Opgaven bij het college Kwantummechanica 2
Week 16

Opgave 25: IJkinvariantie

Beschouw een spin-0 deeltje met massa m en lading q dat onder invloed staat van een (klassiek) elektromagnetisch veld, gekarakteriseerd door de reële scalaire potentiaal $\phi(\vec{r},t)$ en de reële vectorpotentiaal $\vec{A}(\vec{r},t)$. De Schrödinger-vergelijking voor dit systeem ziet er in de plaatsrepresentatie als volgt uit:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) \;=\; \hat{H}\,\psi(\vec{r},t)\ , \qquad \text{met} \quad \hat{H} \;=\; \frac{1}{2m}\Big[-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}(\vec{r},t)\Big]^2 + q\phi(\vec{r},t) + V(\vec{r})\ .$$

Voer vervolgens de ijktransformatie

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r},t) \;&\rightarrow\; \vec{A}\,'(\vec{r},t) \;=\; \vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r},t)\ ,\\
\phi(\vec{r},t) \;&\rightarrow\; \phi'(\vec{r},t) \;=\; \phi(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\chi(\vec{r},t)\ ,\\
\psi(\vec{r},t) \;&\rightarrow\; \psi'(\vec{r},t) \;=\; \psi(\vec{r},t)\exp\big(iq\chi(\vec{r},t)/\hbar\big)
\end{aligned}$$

uit, waarbij de functie $\chi(\vec{r},t)$ een willekeurige reële differentieerbare functie is.

(i) Laat zien dat deze transformatie van de <u>toestandsfuncties</u> overeenkomt met de transformatie-eigenschap van een unitaire transformatie.

(ii) Toon aan dat onder deze unitaire transformatie de operator $\hat{\vec{p}} - q\vec{A}(\hat{\vec{r}},t)$ als volgt transformeert:

$$\big(\hat{\vec{p}} - q\vec{A}(\hat{\vec{r}},t)\big)' \;\equiv\; \hat{\vec{p}}\,' - q\vec{A}(\hat{\vec{r}}\,',t) \;=\; \hat{\vec{p}} - q\vec{A}\,'(\hat{\vec{r}},t)\ .$$

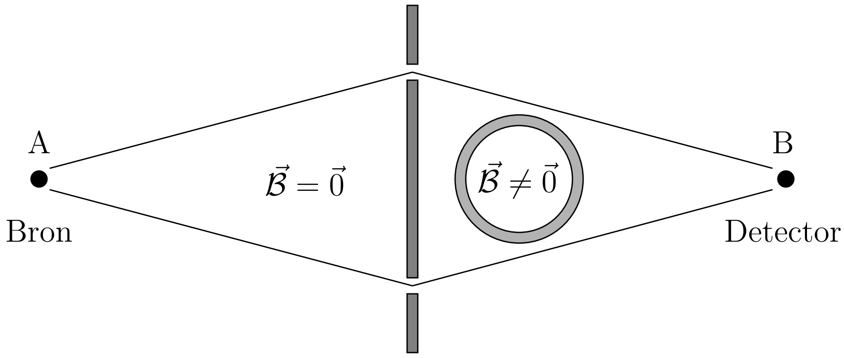
Hint: gebruik dat $\big[\hat{\vec{p}}, F(\hat{\vec{r}},\hat{\vec{p}})\big] = -i\hbar\vec{\nabla}F(\hat{\vec{r}},\hat{\vec{p}})$.

(iii) Bewijs dat bovenstaande Schrödinger-vergelijking invariant is onder ijktransformaties, hetgeen wil zeggen dat de Schrödinger-vergelijking dezelfde vorm heeft in termen van de grootheden met en zonder accent. Dit wordt <u>ijkinvariantie</u> genoemd.

<u>Opgave 26</u>: Het Aharonov−Bohm effect

Beschouw een experiment waarbij spin-0 deeltjes met massa m en lading q vanuit een deeltjesbron (A) worden afgestraald op een scherm met twee spleten. Achter dit scherm bevindt zich een ondoordringbare, zeer lange cilinder waarin een constant magneetveld $\vec{\mathcal{B}}$ evenwijdig aan de cilinderas zit opgesloten. Buiten de cilinder is er geen magneetveld.

