Opgaven bij het college Kwantummechanica 3
Week 12

Opgave 24: **Dirac-vergelijking: kennismaking met de bijbehorende matrices**

In de Dirac-vergelijking komen de matrices β en α^j $(j = 1, 2, 3)$ voor. Deze matrices moeten voldoen aan de matrixrelaties

$$\beta^2 = I \quad , \quad \beta = \beta^\dagger \quad , \quad \left\{\alpha^j, \beta\right\} = 0 \quad , \quad \left\{\alpha^j, \alpha^k\right\} = 2\delta^{jk} I \qquad \text{en} \qquad \alpha^j = (\alpha^j)^\dagger \ ,$$

waarbij het symbool I generiek de eenheidsmatrix aangeeft in de desbetreffende ruimte.

(i) Laat zien dat hieraan voldaan wordt door de volgende set van 4×4 matrices in de spinorruimte:

$$\beta = \begin{pmatrix} I & \emptyset \\ \emptyset & -I \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad \alpha^j = \begin{pmatrix} \emptyset & \sigma^j \\ \sigma^j & \emptyset \end{pmatrix} \qquad (j = 1, 2, 3) \ ,$$

waarbij elke 4×4 matrix is opgebouwd uit vier 2×2 subblokken.

Hint: gebruik waar nodig de eigenschappen van de Pauli-spinmatrices σ^j die in appendix B van het dictaat zijn gegeven.

(ii) Voer nu de γ-matrices $\gamma^0 \equiv \beta$ en $\vec{\gamma} \equiv \beta\vec{\alpha}$ in. Bewijs met behulp van de matrixrelaties voor β en $\vec{\alpha}$ dat

$$\left\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\right\} = 2g^{\mu\nu} I \qquad \text{en} \qquad (\gamma^\mu)^\dagger = \begin{cases} \gamma^0 & \text{als } \mu = 0 \\ -\gamma^j & \text{als } \mu = j \end{cases} \qquad (j = 1, 2, 3) \ .$$

(iii) Leid hieruit af dat

$$(\gamma^0)^2 = I \qquad \text{en} \qquad (\gamma^j)^2 = -I \qquad (j = 1, 2, 3) \ ,$$

alsmede

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \qquad \text{en} \qquad \mathrm{Tr}(\gamma^\mu) = 0 \ .$$

(iv) Om bij het werken in de spinorruimte de uitdrukkingen zo compact mogelijk te houden wordt de zogenaamde "slash"-notatie van Feynman ingevoerd:

$$\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu = \gamma_\mu a^\mu \ ,$$

waarbij a^μ een willekeurige 4-vector is. Bewijs met behulp van onderdeel (ii) dat het volgende geldt:

$$\not{a}^2 = a^2 I \ .$$

(v) Probeer aan de hand hiervan een operator te vinden die toegepast op de Dirac-operator $(i\hbar\not{\partial} - mc)$ de Klein−Gordon operator $(\Box + m^2c^2/\hbar^2)$ oplevert.

Opgave 25: **Lorentz-transformaties in de vrije Dirac-theorie**

Bepaling van de infinitesimale vorm van de spinor-transformatiematrix $S(\Lambda)$

Beschouw de Dirac-vergelijking voor vrije spin-1/2 deeltjes. In de bijbehorende spinorruimte wordt een infinitesimale Lorentz-transformatie $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} \approx g^{\mu}{}_{\nu} + \delta\omega^{\mu}{}_{\nu}$ gekarakteriseerd door de transformatiematrix

$$S(\Lambda) \;\approx\; I + s(\delta\omega)\ .$$

Zoals in het collegedictaat is afgeleid moet $s(\delta\omega)$ hierbij voldoen aan de condities

$$\left[\gamma^{\rho}, s(\delta\omega)\right] \;=\; \delta\omega^{\rho}{}_{\nu}\gamma^{\nu} \qquad (\rho = 0,1,2,3)\ , \tag{1}$$

$$s(-\delta\omega) \;=\; -\,s(\delta\omega)\ . \tag{2}$$

Om de precieze vorm voor de 4×4 matrix $s(\delta\omega)$ te vinden gaan we uit van de ontbinding

$$s(\delta\omega) \;\equiv\; cI \,+\, c_{\mu}\gamma^{\mu} \,+\, c_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \,+\, \bar{c}_{\mu}\gamma^{\mu}\gamma^{5} \,+\, \bar{c}\gamma^{5}$$

in termen van de basis (303) van 4×4 matrices, waarbij de coëfficiënten $c, c_{\mu}, c_{\mu\nu}, \bar{c}_{\mu}$ en $\bar{c}$ complexe getallen zijn.

(i) Leid uit de definiërende relatie $\left\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right\} = 2g^{\mu\nu}I$ voor de γ-matrices van Dirac af dat

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} \;=\; \begin{cases} -\,\gamma^{\nu}\gamma^{\mu} & \text{als } \mu \neq \nu \\ \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} \;=\; g^{\mu\nu}I & \text{als } \mu = \nu \end{cases} ,$$

$$\gamma^{\mu}\gamma^{5} \;=\; -\,\gamma^{5}\gamma^{\mu} \qquad \text{voor} \qquad \gamma^{5} \;\equiv\; i\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}$$

en

$$\sigma^{\mu\nu} \;\equiv\; \frac{i}{2}\left[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right] \;=\; \begin{cases} i\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} & \text{als } \mu \neq \nu \\ 0 & \text{als } \mu = \nu \end{cases} .$$

(ii) Laat met behulp hiervan zien dat uit conditie (1) voor $\rho = 0$ volgt dat

$$c_{k} \;=\; \bar{c}_{0} \;=\; \bar{c} \;=\; 0 \qquad \text{en} \qquad c_{0k} \;=\; -\,i\,\delta\omega_{0k}/4 \qquad (k = 1,2,3)\ .$$

Let wel: de coëfficiënten $c_{\mu\nu}$ zijn antisymmetrisch onder verwisseling van de indices, net zoals de infinitesimale tensor $\delta\omega_{\mu\nu}$.

(iii) Laat vervolgens zien dat conditie (1) voor $\rho = j = 1,2,3$ leidt tot een verdere reductie van de mogelijke matrixstructuren:

$$c_{0} \;=\; \bar{c}_{j} \;=\; 0 \qquad \text{en} \qquad c_{jk} \;=\; -\,i\,\delta\omega_{jk}/4 \qquad (j,k = 1,2,3)\ .$$

(iv) Gebruik tenslotte conditie (2) om de term proportioneel met de eenheidsmatrix te elimineren.