Opgaven bij het college Kwantummechanica 2
Week 15

Opgave 23: **Born-benadering voor centrale potentialen!!!**

Beschouw potentiaalverstrooiing aan de volgende twee gereduceerde potentialen:

$$\text{(I)}\quad \underline{\text{Exponentiële potentiaal}}: \quad U(r) \;=\; \frac{C}{2a}\,\exp(-r/a)\;,$$

$$\text{(II)}\quad \underline{\text{Gaussische potentiaal}}: \quad U(r) \;=\; \frac{4C}{a\sqrt{\pi}}\,\exp(-r^2/a^2)\;,$$

met $a > 0$ en C reële constanten. Beantwoord nu de volgende vragen.

(i) Laat zien dat de verstrooiingsamplituden in Born-benadering worden gegeven door

$$f^{\rm B}_{\rm (I)}(\Delta) \;=\; -\,\frac{a^2C}{(1+a^2\Delta^2)^2} \qquad \text{en} \qquad f^{\rm B}_{\rm (II)}(\Delta) \;=\; -\,a^2C\,\exp(-a^2\Delta^2/4)\;,$$

waarbij de grootheid $\Delta = 2k\sin(\theta/2)$ afhangt van zowel de karakteristieke de Broglie-golflengte $2\pi/k = h/p = \lambda$ als de polaire verstrooiingshoek θ.

Hint: gebruik de integralen

$$\int\limits_0^\infty {\rm d}r\; r^n\exp(-\beta r) \;=\; \frac{n!}{\beta^{n+1}} \quad \text{voor} \quad n = 0,1,\cdots \quad \text{en} \quad {\rm Re}(\beta) > 0\;,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} {\rm d}v\; v\,\exp(-\beta v)\exp(-\gamma v^2) \;=\; -\,\beta\left(\frac{\pi}{4\gamma^3}\right)^{1/2}\exp(\beta^2/4\gamma) \quad \text{voor} \quad \gamma > 0\;,\; \beta\in\mathbb{C}\;.$$

Let goed op de ondergrens van deze laatste integraal!

(ii) Bepaal de beide <u>differentiële</u> werkzame doorsneden in Born-benadering.

(iii) Bekijk vervolgens de Δ-afhankelijkheid van deze differentiële werkzame doorsneden.

- Leg uit welk verband er bestaat tussen de grootte van a en de scherpte van de piek in de voorwaartse richting.
- Welke van de twee potentialen heeft voor vaste a de scherpste piek en waarom?

(iv) Welke eigenschap van de potentialen zorgt ervoor dat de differentiële werkzame doorsnede eindig is in de voorwaartse richting (d.w.z. voor $\theta \approx 0$)?

(v) Beschouw vervolgens uitsluitend de exponentiële potentiaal (I) en neem aan dat de verstrooiing plaatsvindt bij zeer lage energieën, d.w.z. $E \downarrow 0$.

- Bepaal de totale werkzame doorsnede in Born-benadering in de lage-energielimiet.
- Waarom is dit lage-energieresultaat eindig?
- Wat zegt dit lage-energieresultaat over de vorm van de verstrooiingspotentiaal?

Opgave 24: **Klassieke elektromagnetische velden en minimale substitutie**

Beschouw een spin-0 deeltje met massa m en lading q dat onder invloed staat van een potentiaal $V(\vec{r})$. De klassieke Lagrangiaan van dit systeem wordt dan gegeven door

$$L_0(\vec{r},\dot{\vec{r}}) \;=\; \frac{1}{2}\,m\dot{\vec{r}}^{\,2} \;-\; V(\vec{r}) \;,$$

met bijbehorende Lagrange-vergelijking

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\vec{r}}} \;-\; \frac{\partial L_0}{\partial \vec{r}} \;=\; 0 \quad\Rightarrow\quad m\ddot{\vec{r}} \;=\; -\,\vec{\nabla} V(\vec{r}) \;.$$

Voor de overgang naar de Hamiltoniaan H_0 wordt de met $\vec{r}$ geconjugeerde impuls $\vec{p}$ gedefinieerd als

$$\vec{p} \;\equiv\; \frac{\partial L_0}{\partial \dot{\vec{r}}} \;=\; m\dot{\vec{r}} \;,$$

zodat

$$H_0(\vec{r},\vec{p}) \;\equiv\; \vec{p}\cdot\dot{\vec{r}} \;-\; L_0(\vec{r},\dot{\vec{r}}) \;=\; \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} \;+\; V(\vec{r}) \;.$$

Vervolgens wordt het systeem blootgesteld aan een (klassiek) elektromagnetisch veld, gekarakteriseerd door de reële scalaire potentiaal $\phi(\vec{r},t)$ en de reële vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r},t)$. De klassieke Lagrangiaan verandert dan in

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) \;=\; L_0(\vec{r},\dot{\vec{r}}) \;+\; q\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\dot{\vec{r}} \;-\; q\phi(\vec{r},t) \;.$$

(i) Hoe verandert de met $\vec{r}$ geconjugeerde (kanonieke) impuls $\vec{p} \equiv \partial L/\partial\dot{\vec{r}}$?

(ii) Laat zien dat de Lagrange-vergelijking nu de volgende vorm heeft:

$$m\ddot{\vec{r}} \;=\; q\Big(\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) \;+\; \dot{\vec{r}}\times\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t)\Big) \;-\; \vec{\nabla} V(\vec{r}) \;,$$

waarbij de term evenredig met q de welbekende Lorentz-kracht is.
Hint: gebruik dat $\vec{\nabla}\,(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}\,) \;-\; (\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla}\,)\vec{A} \;=\; \dot{\vec{r}}\times(\,\vec{\nabla}\times\vec{A}\,)$, alsmede de definities

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) \;\equiv\; -\,\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t) \;-\; \frac{\partial}{\partial t}\,\vec{A}(\vec{r},t) \qquad \text{en} \qquad \vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t) \;\equiv\; \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t) \;.$$

(iii) Toon aan dat de Hamiltoniaan wordt verkregen door minimale substitutie:

$$H(\vec{r},\vec{p},t) \;=\; \frac{\big[\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r},t)\big]^2}{2m} \;+\; q\phi(\vec{r},t) \;+\; V(\vec{r}) \;.$$

Via minimale substitutie wordt op een zeer directe manier de interactie tussen klassieke deeltjes en klassieke elektromagnetische velden in rekening gebracht binnen het Hamiltoniaanformalisme.