Schematisch plaatje :



We gaan nu de $\vec{\mathcal{B}}$-afhankelijkheid bekijken van de waarschijnlijkheid om het deeltje te registreren in een detector (B) achter het scherm. Omdat de cilinder ondoordringbaar is zullen de deeltjes op hun weg van de bron naar de detector op geen enkel moment het magneetveld ondervinden. <u>Klassiek gezien</u> werkt er geen Lorentz-kracht op de deeltjes en wordt er dus <u>geen $\vec{\mathcal{B}}$-afhankelijkheid van de waarneming</u> verwacht. Voor de kwantummechanische berekening gaan we nu de padintegraalmethode gebruiken. De klassieke Lagrangiaan die in de som over alle paden van A naar B moet worden gebruikt heeft hier de vorm

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}}) \;=\; L_0(\vec{r},\dot{\vec{r}}) + q\vec{A}(\vec{r})\cdot\dot{\vec{r}}\,, \qquad \text{met} \qquad L_0(\vec{r},\dot{\vec{r}}) \;=\; \frac{1}{2}\,m\,\dot{\vec{r}}^{\,2}\;.$$

De term L_0 is de Lagrangiaan voor een vrij deeltje in afwezigheid van het elektromagnetisch veld. De bijbehorende klassieke acties S en S_0 worden verkregen door de Lagrangianen te integreren over het beschouwde tijdsinterval. De waarschijnlijkheidsamplitude om een op het tijdstip $t' = 0$ vanuit de bron ($\vec{r}_A$) vertrekkend deeltje op tijdstip $t > 0$ in de detector ($\vec{r}_B$) te vinden wordt dan gegeven door

$$K(\vec{r}_B,t\,;\vec{r}_A,0) \;=\; \int_{\vec{r}\,(T=0)\,=\,\vec{r}_A}^{\vec{r}\,(T=t)\,=\,\vec{r}_B} \mathcal{D}[\vec{r}\,(T)]\;\exp\!\big(iS_0(t,0)/\hbar\big)\;\exp\!\bigg(\frac{iq}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}T\;\dot{\vec{r}}\,(T)\cdot\vec{A}\big(\vec{r}\,(T)\big)\bigg)\;.$$

(i) Leid af dat het elektromagnetische faseverschil tussen twee paden die van A naar B lopen proportioneel is met de magnetische flux door het ingesloten oppervlak.

(ii) – Wat houdt dit in voor twee paden die boven dan wel onder de cilinder langs gaan?
– Hoe verandert dit als één pad boven en één pad onder de cilinder langs gaat?

(iii) Als de sterkte van $\vec{\mathcal{B}}$ wordt gevarieerd, dan wordt in punt B een kwantummechanisch oscillatiepatroon waargenomen in termen van de ingesloten magnetische flux binnen de cilinder (Aharonov–Bohm effect). Bepaal de fundamentele eenheid van magnetische flux die overeenkomt met precies één periode van de oscillatie.

(iv) Neem aan dat het afgelegde traject van de deeltjes tussen A en B macroscopisch is, zodat de deeltjes een de Broglie-golflengte $\lambda = h/p$ hebben die veel kleiner is dan de afstand $d \equiv |\vec{r}_B - \vec{r}_A|$. Beredeneer dan dat het Aharonov–Bohm effect gezien kan worden als een manifestatie van een observabele Berry-fase.

(v) Bij de bepaling van deze Aharonov–Bohm Berry-fase hebben we natuurlijk de vrijheid om het oppervlak te kiezen dat door de curve $A \to B \to A$ wordt omsloten. Stel we maken twee verschillende keuzes voor het oppervlak. Welke relatie moet dan gelden tussen de bijbehorende magnetische fluxen, gegeven dat de fysica in beide gevallen hetzelfde moet zijn?

(vi) Uitdaging: magnetische monopolen en ladingskwantisatie.

Door elk gesloten oppervlak dat een vrije magnetische lading $q_{_M}$ omsluit gaat een magnetische flux $q_{_M}$ naar buiten. Gebruik de argumentatie uit het vorige onderdeel om te beredeneren dat de lading q gekwantiseerd moet zijn volgens

$$q = \frac{2\pi\hbar}{q_{_M}}\,\kappa \qquad (\kappa = 0, \pm 1, \cdots)\ .$$