Opgaven bij het college Kwantummechanica 3
Week 15

De eerste opgave is een extraatje en hoeft niet te worden ingeleverd. De tweede opgave zal samen met het Casimir-effect tijdens het interactieve laatste werkcollege worden besproken

Opgave 32: **Straling in thermisch evenwicht met een atomair warmtebad**
Afleiding van de basisvergelijking voor de stralingswet van Planck

Beschouw een warmtebad bestaande uit gelocaliseerde spin-0 atomen, zoals bijvoorbeeld spin-0 atomen in een vaste stof. De atomen hebben twee niet-ontaarde energie-eigentoestanden $|\psi_A\rangle$ en $|\psi_B\rangle$ met energie-eigenwaarden E_A en $E_B = E_A - \hbar\omega$ $(\omega > 0)$. Neem aan dat dit atomair warmtebad in thermisch evenwicht is met elektromagnetische straling bij een temperatuur T, zodat het reversibele 1-fotonproces $A \rightleftarrows B + \gamma$ zich in evenwicht bevindt. De (gemiddelde) evenwichtspopulaties van de atomaire toestanden A en B worden aangegeven door $N(A)$ en $N(B)$.

(i) Toon aan dat uit de evenwichtsconditie voor het reversibele 1-fotonproces volgt dat

$$\frac{N(B)}{N(A)} = \frac{W_{A\to B+\gamma}}{W_{B+\gamma\to A}} = \exp(\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T) ,$$

met $W_{A\to B+\gamma}$ en $W_{B+\gamma\to A}$ de overgangswaarschijnlijkheden per tijdseenheid en per atoom in de aangegeven begintoestand.

Hint: voor de gelocaliseerde atomen geldt de Maxwell−Boltzmann statistiek.

(ii) Maak gebruik van de operatoridentiteit

$$\big[F(\hat{\vec{r}}_j), \hat{\vec{p}}_j\big] = i\hbar\,\frac{\partial F}{\partial \hat{\vec{r}}_j}$$

om te laten zien dat voor de plaats- en impulsoperatoren van het j^{e} atoom geldt dat

$$\exp(i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}_j)\,\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{e}_k)\cdot\hat{\vec{p}}_j = \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{e}_k)\cdot\hat{\vec{p}}_j\exp(i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}_j) .$$

(iii) Leid hieruit de volgende conditie af voor het j^{e} atoom:

$$|\langle\psi_B^{(j)}|\exp(-i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}_j)\,\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{e}_k)\cdot\hat{\vec{p}}_j\,|\psi_A^{(j)}\rangle|^2 = |\langle\psi_A^{(j)}|\exp(i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}_j)\,\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{e}_k)\cdot\hat{\vec{p}}_j\,|\psi_B^{(j)}\rangle|^2 .$$

(iv) Neem aan dat de atomen in het warmtebad gemiddeld gezien geen voorkeursrichting hebben, zodat ook de fotonen geëmitteerd/geabsorbeerd worden zonder voorkeursrichting. Dit houdt in dat alle fotontoestanden met kwantumgetallen λ en

$\{\vec{k}\ :\ \ k = \omega/c\}$ met hetzelfde gemiddelde bezettingsgetal $\bar{n}$ voorkomen in het stralingsveld. Beredeneer dan dat op grond van de conditie uit onderdeel (iii) op eerste-orde in storingstheorie het volgende moet gelden:

$$j^{\rm e}\ \text{atoom}: \quad \frac{W_{A^{(j)}\to B^{(j)}+\gamma_{\vec{k},\lambda}}}{W_{B^{(j)}+\gamma_{\vec{k},\lambda}\to A^{(j)}}} \approx \frac{\bar{n}+1}{\bar{n}} \quad \Rightarrow \quad \text{alle atomen}: \quad \frac{W_{A\to B+\gamma}}{W_{B+\gamma\to A}} \approx \frac{\bar{n}+1}{\bar{n}} \ .$$

Hint: gebruik de uitdrukkingen (384)–(386) uit het collegedictaat en laat gemakshalve de magnetische spininteracties buiten beschouwing.

(v) Leid tenslotte af dat de fotonen met kwantumgetallen λ en $\{\vec{k}:\ k = \omega/c\}$ moeten voldoen aan de statistiek

$$\bar{n} \ = \ \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_{\rm B}T) - 1} \ .$$

Opgave 33: **Alternatieve deeltjesinterpretatie in de vrije spin-1/2 theorie**

De reden waarom de 1-deeltjes Dirac-theorie zo'n succes was

Beschouw de gekwantiseerde oplossing $\hat{\psi}(x)$ van de Dirac-vergelijking voor vrije spin-1/2 deeltjes, zoals gegeven in formule (418) van het collegedictaat.

(i) Bewijs dat deze oplossing voldoet aan de volgende set anticommutatierelaties:

$$\big\{\hat{\psi}_i(\vec{x},t), \hat{\psi}_{i'}(\vec{x}\,',t)\big\} \ = \ \big\{\hat{\psi}_i^\dagger(\vec{x},t), \hat{\psi}_{i'}^\dagger(\vec{x}\,',t)\big\} \ = \ 0 \ ,$$

$$\big\{\hat{\psi}_i(\vec{x},t), \hat{\psi}_{i'}^\dagger(\vec{x}\,',t)\big\} \ = \ \delta_{ii'}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}\,')\,\hat{1} \qquad (i,i' = 1,\cdots,4 \ \ \text{spinorindices}) \ .$$

Gebruik hierbij de volledigheidsrelaties voor Dirac-spinoren en Fourier-componenten:

$$\sum_\lambda \Big(u_\lambda^+(\vec{p})u_\lambda^+(\vec{p})^\dagger \ + \ u_\lambda^-(\vec{p})u_\lambda^-(\vec{p})^\dagger\Big) \ = \ \frac{E_{\vec{p}}}{mc^2}\,I \ ,$$

$$\sum_{\vec{p}} u_{\vec{p}}(\vec{x}\,)u_{\vec{p}}^*(\vec{x}\,') \ = \ \frac{1}{V}\sum_{\vec{p}} \exp\!\big(i\vec{p}\cdot[\vec{x}-\vec{x}\,']/\hbar\big) \ = \ \delta(\vec{x}-\vec{x}\,') \ .$$

(ii) Waarom kan je hieruit concluderen dat er een alternatieve deeltjesinterpretatie in de vrije spin-1/2 theorie verborgen zit?

(iii) Bewijs tenslotte dat $\langle 0_e|\hat{\psi}_i(\vec{x},t)\,\hat{\psi}_{i'}^\dagger(\vec{x}\,',t)|0_e\rangle = \delta_{ii'}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}\,')$ voor het elektron-vacuüm $|0_e\rangle$ gedefinieerd in formule (426).

Lees gewapend met deze kennis § 5.2.1 van het collegedictaat door, waarin een expliciet verband wordt gelegd tussen de veeldeeltjes Dirac-theorie en de zo succesvolle 1-deeltjestheorie.