

Opgaven bij het college Kwantummechanica 3

Week 16

Opgave 33: Alternatieve deeltjesinterpretatie in de vrije spin-1/2 theorie

De reden waarom de 1-deeltjes Dirac-theorie zo'n succes was

Beschouw de gekwantiseerde oplossing $\hat{\psi}(x)$ van de Dirac-vergelijking voor vrije spin-1/2 deeltjes, zoals gegeven in formule (418) van het collegedictaat.

- (i) Bewijs dat deze oplossing voldoet aan de volgende set anticommutatierelaties:

$$\{\hat{\psi}_i(\vec{x}, t), \hat{\psi}_{i'}(\vec{x}', t)\} = \{\hat{\psi}_i^\dagger(\vec{x}, t), \hat{\psi}_{i'}^\dagger(\vec{x}', t)\} = 0 ,$$

$$\{\hat{\psi}_i(\vec{x}, t), \hat{\psi}_{i'}^\dagger(\vec{x}', t)\} = \delta_{ii'} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \hat{1} \quad (i, i' = 1, \dots, 4 \text{ spinorindices}) .$$

Gebruik hierbij de volledighedsrelaties voor Dirac-spinoren en Fourier-componenten:

$$\sum_{\lambda} \left(u_{\lambda}^+(\vec{p}) u_{\lambda}^+(\vec{p})^\dagger + u_{\lambda}^-(\vec{p}) u_{\lambda}^-(\vec{p})^\dagger \right) = \frac{E_{\vec{p}}}{mc^2} I ,$$

$$\sum_{\vec{p}} u_{\vec{p}}(\vec{x}) u_{\vec{p}}^*(\vec{x}') = \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \exp(i\vec{p} \cdot [\vec{x} - \vec{x}']/\hbar) = \delta(\vec{x} - \vec{x}') .$$

- (ii) Waarom kan je hieruit concluderen dat er een alternatieve deeltjesinterpretatie in de vrije spin-1/2 theorie verborgen zit?
- (iii) Bewijs tenslotte dat $\langle 0_e | \hat{\psi}_i(\vec{x}, t) \hat{\psi}_{i'}^\dagger(\vec{x}', t) | 0_e \rangle = \delta_{ii'} \delta(\vec{x} - \vec{x}')$ voor het elektron-vacuüm $|0_e\rangle$ gedefinieerd in formule (426).

Lees gewapend met deze kennis §5.2.1 van het collegedictaat door, waarin een expliciet verband wordt gelegd tussen de veeldeeltjes Dirac-theorie en de zo succesvolle 1-deeltjestheorie.