Opgaven bij het college Kwantummechanica 2
Week 2

<u>Opgave 4</u>: Oscillatie en resonantie tussen twee toestanden!!!

Gegeven is de <u>tijdsonafhankelijke</u> Hamilton-operator

$$\hat{H} \;=\; E_1\,|1\rangle\langle 1| \,+\, E_2\,|2\rangle\langle 2| \,+\, C\,|1\rangle\langle 2| \,+\, C\,|2\rangle\langle 1| \qquad (E_1, E_2, C > 0)\ ,$$

waarbij $|1\rangle$ en $|2\rangle$ twee orthonormale toestanden zijn. Beschouw nu uitsluitend toestanden in de 2-dimensionale ruimte opgespannen door $|1\rangle$ en $|2\rangle$. Deze toestanden zijn derhalve te beschrijven door middel van 2-dimensionale toestandsvectoren. Bovenstaande Hamilton-operator werkt op deze 2-dimensionale toestandsvectoren als een 2×2 matrix.

(i) Leid af dat deze 2×2 matrix de volgende vorm heeft:

$$H \;=\; \begin{pmatrix} E_1 & C \\ C & E_2 \end{pmatrix} .$$

(ii) Deze symmetrische matrix is te diagonaliseren door te roteren:

$$|1\rangle \;=\; \cos\theta\,|\psi_+\rangle \,+\, \sin\theta\,|\psi_-\rangle \quad \text{en} \quad |2\rangle \;=\; -\,\sin\theta\,|\psi_+\rangle \,+\, \cos\theta\,|\psi_-\rangle \qquad (\theta \in \mathbb{R})\ ,$$

waarbij $|\psi_\pm\rangle$ de eigenvectoren zijn bij de energie-eigenwaarden $E_\pm$. Laat zien dat deze energie-eigenwaarden worden gegeven door

$$E_\pm \;=\; \frac{1}{2}\big(E_1 + E_2 \pm \varepsilon\big)\ , \qquad \text{met} \quad \varepsilon \;=\; \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4C^2}\ .$$

(iii) Stel het systeem zit op het tijdstip $t = 0$ in de toestand $|1\rangle$, zodat $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$.

– Laat zien dat op tijdstip t de toestandsvector wordt gegeven door

$$|\psi(t)\rangle \;=\; \cos\theta\,\exp(-iE_+t/\hbar)\,|\psi_+\rangle \,+\, \sin\theta\,\exp(-iE_-t/\hbar)\,|\psi_-\rangle\ .$$

– Leid hieruit af dat de kans $P_{21}(t) \equiv |\langle 2|\psi(t)\rangle|^2$ om het systeem op tijdstip t in de toestand $|2\rangle$ aan te treffen het volgende <u>oscillatiegedrag</u> vertoont:

$$P_{21}(t) \;=\; \sin^2(2\theta)\,\sin^2(\varepsilon t/2\hbar)\ .$$

Hint: gebruik dat $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ en $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$.

– Wat is dan de kans $P_{11}(t)$ dat het systeem in de toestand $|1\rangle$ is gebleven?

In het collegedictaat zal dit resultaat worden gebruikt bij de behandeling van ν_μ–ν_τ *neutrino-oscillaties.*

(iv) Waarom verandert de energieverwachtingswaarde van het systeem niet in de tijd?

(v) Stel er treedt op het tijdstip t' populatie-inversie op, d.w.z. $P_{21}(t') = 1$.

- Waaraan moet de rotatiehoek θ dan voldoen?
- Uitdaging: beredeneer aan de hand van de energieverwachtingswaarde van het systeem dat populatie-inversie alleen kan optreden als $E_1 = E_2$.

(vi) Stel dat inderdaad geldt dat $E_1 = E_2 = E$. Laat met behulp van de voorgaande onderdelen zien dat de toestandsvector dan als volgt evolueert in de tijd:

$$|\psi(t)\rangle \; = \; \exp(-iEt/\hbar)\Big(\cos(Ct/\hbar)\,|1\rangle \, - \, i\sin(Ct/\hbar)\,|2\rangle\Big) \; .$$

Hint: vind de eigenvectoren en gebruik dat $\exp(i\alpha) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ voor $\alpha \in \mathbb{R}$.

(vii) Vind het eerste tijdstip $t' > 0$ waarvoor populatie-inversie optreedt.

We hebben hier te maken met een resonante situatie die een belangrijke rol zal spelen bij de bespreking van de NH_3-maser.

Opgave 5: Continu energiespectrum en instabiliteit

Beschouw een geïsoleerd systeem dat op tijdstip $t = 0$ door middel van een energiemeting met meetfout Δ in de volgende toestand is gebracht:

$$|\psi(0)\rangle \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}E \; c(E)\,|\psi_E\rangle \, , \qquad \text{met} \qquad c(E) \; = \; \begin{cases} 1/\sqrt{2\Delta} & \text{als } \; E \in [\bar{E}-\Delta, \bar{E}+\Delta] \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \; .$$

Hier zijn $\bar{E}$ en Δ positieve reële constanten. Verder zijn $\{\,|\psi_E\rangle \; : \; E \in \mathbb{R}\}$ de energie-eigenfuncties van het systeem bij de continue energie-eigenwaarden E. Deze eigenfuncties zijn op een δ-functie genormeerd: $\langle\psi_E|\psi_{E'}\rangle = \delta(E - E')$.

(i) Laat zien dat de toestandsfunctie $|\psi(0)\rangle$ netjes op één genormeerd is.

(ii) Toon aan dat de kans om het systeem op tijdstip $t > 0$ nog steeds in de oorspronkelijke toestand aan te treffen wordt gegeven door

$$P(t) \; = \; \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}E \; |c(E)|^2 \exp(-iEt/\hbar) \right|^2 \; = \; \frac{\hbar^2}{t^2\Delta^2}\,\sin^2(t\Delta/\hbar) \; .$$

(iii) Overlegvraag: leg uit waarom de kans $P(t)$ effectief afneemt in de tijd, zodat het effectief steeds minder waarschijnlijk wordt om het systeem in de oorspronkelijke toestand aan te treffen.

(iv) Geef aan wat er in de limiet $\Delta \downarrow 0$ met $P(t)$ gebeurt en wat hier de fysische interpretatie van is.