Opgaven bij het college Kwantummechanica 2
Week 13

Opgave 20: **Een spin-1/2 deeltje in een magnetisch veld (deel 2)!!!**

Beschouw de 2-dimensionale spinruimte van een spin-1/2 deeltje dat onder invloed staat van een homogeen uitwendig magnetisch veld

$$\vec{\mathcal{B}}(t) \;=\; \begin{cases} \mathcal{B}\,\vec{e}_z & \text{als} \quad t \leq 0 \\ \mathcal{B}'\sin(\omega t)\,\vec{e}_x \,+\, \mathcal{B}\,\vec{e}_z & \text{als} \quad t > 0 \end{cases} \qquad (\mathcal{B},\mathcal{B}' \in \mathbb{R})\ ,$$

waarbij ω een positieve reële constante is en $|\mathcal{B}'| \ll |\mathcal{B}|$, zodat de oscillerende term hier als storing is op te vatten. De Hamilton-operator van dit systeem heeft de volgende vorm:

$$\hat{H}^{\,\text{spin}}(t) \;=\; \frac{2\gamma}{\hbar}\,\vec{\mathcal{B}}(t)\cdot\hat{\vec{S}} \;=\; \gamma \begin{pmatrix} \mathcal{B}_z(t) & \mathcal{B}_x(t) - i\mathcal{B}_y(t) \\ \mathcal{B}_x(t) + i\mathcal{B}_y(t) & -\mathcal{B}_z(t) \end{pmatrix} \qquad (\gamma \in \mathbb{R})\ ,$$

waarbij is gebruikt dat de spinoperator van het beschouwde spin-1/2 deeltje is uit te drukken in termen van de Pauli-spinmatrices volgens $\hat{\vec{S}} = \hbar\vec{\sigma}/2$.

(i) Op $t = 0$ bevindt het systeem zich in de ongestoorde begintoestand $|\chi_\uparrow\rangle = \binom{1}{0}$. Laat dan zien dat op <u>eerste-orde in storingstheorie</u> de waarschijnlijkheid om het systeem op het tijdstip $t > 0$ in de andere ongestoorde eigentoestand $|\chi_\downarrow\rangle = \binom{0}{1}$ te vinden wordt gegeven door

$$P^{(1)}_{\downarrow\uparrow}(t) \;=\; \frac{\gamma^2\mathcal{B}'^2}{4\hbar^2}\left|\,\frac{\exp\big(i\,[\omega - 2\gamma\mathcal{B}/\hbar]\,t\big) - 1}{\omega - 2\gamma\mathcal{B}/\hbar} \;+\; \frac{\exp\big(-i\,[\omega + 2\gamma\mathcal{B}/\hbar]\,t\big) - 1}{\omega + 2\gamma\mathcal{B}/\hbar}\,\right|^2 .$$

Hint: toon eerst aan dat het voor storingstheorie relevante matrixelement wordt gegeven door $V_{\downarrow\uparrow}(t) = \gamma\mathcal{B}'\sin(\omega t)$.

(ii) – Bepaal hoe de energieverwachtingswaarde van het systeem verandert voor $t > 0$.
– Voor welke waarde van $\omega > 0$ wordt de verandering na verloop van tijd het grootst?
– Door welk kwantummechanisch fenomeen wordt dit veroorzaakt?

(iii) <u>Uitdaging</u>: waarom is storingstheorie in dat geval slechts gedurende eindige tijden betrouwbaar en wat gebeurt er daarna met de overgangswaarschijnlijkheid?

Het hier beschreven scenario staat aan de basis van de NMR/MRI-technologie, die met name in de medische wereld veelvuldig wordt gebruikt.

Opgave 21: **Een adiabatisch aangeschakelde constante interactie**

Beschouw een systeem dat onder invloed staat van een adiabatisch aangeschakelde constante interactie. De bijbehorende tijdsafhankelijke Hamilton-operator wordt gegeven door

$$\hat{H}(t) \;=\; \hat{H}_0 + \hat{V}(t) \;=\; \hat{H}_0 + \hat{V}\exp\bigl(-\lambda|t|\bigr) \qquad (\lambda > 0)\ ,$$

waarbij de schakeltijd $\tau = 1/\lambda$ veel groter is dan alle andere tijdschalen in het probleem. In de asymptotische limiet $t \to -\infty$ zit het beschouwde systeem in de begintoestand $|\psi_a^{(0)}\rangle$ die voldoet aan $\hat{H}_0\,|\psi_a^{(0)}\rangle = E_a^{(0)}\,|\psi_a^{(0)}\rangle$.

(i) Wat geldt er voor de tijdsafhankelijke potentiaal $\hat{V}(t)$

- voor eindige tijden $|t| \ll \tau$;
- in de asymptotische limieten $t \to \pm\infty$?

Alternatieve afleiding van Fermi's Gouden Regel: neem aan dat $\hat{V}$ een zwakke storing is.

(ii) Laat zien dat voor eindige tijden $t < 0$ en op eerste-orde in storingstheorie het volgende geldt voor de overgangswaarschijnlijkheid naar een ongestoorde eindtoestand $|\psi_{b\neq a}^{(0)}\rangle$ bij de ongestoorde energie $E_b^{(0)}$:

$$P_{ba}^{(1)}(t) \;=\; \frac{|V_{ba}|^2}{\hbar^2}\,\frac{\exp(2\lambda t)}{\lambda^2 + \omega_{ba}^2}\ .$$

(iii) Leid af dat dit voor een oneindig lange schakeltijd equivalent is met Fermi's Gouden Regel voor energiebehoudende overgangen naar het continuüm onder invloed van een constante storing die lang aanstaat:

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,P_{ba}^{(1)}(t) \;=\; \frac{2\pi}{\hbar}\,|V_{ba}|^2\,\delta(E_b^{(0)} - E_a^{(0)}) \;=\; \mathrm{w}_{ba}^{(1)}\ .$$

Gebruik hierbij één van de δ-functie identiteiten uit App. A.2.1.

Exponentieel verval van de begintoestand: laat $\Gamma_a/\hbar$ de constante totale overgangswaarschijnlijkheid per tijdseenheid zijn om vanuit de ongestoorde begintoestand $|\psi_a^{(0)}\rangle$ naar alle mogelijke ongestoorde eindtoestanden $|\psi_{b\neq a}^{(0)}\rangle$ te gaan.

(iv) Leg uit dat Γ_a minimaal tweede orde is in de zwakke storing $\hat{V}$.

(v) Stel het systeem zit op tijdstip t_1 in de begintoestand.

- Bepaal de waarschijnlijkheid dat het systeem op tijdstip $t_1 + \Delta t$ nog steeds in de begintoestand zit als Δt infinitesimaal wordt genomen.
- Leid hieruit af dat de waarschijnlijkheid dat het systeem op tijdstip $t_2 > t_1$ nog steeds in de begintoestand zit wordt gegeven door

$$P_{aa}(t_2, t_1) \;=\; \exp\bigl(-(t_2 - t_1)\,\Gamma_a/\hbar\bigr)\ .$$