Opgaven bij het college Kwantummechanica 3
Week 14

Opgave 29: **De elektromagnetische golfvergelijking: relativiteitsprincipe en spin**

Beschouw de vrije elektromagnetische golfvergelijking

$$\Box A^\mu(x) - \partial^\mu \big(\partial_\nu A^\nu(x)\big) \;=\; 0 \;,$$

waarbij $A^\mu(x)$ de reële elektromagnetische 4-vectorpotentiaal is. De transformatiekarakteristiek van deze 4-vectorpotentiaal onder Lorentz-transformaties wordt als volgt gedefinieerd (zie de algemene aanpak op p. 115 van het collegedictaat):

$$A'^{\,\mu}(x') \;\equiv\; G^\mu{}_\nu(\Lambda)\, A^\nu(x) \;,$$

waarbij de reële inverteerbare tensor $G^\mu{}_\nu(\Lambda)$ aangeeft hoe de Lorentz-transformaties werken op de 4-dimensionale ruimte van intrinsieke vrijheidsgraden opgespannen door de componenten van de 4-vectorpotentiaal.

(i) Laat zien dat aan het relativiteitsprincipe is voldaan als $G^\mu{}_\nu(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu$, zodat de 4-vectorpotentiaal transformeert als een contravariant vectorveld.

Opmerking: een tweede mogelijke oplossing is dat $G^\mu{}_\nu(\Lambda) = \det(\Lambda)\,\Lambda^\mu{}_\nu$. Zo'n type 4-vectorpotentiaal wordt een pseudovectorveld of axiaal vectorveld genoemd.

(ii) Voer een ruimtelijke rotatie uit over een infinitesimale hoek $\delta\alpha$ rond een as georiënteerd langs de eenheidsrichting $\vec{e}_n$. In opgave 26 van het werkcollege is aangetoond dat de ruimtelijke componenten van de plaatsvector x^μ als volgt transformeren onder deze infinitesimale rotatie:

$$x'^{\,\mu} \;=\; x^\mu + \delta\omega^\mu{}_\nu\, x^\nu \quad , \quad \delta\omega^\mu{}_\nu \;=\; \begin{cases} 0 & \text{als } \mu = 0 \,\vee\, \nu = 0 \\ -\,\delta\alpha \displaystyle\sum_{l=1}^{3} \epsilon^{jkl}\, e_n^l & \text{als } \mu = j \,\wedge\, \nu = k \end{cases}$$

met $j,k = 1,2,3$ en ϵ^{jkl} gedefinieerd als in vergelijking (294) van het dictaat.
Leid hieruit af dat de transformatiekarakteristiek van $A^\mu(x)$ onder infinitesimale rotaties wordt gegeven door

$$A'^{\,\mu}(x') \;=\; \begin{cases} A^0(x) & \text{voor } \mu = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \Big(I - \frac{i}{\hbar}\,\delta\alpha\, \vec{e}_n \cdot \hat{\vec{S}} \Big)^{jk} A^k(x) & \text{voor } \mu = j = 1,2,3 \end{cases} ,$$

waarbij $\big(\hat{S}^l\big)^{jk} \;\equiv\; -\,i\hbar\,\epsilon^{ljk}$ als $3{\times}3$ matrix werkt op de vectorpotentiaal $\vec{A}(x)$.

(iii) Gebruik tenslotte de identiteit $\displaystyle\sum_{l,k=1}^{3} \epsilon^{lkj}\,\epsilon^{lkj'} \;=\; 2\delta^{jj'}$ om te bewijzen dat $A^\mu(x)$ kwantummechanisch gezien te maken heeft met de beschrijving van spin-1 deeltjes.

