Opgaven bij het college Kwantummechanica 2
Week 14

<u>Opgave 22</u>: Kwantumflux en behoud van waarschijnlijkheidsdichtheid

Beschouw de volgende Schrödinger-vergelijking in de plaatsrepresentatie

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\,\psi(\vec{r},t) \;=\; \Big[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\,\vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}\,)\Big]\,\psi(\vec{r},t)\;, \qquad \text{met} \qquad V(\vec{r}\,) \in \mathbb{R}\;.$$

(i) Leid hieruit de volgende continuïteitsvergelijking af:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\rho(\vec{r},t) \;+\; \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) \;=\; 0\;,$$

waarbij de waarschijnlijkheidsdichtheid $\rho(\vec{r},t)$ en waarschijnlijkheidsstroomdichtheid (kwantumflux) $\vec{j}(\vec{r},t)$ worden gegeven door

$$\rho(\vec{r},t) \;=\; |\psi(\vec{r},t)|^2 \qquad \text{en} \qquad \vec{j}(\vec{r},t) \;=\; \mathrm{Re}\Big[\,\psi^*(\vec{r},t)\,\frac{(-i\hbar\vec{\nabla})}{\mu}\,\psi(\vec{r},t)\,\Big]\;.$$

(ii) Toon aan dat de kwantumflux die door een eenheidsoppervlak loodrecht op $\vec{r}$ gaat kan worden geschreven als

$$j_r(\vec{r},t) \;\equiv\; \frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) \;=\; \mathrm{Re}\Big[\,\psi^*(\vec{r},t)\,\frac{(-i\hbar)}{\mu}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\big(r\,\psi(\vec{r},t)\big)\,\Big]\;.$$

Hint: gebruik de voor gradiënten geldende identiteit $\dfrac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{\nabla} \;=\; \vec{e}_r\cdot\vec{\nabla} \;=\; \dfrac{\partial}{\partial r}$.

(iii) Laat tenslotte aan de hand van de continuïteitsvergelijking zien dat behoud van waarschijnlijkheidsdichtheid, d.w.z. $\partial\rho/\partial t = 0$, aanleiding geeft tot de vergelijking

$$\int\limits_{S(W)} \mathrm{d}\vec{s}\cdot\vec{j} \;=\; 0\;,$$

met $S(W)$ het oppervlak dat een willekeurig volume W omsluit en $\mathrm{d}\vec{s}$ het naar buiten gerichte oppervlakte-element (d.w.z. $\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}s\,\vec{e}_n$, waarbij $\mathrm{d}s$ het oppervlakte-element is en $\vec{e}_n$ de naar buiten gerichte normaalvector loodrecht op het oppervlak).

Kwantumfluxen spelen een cruciale rol bij de beschrijving van verstrooiings-experimenten in termen van constante inkomende/verstrooide deeltjesstromen gedurende de interactiefase ("steady-flow phase") van het verstrooiingsproces.

In het zwaartepuntssysteem van de botsing is een elastisch verstrooiingsexperiment te beschrijven aan de hand van de verstrooiing van "deeltjes" met gereduceerde massa μ aan een vast krachtcentrum in de oorsprong, hetgeen samenvalt met het zwaartepunt van de botsing. De coördinaat van zo'n "deeltje" ten opzichte van de oorsprong is dan simpelweg de relatieve coördinaat van de feitelijk botsende deeltjes.

(iv) Voor de asymptotisch vrije begintoestand van het verstrooiingsexperiment nemen we een monochromatische vlakke golf $\phi_{\vec{k}}(\vec{r},t) = \exp(ikz)\exp(-iEt/\hbar)$ in de z-richting, waarbij $\vec{p} = \hbar k\vec{e}_z$ de relatieve impuls van de botsende deeltjes is en E de totale botsingsenergie. Bepaal de bijbehorende kwantumflux F in de z-richting, hetgeen te interpreteren is als de <u>flux van inkomende bundeldeeltjes</u>.

(v) De asymptotisch vrije eindtoestand van het verstrooiingsexperiment zal een radiële strooigolf $\psi_{\rm sc}(\vec{r},t) = \psi_{\rm sc}(r,\theta,\phi,t) = f(k,\theta,\phi)\exp(ikr)\exp(-iEt/\hbar)/r$ bevatten, waarbij de coëfficiënt $f(k,\theta,\phi)$ de amplitude is voor verstrooiing in de (θ,ϕ)-richting (weergegeven in bolcoördinaten). Bepaal voor deze radiële strooigolf de kwantumflux die door een eenheidsoppervlak loodrecht op $\vec{r}$ gaat, hetgeen te interpreteren is als de <u>verstrooiingsflux</u>.

(vi) Beschouw vervolgens een detector die op een afstand r van de oorsprong het ruimtehoekelement $\mathrm{d}\Omega$ rond de (θ,ϕ)-richting bestrijkt. Hoeveel deeltjes zal deze detector dan per seconde registreren op basis van de verstrooiingsflux die in onderdeel (v) is afgeleid?