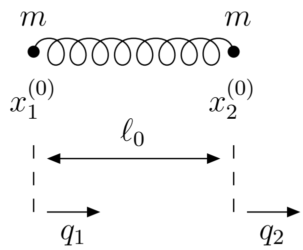
Opgaven bij het college Analytische Mechanica
Week 1

Opgave 1: De veer

Twee constante puntmassa's met gelijke massa $m_1 = m_2 = m$ en 1-dimensionale coördinaten x_1 en $x_2 \geq x_1$ zijn door een veer met elkaar verbonden. De veerconstante is k en de rustlengte van de veer is ℓ_0. Gebruik als gegeneraliseerde coördinaten de relatieve posities van de puntmassa's ten opzichte van de in het plaatje geschetste rustpositie: $q_{1,2} \equiv x_{1,2} - x_{1,2}^{(0)}$.



(i) Laat zien dat de Lagrangiaan van dit systeem wordt gegeven door

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \right) - \frac{1}{2} k (q_1 - q_2)^2 .$$

(ii) Leid hieruit de bewegingsvergelijkingen af voor de coördinaten q_1 en q_2.

(iii) Toon aan dat de frequentie van de (vrije) harmonische beweging die de relatieve coördinaat $q \equiv q_1 - q_2$ ondergaat wordt gegeven door

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2k/m} .$$

(iv) Laat vervolgens zien dat de collectieve coördinaat $\bar{q} \equiv \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$ een eenparige beweging ondergaat, d.w.z. dat de snelheid behorende bij deze coördinaat voor alle tijden hetzelfde blijft.

(v) De coördinaten q_1 en q_2 voldoen aan de volgende begincondities op tijdstip $t = 0$:

$$q_1(0) = q_2(0) = 0 \quad , \quad \dot{q}_1(0) = 0 \qquad \text{en} \qquad \dot{q}_2(0) = v > 0 .$$

- Bepaal dan $q_1(t)$ en $q_2(t)$, gebruik makende van onderdelen (iii) en (iv).
- Laat zien dat deze oplossing een totale energie $E = T + V = \frac{1}{2} m v^2$ heeft.
- Beschouw tenslotte de asymptotische situatie dat $\sqrt{k/m} \gg v/\ell_0$.
  Uitdaging: beredeneer dat de gegeven totale energie E impliceert dat de relatieve coördinaat q voor alle tijden zeer klein is vergeleken bij de rustlengte van de veer.

Opgave 2: Beweging in een vlak ten gevolge van een centrale potentiaal

Een puntdeeltje met constante massa m beweegt in het xy-vlak onder de invloed van een centrale potentiaal, d.w.z. een potentiaal die slechts afhangt van de afstand tot de oorsprong van het coördinatenstelsel. Het ligt dan voor de hand als gegeneraliseerde coördinaten de poolcoördinaten r en φ te nemen, gedefinieerd door

$$x = r\sin\varphi \qquad \text{en} \qquad y = r\cos\varphi \ .$$

(i) Laat zien dat de Lagrangiaan van dit systeem wordt gegeven door

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r) \ ,$$

met $V(r)$ de centrale potentiaal.

(ii) Geef de beide bewegingsvergelijkingen.

(iii) – Laat zien dat de met φ geconjugeerde impuls p_φ een behouden grootheid is.

– Hoe staat dit resultaat bekend?

(iv) Wat is het verband tussen p_φ en het impulsmoment $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, waarbij $\vec{p}$ de met $\vec{r}$ geconjugeerde impuls is?

Opgave 3: Beweging langs een voorgeschreven curve

Een puntmassa met constante massa m glijdt wrijvingsloos langs een onvervormbare parabolische draad in het xy-vlak onder invloed van een constant gravitatieveld met versnelling g in de negatieve y-richting. De parabolische curve die de vorm van de draad beschrijft wordt gegeven door $y = ax^2$.

(i) Bepaal eerst de Lagrangiaan in termen van x en y.

(ii) Gebruik vervolgens de restrictie dat de puntmassa langs de draad moet bewegen als randvoorwaarde en druk de Lagrangiaan uit in termen van x alleen.

Hint: schrijf $y = q + ax^2$, zodat de randvoorwaarde equivalent is met de eis $q = \dot{q} = 0$.

(iii) Laat zien dat de bewegingsvergelijking voor x dan de volgende vorm aanneemt:

$$\ddot{x}(1 + 4a^2x^2) + (4a^2\dot{x}^2 + 2a\mathrm{g})x = 0 \ .$$

(iv) – Leid hieruit de volgende relatie af:

$$\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\mathrm{d}t} = -2\mathrm{g}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \ .$$

– Wat houdt deze relatie in feite in?