Opgave 30: **Gekwantiseerd elektromagnetisch veld in een afgesloten ruimte**
Tweede kwantisatie en de rol van het energiespectrum

Beschouw een gekwantiseerd elektromagnetisch veld in een afgesloten ruimte (kubus) met volume V en periodieke randvoorwaarden. De bijbehorende gekwantiseerde vectorpotentiaal wordt gegeven door

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r},t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda=1}^{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}\, \vec{u}_{\vec{k},\lambda}(\vec{r}\,) \Big[\hat{a}_{\vec{k},\lambda}(t) \;+\; \eta_\lambda\, \hat{a}^{\dagger}_{-\vec{k},\lambda}(t) \Big]$$

en de gekwantiseerde versies van de elektrische en magnetische velden volgen uit de gebruikelijke relaties

$$\hat{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{r},t) \;=\; -\frac{\partial}{\partial t}\hat{\vec{A}}(\vec{r},t) \qquad \text{en} \qquad \hat{\vec{\mathcal{B}}}(\vec{r},t) \;=\; \vec{\nabla}\times\hat{\vec{A}}(\vec{r},t)\ .$$

De definities van de verschillende grootheden zijn in het collegedictaat gegeven.

(i) Leid met behulp van appendix E van het dictaat de volgende operatoridentiteit af voor de totale Hamilton-operator van het gekwantiseerde elektromagnetische veld:

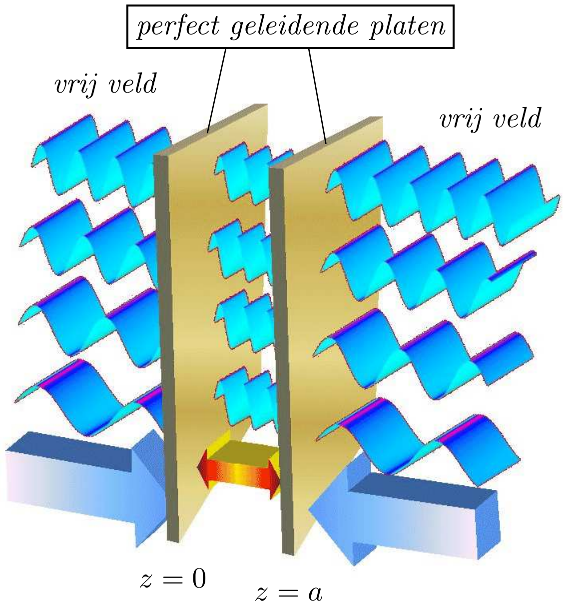
$$\begin{aligned} \hat{H} \;&\equiv\; \frac{\epsilon_0}{2}\int\limits_V \mathrm{d}\vec{r}\, \Big[\hat{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{r},t)\cdot\hat{\vec{\mathcal{E}}}^{\,\dagger}(\vec{r},t) + c^2\,\hat{\vec{\mathcal{B}}}(\vec{r},t)\cdot\hat{\vec{\mathcal{B}}}^{\,\dagger}(\vec{r},t) \Big] \\ &=\; \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda=1}^{2} \frac{1}{2}\,\hbar\omega_k \Big[\hat{a}_{\vec{k},\lambda}(t)\,\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}(t) + \hat{a}^{\dagger}_{-\vec{k},\lambda}(t)\,\hat{a}_{-\vec{k},\lambda}(t) \Big]\ . \end{aligned}$$

(ii) Laat zien dat deze Hamilton-operator een van onderen begrensd spectrum heeft als de operatoren $\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}(t)$ en $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}(t)$ voldoen aan de bosonische commutatierelaties

$$\big[\hat{a}_{\vec{k},\lambda}(t), \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}',\lambda'}(t)\big] \;=\; \delta_{\lambda,\lambda'}\,\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\,\hat{1}\ .$$

Bekijk alvast de volgende interessante toepassingsopgave, die je niet hoeft in te leveren en die tijdens het interactieve laatste werkcollege zal worden besproken

Opgave 31: **Het Casimir-effect (geïdealiseerde configuratie)**
Een observabele manifestatie van vacuümenergie



