Opgaven bij het college Kwantummechanica 3
Week 1

Doel: vertrouwd raken met creatie- en annihilatie-operatoren

Opgave 1: Basistoestanden voor bosonische veeldeeltjessystemen

Beschouw de toestanden

$$|n_1, n_2, \cdots\rangle \;=\; \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \cdots |\Psi^{(0)}\rangle \;\equiv\; \prod_j \frac{(\hat{a}_j^\dagger)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} |\Psi^{(0)}\rangle \;,$$

$$|\Psi^{(0)}\rangle \;\equiv\; |0, 0, \cdots\rangle \;, \qquad \text{met} \quad \langle\Psi^{(0)}|\Psi^{(0)}\rangle \;=\; 1 \qquad \text{en} \qquad \hat{a}_j|\Psi^{(0)}\rangle \;=\; 0 \;,$$

waarbij de creatie- en annihilatie-operatoren $\hat{a}_j^\dagger$ en $\hat{a}_j$ voldoen aan de bosonische commutatierelaties

$$\big[\hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_k^\dagger\big] \;=\; \big[\hat{a}_j, \hat{a}_k\big] \;=\; 0 \qquad \text{en} \qquad \big[\hat{a}_j, \hat{a}_k^\dagger\big] \;=\; \delta_{jk}\,\hat{1} \;.$$

De bezettingsgetallen n_j kunnen de waarden $0, 1, 2, \cdots$ doorlopen. Deze getallen representeren het aantal deeltjes in de volledig gespecificeerde 1-deeltjes eigentoestand van de complete set 1-deeltjes observabelen $\hat{q}$ bij de discrete eigenwaarde q_j $(j = 1, 2, \cdots)$.

(i) Gebruik vergelijking (21) van het collegedictaat om te laten zien dat de commutatierelaties vorminvariant zijn bij overgang naar een andere 1-deeltjesrepresentatie.

(ii) Bewijs met behulp van volledige inductie dat

$$\big[\hat{a}_j, (\hat{a}_j^\dagger)^{n_j}\big] \;=\; n_j\,(\hat{a}_j^\dagger)^{n_j - 1} \;.$$

(iii) Beredeneer dat in bovenstaande toestanden de volgorde van de creatie-operatoren niet belangrijk is.

(iv) Leid met behulp van onderdeel (ii) de volgende relaties af:

$$\hat{a}_j\,|\cdots, n_j, \cdots\rangle \;=\; \sqrt{n_j}\;|\cdots, n_j{-}1, \cdots\rangle \;,$$

$$\hat{a}_j^\dagger|\cdots, n_j, \cdots\rangle \;=\; \sqrt{n_j{+}1}\;|\cdots, n_j{+}1, \cdots\rangle \;.$$

(v) – Laat zien dat bovenstaande toestanden een orthonormale set vormen.
Hint: bekijk hiertoe $\langle n_1', n_2', \cdots | n_1, n_2, \cdots\rangle$, schrijf de toestandsbra's uit in termen van annihilatie-operatoren en gebruik vervolgens de uitdrukking voor $\hat{a}_j\,|\cdots, n_j, \cdots\rangle$ uit onderdeel (iv) alsmede de vacuümeigenschap $\langle\Psi^{(0)}|\hat{a}_j^\dagger = 0$.

– Hieraan ligt feitelijk ten grondslag dat er evenveel $\hat{a}_j$ als $\hat{a}_j^\dagger$ operatoren tussen $\langle\Psi^{(0)}|$ en $|\Psi^{(0)}\rangle$ moeten staan als we willen dat een vacuümverwachtingswaarde niet verdwijnt. Waarom is dat zo?

Opgave 2: **Basistoestanden voor fermionische veeldeeltjessystemen**

Beschouw wederom de toestanden

$$|n_1, n_2, \cdots\rangle \;=\; \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}}\,\frac{(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}}\,\cdots\,|\Psi^{(0)}\rangle \;\equiv\; \prod_j \frac{(\hat{a}_j^\dagger)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}}\,|\Psi^{(0)}\rangle\ ,$$

$$|\Psi^{(0)}\rangle \;\equiv\; |0, 0, \cdots\rangle\ , \qquad \text{met} \quad \langle\Psi^{(0)}|\Psi^{(0)}\rangle \;=\; 1 \qquad \text{en} \qquad \hat{a}_j\,|\Psi^{(0)}\rangle \;=\; 0\ ,$$

waarbij de creatie- en annihilatie-operatoren $\hat{a}_j^\dagger$ en $\hat{a}_j$ in dit geval voldoen aan de fermionische anticommutatierelaties

$$\big\{\hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_k^\dagger\big\} \;=\; \big\{\hat{a}_j, \hat{a}_k\big\} \;=\; 0 \qquad \text{en} \qquad \big\{\hat{a}_j, \hat{a}_k^\dagger\big\} \;=\; \delta_{jk}\,\hat{1}\ .$$

In overeenstemming met het Pauli-uitsluitingsprincipe kunnen de bezettingsgetallen n_j nu slechts de waarden 0 dan wel 1 aannemen. Deze getallen representeren wederom het aantal deeltjes in de volledig gespecificeerde 1-deeltjes eigentoestand van de complete set 1-deeltjes observabelen $\hat{q}$ bij de discrete eigenwaarde q_j $(j = 1, 2, \cdots)$.

(i) Laat zien dat de anticommutatierelaties vorminvariant zijn bij overgang naar een andere 1-deeltjesrepresentatie.

(ii) Beredeneer dat in bovenstaande toestanden de volgorde van de creatie-operatoren nu wel belangrijk is.

(iii) Leid de volgende relaties af:

$$\hat{a}_j\,|\cdots, n_j, \cdots\rangle \;=\; \delta_{n_j,1}\,(-1)^{N_{<j}}\,|\cdots, n_j - 1, \cdots\rangle\ ,$$

$$\hat{a}_j^\dagger\,|\cdots, n_j, \cdots\rangle \;=\; \delta_{n_j,0}\,(-1)^{N_{<j}}\,|\cdots, n_j + 1, \cdots\rangle\ ,$$

met

$$N_{<j} \;\equiv\; \sum_{k=1}^{j-1} n_k\ .$$

(iv) Laat zien dat bovenstaande toestanden een orthonormale set vormen.

Hint: bekijk hiertoe $\langle n_1', n_2', \cdots | n_1, n_2, \cdots\rangle$, schrijf de toestandsbra's uit in termen van annihilatie-operatoren en gebruik vervolgens de uitdrukking voor $\hat{a}_j\,|\cdots, n_j, \cdots\rangle$ uit onderdeel (iii) alsmede de vacuümeigenschap $\langle\Psi^{(0)}|\,\hat{a}_j^\dagger \;=\; 0$.