Opgaven bij het college Kwantummechanica 3
Week 2

Opgave 3: Identieke N-deeltjesbasis in een continue representatie

Doel: de link leggen met de aanpak in het college Kwantummechanica 2

Beschouw een identiek N-deeltjessysteem waarvoor $\hat{a}_j^\dagger$ en $\hat{a}_j$ de creatie- en annihilatie-operatoren zijn ten opzichte van de discrete 1-deeltjesbasis $\{\,|q_j\rangle : \; j = 1, 2, \cdots\}$. Zoals in opgaven 1 en 2 is aangetoond spannen de orthonormale basistoestanden

$$|n_1, n_2, \cdots\rangle \;=\; \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}}\,\frac{(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}}\cdots|\Psi^{(0)}\rangle \qquad (n_1, n_2, \cdots = 0, 1, 2, \cdots)$$

samen de toestandsruimte op voor systemen bestaande uit een willekeurig aantal van zulke identieke deeltjes. Omdat er hier sprake is van een vast aantal deeltjes moeten we ons beperken tot de basistoestanden waarvoor de bezettingsgetallen n_j optellen tot N. Zulke sets bezettingsgetallen noteren we kortweg als $\{n_j\}_N$.

(i) Stel $\hat{1}_N$ is de eenheidsoperator in de N-deeltjes toestandsruimte. Beredeneer dat

$$\sum_{\{n_j\}_N} |n_1, n_2, \cdots\rangle\langle n_1, n_2, \cdots| \;=\; \hat{1}_N \,.$$

Vervolgens gaan we over op een continue representatie. Neem hiervoor aan dat $\hat{a}^\dagger(k)$ en $\hat{a}(k)$ de creatie- en annihilatie-operatoren zijn ten opzichte van de continue 1-deeltjesbasis $\{\,|k\rangle : \; k \in \text{continu spectrum}\}$. We gaan nu bewijzen dat ook de N-deeltjes toestanden

$$\Big\{\,|k_1, \cdots, k_N\rangle \;\equiv\; \frac{1}{\sqrt{N!}}\,\hat{a}^\dagger(k_1)\cdots\hat{a}^\dagger(k_N)|\Psi^{(0)}\rangle : \quad k_1, \cdots, k_N \in \{k\}\Big\}$$

een orthonormale N-deeltjesbasis vormen.

(ii) Gebruik de unitaire basistransformatie die beide sets creatie- en annihilatie-operatoren met elkaar verbindt om af te leiden dat

$$\int\!\mathrm{d}k_1\cdots\!\int\!\mathrm{d}k_N\; |k_1, \cdots, k_N\rangle\langle k_1, \cdots, k_N| \;=\; \sum_{i_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{i_N=1}^{\infty} \frac{\hat{a}_{i_1}^\dagger\cdots\hat{a}_{i_N}^\dagger\,|\Psi^{(0)}\rangle\langle\Psi^{(0)}|\,\hat{a}_{i_N}\cdots\hat{a}_{i_1}}{N!} \,.$$

(iii) Bewijs tenslotte dat voor zowel bosonen als fermionen geldt dat

$$\sum_{i_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{i_N=1}^{\infty} \frac{\hat{a}_{i_1}^\dagger\cdots\hat{a}_{i_N}^\dagger\,|\Psi^{(0)}\rangle\langle\Psi^{(0)}|\,\hat{a}_{i_N}\cdots\hat{a}_{i_1}}{N!} \;=\; \sum_{\{n_j\}_N} |n_1, n_2, \cdots\rangle\langle n_1, n_2, \cdots| \;=\; \hat{1}_N \,.$$

Hint: aan de linkerkant van de vergelijking kunnen bepaalde creatie- en annihilatie-operatoren meerdere keren voorkomen. Raap die operatoren samen door bijvoorbeeld $\hat{a}_{i_1}^\dagger\cdots\hat{a}_{i_N}^\dagger$ in de vorm $(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}\cdots$ te brengen. Bepaal de juiste wegingsfactor door te tellen op hoeveel manieren dezelfde set bezettingsgetallen door de kwantumgetallen $i_1, \cdots, i_N$ gerealiseerd kan worden.