Beschouw een gekwantiseerd elektromagnetisch veld tussen twee parallelle, perfect geleidende platen. De platen liggen op een afstand a van elkaar en hebben elk een oppervlak S. Kies nu een coördinatenstelsel waarbij de z-as loodrecht op de platen staat en wel zodanig dat de posities van de platen worden gegeven door $z = 0$ en $z = a$. Vectoren evenwijdig aan de platen worden met de subscript "$\parallel$" weergegeven, bijvoorbeeld $\vec{r}_\parallel$ voor de coördinaten en $\vec{k}_\parallel$ voor de golfvectoren. Neem verder aan dat het oppervlak S groot genoeg is om de continuümlimiet te mogen gebruiken voor de kwantisatie van het elektromagnetisch veld evenwijdig aan de platen, d.w.z. voor $\vec{k}_\parallel$. Zoals bekend uit de klassieke elektrodynamica moet het volgende gelden voor de $\vec{\mathcal{E}}$- en $\vec{\mathcal{B}}$-velden in verband met de perfecte geleiding:

$$\vec{\mathcal{E}}_\parallel(\vec{r}_\parallel, z=0, t) \;=\; \vec{\mathcal{E}}_\parallel(\vec{r}_\parallel, z=a, t) \;=\; \vec{0} \qquad \text{en} \qquad \mathcal{B}_z(\vec{r}_\parallel, z=0, t) \;=\; \mathcal{B}_z(\vec{r}_\parallel, z=a, t) \;=\; 0\ .$$

(i) Ga nu werken in de Coulomb-ijk. Laat zien dat uit de randvoorwaarden

$$\vec{A}_\parallel(\vec{r}_\parallel, z=0, t) \;=\; \vec{A}_\parallel(\vec{r}_\parallel, z=a, t) \;=\; \vec{0}$$

voor de vectorpotentiaal de condities voor perfecte geleiding volgen.

(ii) Beredeneer dat hieruit volgt dat de vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r}_\parallel, z, t)$ tussen de platen te ontbinden is in periodieke Fourier-modes in de z-coördinaat met periode $2a$. Dat wil zeggen dat de vectorpotentiaal tussen de platen samenvalt met de vectorpotentiaal afkomstig van een periodiek elektromagnetisch veld met periode $2a$ in de z-richting.

(iii) Beschouw nu zo'n periodiek elektromagnetisch veld met periode $2a$ in de z-richting, waarbij in de z-richting kwantisatie optreedt met bijbehorend geheeltallig kwantumgetal ν en in de overige richtingen de continuümlimiet mag worden genomen. Bepaal voor zo'n elektromagnetisch veld de kwantummechanische nulpuntsenergie binnen een volume $2Sa$. Hint: gebruik § 4.2.4.

Antwoord: $$E_0(2Sa) \;=\; \frac{\hbar c S}{4\pi} \int\limits_0^\infty \mathrm{d}\vec{k}_\parallel^{\,2} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sqrt{\vec{k}_\parallel^{\,2} + (\nu\pi/a)^{\,2}}\ .$$

