Opgaven bij het college Kwantummechanica 2
Week 12

Opgave 19: **Een spin-1/2 deeltje in een magnetisch veld (deel 1)!!!**

Beschouw de 2-dimensionale spinruimte van een spin-1/2 deeltje dat onder invloed staat van een homogeen uitwendig magnetisch veld $\vec{\mathcal{B}}(t)$. Neem aan dat de Hamilton-operator van dit systeem de volgende vorm heeft:

$$\hat{H}^{\,\mathrm{spin}}(t) \;=\; \frac{2\gamma}{\hbar}\,\vec{\mathcal{B}}(t)\cdot\hat{\vec{S}} \;=\; \gamma\begin{pmatrix} \mathcal{B}_z(t) & \mathcal{B}_x(t) - i\mathcal{B}_y(t) \\ \mathcal{B}_x(t) + i\mathcal{B}_y(t) & -\mathcal{B}_z(t) \end{pmatrix} \qquad (\gamma \in \mathbb{R})\ ,$$

waarbij is gebruikt dat de spinoperator van het beschouwde spin-1/2 deeltje is uit te drukken in termen van de Pauli-spinmatrices volgens $\hat{\vec{S}} = \hbar\vec{\sigma}/2$.

Situatie A: het magneetveld hangt niet expliciet van de tijd af en heeft de vorm

$$\vec{\mathcal{B}} \;=\; \mathcal{B}\Big[\sin(\theta)\cos(\phi)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\sin(\phi)\,\vec{e}_y + \cos(\theta)\,\vec{e}_z\Big] \;\equiv\; \vec{\mathcal{B}}(\theta,\phi)\ .$$

De bijbehorende energie-eigenwaarden en energie-eigenvectoren worden dan gegeven door

$$\hat{H}^{\,\mathrm{spin}}|\chi_{\uparrow}(\theta,\phi)\rangle \;=\; +\gamma\mathcal{B}\,|\chi_{\uparrow}(\theta,\phi)\rangle \qquad \text{met} \qquad |\chi_{\uparrow}(\theta,\phi)\rangle \;=\; \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)\exp(i\phi) \end{pmatrix}$$

voor spinkwantisatie parallel aan het magneetveld, en

$$\hat{H}^{\,\mathrm{spin}}|\chi_{\downarrow}(\theta,\phi)\rangle \;=\; -\gamma\mathcal{B}\,|\chi_{\downarrow}(\theta,\phi)\rangle \qquad \text{met} \qquad |\chi_{\downarrow}(\theta,\phi)\rangle \;=\; \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2)\exp(i\phi) \end{pmatrix}$$

voor spinkwantisatie antiparallel aan het magneetveld.

(i) Laat dit zien voor de eigenvector $|\chi_{\uparrow}(\theta,\phi)\rangle$.
Hint: gebruik dat $\sin(\theta) = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ en $\cos(\theta) = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)$.

(ii) Neem aan dat $\phi = 0$ en dat het systeem op $t = 0$ wordt beschreven door de toestandsvector $|\chi_A(t=0)\rangle = |\chi_{\uparrow}(\theta,\phi=0)\rangle$. Bepaal dan $|\chi_A(t)\rangle$ voor $t > 0$.

Situatie B: het magneetveld roteert zeer langzaam rond de z-as volgens

$$\vec{\mathcal{B}}(t) \;=\; \mathcal{B}\left[\sin(\theta)\cos\bigl(\phi(t)\bigr)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\sin\bigl(\phi(t)\bigr)\,\vec{e}_y + \cos(\theta)\,\vec{e}_z\right] \;\equiv\; \vec{\mathcal{B}}\bigl(\theta,\phi(t)\bigr)\ ,$$

met $\phi(t) = 2\pi t/T$ en $T \gg h/|2\gamma\mathcal{B}|$.

(iii) Welke parameters zijn cyclisch in deze situatie?

(iv) Bepaal de instantane energie-eigenwaarden en bijbehorende instantane eigenvectoren.

(v) Neem weer aan dat het systeem op $t = 0$ wordt beschreven door de toestandsvector

$$|\chi_{B}(t=0)\rangle \;=\; |\chi_{\uparrow}(\theta,\phi(t=0))\rangle \;=\; |\chi_{\uparrow}(\theta,\phi=0)\rangle\ .$$

Gebruik vervolgens de adiabatische stelling.

- Waarom kan hier de adiabatische stelling worden gebruikt? Probeer in je antwoord ook de natuurlijke periode voor spinprecessie rond het magneetveld te betrekken die in opgave 9 is behandeld.
- Toon aan dat op het tijdstip $t = T$ dan geldt dat

$$|\chi_{B}(t=T)\rangle \;=\; \exp\bigl(-i\pi\,[1-\cos\theta]\bigr)\,|\chi_{A}(t=T)\rangle\ ,$$

  waarbij $|\chi_{A}(t)\rangle$ de toestandsvector is uit situatie A.

  Hint: gebruik waar nodig $\phi(t) = 2\pi t/T$ als integratievariabele.
- Hoe wordt de fase $-\pi\,[1-\cos\theta]$ genoemd?

(vi) Dubbel tellend onderdeel: bedenk een experiment waarmee je het expliciete faseverschil tussen de twee toestandsvectoren $|\chi_{A}(t=T)\rangle$ en $|\chi_{B}(t=T)\rangle$ zou kunnen waarnemen. Geef hierbij schematisch aan hoe de experimentele opstelling er zou moeten uitzien. Dit onderdeel mag in groepsverband worden uitgevoerd.