Opgaven bij het college Kwantummechanica 3
Week 13

Opgave 26: **Rotaties in de spinorruimte**

Dirac-spinoperator = generator van rotaties in de spinorruimte

Beschouw de Dirac-vergelijking voor vrije spin-1/2 deeltjes. Voer vervolgens een ruimtelijke rotatie uit over een infinitesimale hoek $\delta\alpha$ rond een as georiënteerd langs de eenheidsrichting $\vec{e}_n$. Onder deze infinitesimale rotatie transformeren de ruimtelijke componenten van de plaatsvector x^μ overeenkomstig

$$\vec{x} \quad \rightarrow \quad \vec{x}\,' \;=\; \vec{x} + \delta\alpha\,(\vec{e}_n \times \vec{x}) \;.$$

(i) Herschrijf deze infinitesimale transformatie in de vorm $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu \approx x^\mu + \delta\omega^\mu{}_\nu\, x^\nu$ en laat zien dat

$$\delta\omega^\mu{}_\nu \;=\; \begin{cases} 0 & \text{als } \mu = 0 \,\vee\, \nu = 0 \\ -\,\delta\alpha \displaystyle\sum_{l=1}^{3} \epsilon^{jkl}\, e_n^l & \text{als } \mu = j \,\wedge\, \nu = k \end{cases} \qquad (j\,,k = 1,2,3)\;,$$

met behulp van de volledig antisymmetrische coëfficiënt ϵ^{jkl} die is gedefinieerd in vergelijking (294) van het dictaat.

Hint: je mag hierbij gebruiken dat $(\vec{e}_n \times \vec{x})^j \;=\; \sum_{k,l=1}^{3} \epsilon^{jlk}\, e_n^l\, x^k$.

(ii) Leid hieruit af dat de bijbehorende infinitesimale transformatiekarakteristiek van de Dirac-spinoren in de Dirac-representatie wordt gegeven door

$$\psi'(x') \;=\; \Big(I - \frac{i}{\hbar}\,\delta\alpha \sum_{l=1}^{3} e_n^l\, \hat{S}^l \Big)\, \psi(x)\;, \qquad \text{met} \quad \hat{S}^l \;=\; \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma^l & \emptyset \\ \emptyset & \sigma^l \end{pmatrix}.$$

Hint: gebruik vergelijkingen (311) en (304) uit het dictaat, alsmede $\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon^{jkl}\epsilon^{jkl'} = 2\delta^{ll'}$.

(iii) De transformatiekarakteristiek voor rotaties over een eindige hoek α wordt dan

$$\psi'(x') \;=\; \exp\!\big(-i\alpha\,\vec{e}_n \cdot \hat{\vec{S}}/\hbar\big)\, \psi(x)\;.$$

Neem de rotatiehoek tenslotte gelijk aan $\alpha = 2\pi$ en laat zien dat de spinor-transformatiematrix $S(\Lambda)$ dan gelijk is aan $-\,I$. (Komt dit resultaat je bekend voor?)

Hint: expandeer de e-macht met behulp van de identiteit $(\vec{\sigma}\cdot\vec{e}_n)^2 = I$ en gebruik

$$\cos(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, z^{2k}/(2k)! \quad , \quad \sin(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, z^{2k+1}/(2k+1)!\;.$$

Opgave 27: **Commensurabele observabelen in de vrije Dirac-theorie**

Vrije Dirac-deeltjes zijn te beschrijven m.b.v. energie, impuls en heliciteit

Beschouw de Dirac-theorie voor vrije spin-1/2 deeltjes, met Hamilton-operator

$$\hat{H} \;=\; c\vec{\alpha}\cdot\hat{\vec{p}} \,+\, \beta mc^2 \;.$$

De spinoperator $\hat{\vec{S}}$ voor Dirac-spinoren voldoet aan de commutatierelaties

$$\big[\beta,\hat{S}^j\big] \;=\; 0 \qquad \text{en} \qquad \big[\alpha^k,\hat{S}^j\big] \;=\; i\hbar\sum_{n=1}^{3}\epsilon^{kjn}\,\alpha^n \qquad (j\,,k=1,2,3)\;,$$

met ϵ^{kjn} gedefinieerd als in vergelijking (294) van het dictaat.
Laat dan zien dat $\hat{H}\,,\,\hat{\vec{p}}$ en $\hat{\vec{p}}\cdot\hat{\vec{S}}$ commensurabele operatoren zijn.

Opgave 28: **Ladingsconjugatie en de Dirac-vergelijking**

De verborgen beschrijving van tegengestelde lading in de Dirac-theorie

Beschouw de Dirac-vergelijking voor spin-1/2 deeltjes met lading q en rustmassa m onder invloed van een klassiek elektromagnetisch veld:

$$\big(i\hbar\not{\partial} - mc - q\not{A}(x)\big)\,\psi(x) \;=\; 0\;, \tag{1}$$

waarbij $A^\mu(x)$ de reële elektromagnetische 4-vectorpotentiaal is. Gebruik vervolgens dat in de Dirac-representatie geldt dat

$$(\gamma^\mu)^* \;=\; \begin{cases} \gamma^\mu & \text{als}\;\; \mu = 0,1,3 \\ -\,\gamma^\mu & \text{als}\;\; \mu = 2 \end{cases} \qquad \text{en dus} \qquad \gamma^2(\gamma^\mu)^* \;=\; -\,\gamma^\mu\gamma^2$$

om de volgende vragen te beantwoorden.

(i) Laat zien dat de ladingsgeconjugeerde Dirac-spinor $\psi_{_C}(x) \equiv \gamma^2\psi^*(x)$ voldoet aan de ladingsgeïnverteerde vergelijking

$$\big(i\hbar\not{\partial} - mc + q\not{A}(x)\big)\,\psi_{_C}(x) \;=\; 0\;.$$

Let wel: $\psi^*(x)$ houdt complexe conjugatie in en niet hermitische conjugatie.

(ii) Wat gebeurt er met $\psi(x)$ als er twee keer ladingsconjugatie wordt toegepast?

(iii) Neem aan dat het elektromagnetisch veld statisch is, d.w.z. $A^\mu(x) = A^\mu(\vec{r}\,)$, en dat

$$\psi^{(-E)}(x) \;=\; \exp(iEt/\hbar)\begin{pmatrix}\psi_1(\vec{r}\,)\\ \psi_2(\vec{r}\,)\\ \psi_3(\vec{r}\,)\\ \psi_4(\vec{r}\,)\end{pmatrix} \;\equiv\; \exp(iEt/\hbar)\begin{pmatrix}\psi_{_U}(\vec{r}\,)\\ \psi_{_D}(\vec{r}\,)\end{pmatrix}$$

een stationaire oplossing van vergelijking (1) is met negatieve energie $-E$.

– Wat gebeurt er met de energie van deze oplossing onder ladingsconjugatie?

– Wat doet ladingsconjugatie met de 2-dimensionale componenten $\psi_{_U}$ en $\psi_{_D}$?

– Beredeneer dat in de Dirac-theorie de verwachtingswaarde van de spinoperator $\hat{\vec{S}}$ van teken omklapt bij de overgang van $\psi^{(-E)}(x)$ naar $\psi_{_C}^{(-E)}(x)$.
  Hint: gebruik dat $\sigma^2\sigma^k\sigma^2 = -(\sigma^k)^*$ voor $k = 1, 2, 3$.

Uit een negatieve-energietoestand kan dus door middel van ladingsconjugatie een positieve-energietoestand worden geconstrueerd met tegengestelde lading en tegengestelde spinverwachtingswaarde.