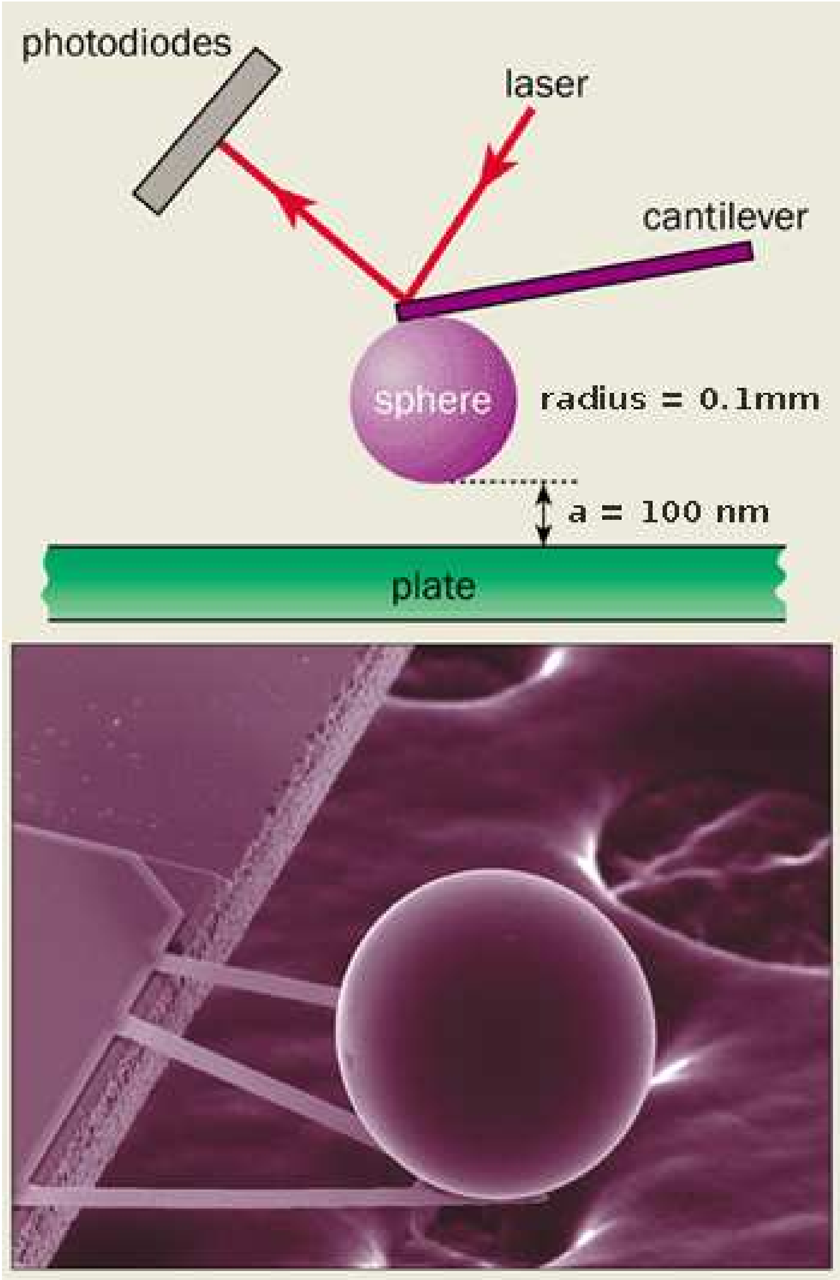
(iv) Hoe ziet de nulpuntsenergie eruit als ook in de z-richting de continuümlimiet mag worden gebruikt? In dat geval hebben we te maken met de nulpuntsenergie $E_0^{\text{vrij}}(2Sa)$ van een vrij elektromagnetisch veld binnen een volume $2Sa$.

Het feitelijke volume tussen de platen is Sa, zodat de nulpuntsenergieën in onderdelen (iii) en (iv) nog moeten worden gehalveerd voor het beschouwde fysische systeem. Beide uitdrukkingen zijn (ultraviolet) divergent ten gevolge van het ongelimiteerde hoge-energiebereik. Omdat alleen energieverschillen kwantummechanisch meetbaar zijn mag de universele uitdrukking voor het vrije elektromagnetische veld als absolute energieschaal worden gebruikt ten opzichte waarvan de energieën worden gedefinieerd. Dit heet renormalisatie. Omdat twee oneindige uitdrukkingen van elkaar worden afgetrokken moet dit echter wel zorgvuldig worden gedaan (voor meer info: lees de bachelorscriptie van Matthias Sars). Aan het eind van de berekening vindt men voor de gerenormaliseerde nulpuntsenergie van het veld tussen de platen

$$E_0^{\text{ren}}(a) \;=\; -\,\frac{\pi^2}{720}\,\frac{\hbar c S}{a^3}\ .$$

(v) Bepaal de aantrekkende kracht tussen de platen die hieruit volgt. Dit puur kwantummechanisch fenomeen wordt het Casimir-effect genoemd.

(vi) Deel vervolgens het zeer grote plaatoppervlak S uit, om zo de druk op de platen te verkrijgen (d.w.z. de kracht per oppervlakte-eenheid). Gebruik dimensionele argumenten om te laten zien dat er in feite maar één manier is om de eindige systeemspecifieke grootheden $\hbar, c$ en a tot een druk te combineren.



Experimenteel bleek het zeer moeilijk om de twee platen met uniforme micrometerprecisie ten opzichte van elkaar te configureren. Het Casimir-effect werd uiteindelijk 50 jaar na de voorspelling experimenteel geverifieerd door de platen te vervangen door een bol-en-plaat configuratie: S.K. Lamoreaux deed dat in 1997 in het millimeter a-bereik en U. Mohideen & A. Roy in 1998 in het micrometer a-bereik (zie plaatje).