak na de langzame verandering (d.w.z. op $t = T$).