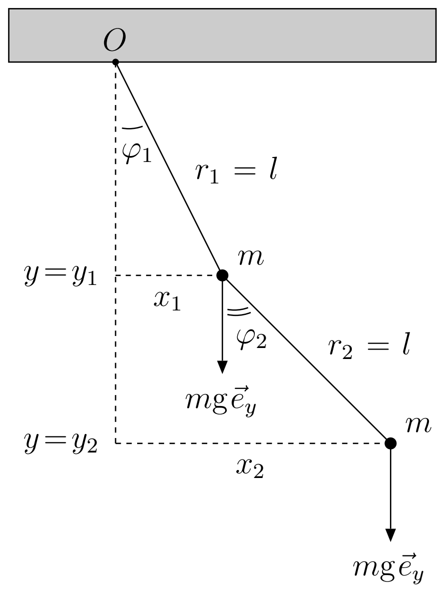
Opgaven bij het college Analytische Mechanica
Week 2

Opgave 4: De dubbelslinger



Beschouw een dubbelslinger. Deze bestaat uit een mathematische slinger met lengte l waaraan een constante puntmassa m is bevestigd. Een tweede mathematische slinger met lengte l en constante puntmassa m is bevestigd aan de eerste puntmassa. Het systeem beweegt in een vlak onder invloed van een constant gravitatieveld met versnelling g in de positieve y-richting. Kies als gegeneraliseerde coördinaten de hoeken φ_1 en φ_2 die respectievelijk de eerste en tweede slinger maken met de richting van het gravitatieveld, zodat

$$x_1 = l\sin\varphi_1 \qquad \text{en} \qquad x_2 = l(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) \ ,$$

$$y_1 = l\cos\varphi_1 \qquad \text{en} \qquad y_2 = l(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) \ .$$

(i) Laat zien dat de Lagrangiaan van het systeem wordt gegeven door

$$L = \frac{1}{2}ml^2\Big[2\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2\Big] + mgl\Big[2\cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_2)\Big] \ .$$

Hint: gebruik dat $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2$.

(ii) Leid hieruit de bewegingsvergelijkingen af voor de coördinaten φ_1 en φ_2.

(iii) Stel vervolgens dat de oscillaties klein zijn en de bewegingsvergelijkingen dus gelineariseerd mogen worden in φ_1, $\dot{\varphi}_1$, $\ddot{\varphi}_1$, φ_2, $\dot{\varphi}_2$ en $\ddot{\varphi}_2$. Laat zien dat de bewegingsvergelijkingen dan bij benadering de volgende simpele matrixvorm hebben:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} = -\frac{g}{l}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

(iv) – Bepaal de eigenwaarden van deze <u>oscillatiematrix</u>.

– Toon aan dat het systeem de volgende <u>eigentrillingen</u> ("<u>normal modes</u>") heeft:

$$\ddot{\varphi}_\pm = -\omega_\pm^2\varphi_\pm \ , \qquad \text{met} \qquad \varphi_\pm \equiv \varphi_1 \mp \frac{\varphi_2}{\sqrt{2}} \qquad \text{en} \qquad \omega_\pm \equiv \sqrt{\frac{g}{l}\left(2 \pm \sqrt{2}\right)} \ .$$

Opgave 5: **Even opwarmen voor het echte werk**

Gegeven zijn twee punten $\mathrm{A} = (x_1, y_1)$ en $\mathrm{B} = (x_2, y_2)$ in het xy-vlak. We gaan op zoek naar de kortste weg (geodeet) van A naar B, waarbij de lengte van de weg $y(x)$ wordt gegeven door $s = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$.

(i) Dit probleem kan worden opgelost met behulp van variatierekening voor paden met vaste eindpunten. In het college werd de variatierekening uitgevoerd aan de hand van de actie S, de Lagrangiaan $L(q, \dot{q}, t)$, de coördinaat q en de tijd t. Waardoor zijn deze vier grootheden in het huidige voorbeeld vervangen?

(ii) Bewijs nu dat de kortste weg van A naar B een rechte lijn is.

Opgave 6: **Het brachistochroon probleem (Bernoulli, 1696)**

In het verticale xy-vlak zijn twee punten $\mathrm{A} = (0, 0)$ en $\mathrm{B} = (x_0, y_0)$ gegeven, waarbij A hoger ligt dan B en de positieve y-as naar beneden is gericht. De punten worden met een onvervormbare draad verbonden. Aan de draad is een puntmassa met constante massa m bevestigd. Deze puntmassa valt vanuit stilstand onder invloed van een constant gravitatieveld met versnelling $\mathrm{g}\vec{e}_y$ zonder wrijving langs de draad van A naar B.

(i) Laat zien dat de daarvoor benodigde valtijd τ zo klein mogelijk is als de gedaante $y(x)$ van de draad voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$2y \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 1 = 0 .$$

Hint: de valtijd wordt gegeven door

$$\tau = \int_0^{x_0} \mathrm{d}x \, \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}}{\sqrt{2\mathrm{g}y}} ,$$

waarbij $\sqrt{2\mathrm{g}y}$ de snelheid van de puntmassa is in absolute waarde (zie onderdeel (iv) van opgave 3).

(ii) Toon vervolgens aan dat de oplossing een cycloïde is:

$$x = a(\lambda - \sin\lambda) \qquad \text{en} \qquad y = a(1 - \cos\lambda) ,$$

waarbij a een reële constante is en $\lambda \geq 0$ de curve parametriseert.

Dit probleem heeft destijds aan de basis gestaan van het ontstaan van de variatierekening!