(iv) Een willekeurige N-deeltjes toestandsfunctie $|\Psi\rangle$ kan derhalve in de k-representatie worden weergegeven door de functie $\psi(k_1, \cdots, k_N) \equiv \langle k_1, \cdots, k_N|\Psi\rangle$. Leg uit dat deze functie volledig symmetrisch is voor bosonen en volledig antisymmetrisch voor fermionen.

Opgave 4: Ruimtelijke paarinteracties in de Fock-ruimte

Doel: voorbereiding op het onderwerp superfluïditeit (zie § 1.6.4)

Beschouw een systeem bestaande uit een willekeurig aantal identieke spin-s deeltjes met massa m. Stel de deeltjes hebben een ruimtelijke onderlinge paarinteractie beschreven door de observabele $U(\hat{\vec{r}}_1 - \hat{\vec{r}}_2)$. Deze observabele is diagonaal in de plaatsrepresentatie, zodat de totale operator voor ruimtelijke paarinteracties tussen de deeltjes wordt gegeven door

$$\hat{U}_{\rm paar} \equiv \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1,\sigma_2} \int \mathrm{d}\vec{r}_1 \int \mathrm{d}\vec{r}_2 \, U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \, \hat{\psi}^\dagger_{\sigma_1}(\vec{r}_1) \, \hat{\psi}^\dagger_{\sigma_2}(\vec{r}_2) \, \hat{\psi}_{\sigma_2}(\vec{r}_2) \, \hat{\psi}_{\sigma_1}(\vec{r}_1) \; . \qquad (1)$$

Hier zijn $\hat{\psi}^\dagger_\sigma(\vec{r})$ en $\hat{\psi}_\sigma(\vec{r})$ de creatie- en annihilatie-operatoren in de plaatsrepresentatie voor deeltjes met spincomponent $\sigma\hbar$ langs de kwantisatie-as.

(i) Hoe wordt zo'n type veeldeeltjesobservabele genoemd?

(ii) Uitdaging: wat zijn de eigenschappen van deze veeldeeltjesobservabele als de deeltjes spin 1/2 hebben en de potentiaal de vorm heeft van een 3-dimensionale δ-functie: $U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \propto \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$? Wat weet je over de spin van de interagerende deeltjesparen?

(iii) Laat zien dat vergelijking (1) in de impulsrepresentatie wordt gegeven door

$$\hat{U}_{\rm paar} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1,\sigma_2} \int \mathrm{d}\vec{k} \int \mathrm{d}\vec{p}_1 \int \mathrm{d}\vec{p}_2 \, \mathcal{U}(\vec{k}) \, \hat{a}^\dagger_{\sigma_1}(\vec{p}_1) \, \hat{a}^\dagger_{\sigma_2}(\vec{p}_2) \, \hat{a}_{\sigma_2}(\vec{p}_2 + \hbar\vec{k}) \, \hat{a}_{\sigma_1}(\vec{p}_1 - \hbar\vec{k}) \; ,$$

waarbij $\hat{a}^\dagger_\sigma(\vec{p})$ en $\hat{a}_\sigma(\vec{p})$ de creatie- en annihilatie-operatoren zijn in de impulsrepresentatie. Gebruik de definities en Fourier-integralen uit het dictaat alsmede de ontbinding $U(\vec{r}) \equiv \int \mathrm{d}\vec{k} \, \mathcal{U}(\vec{k}) \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})$. Tevens zal je in de afleiding de integraalidentiteiten (A.14) en (A.15) nodig hebben.

(iv) Welke symmetrie-eigenschap zit in deze uitdrukking verborgen?

(v) Beredeneer dat $\mathcal{U}(\vec{k}) \equiv (2\pi)^{-3} \int \mathrm{d}\vec{r} \, U(\vec{r}) \exp(-i\vec{k}\cdot\vec{r})$ alleen afhangt van $|\vec{k}\,|$ als $U(\vec{r})$ alleen afhangt van $|\vec{r}\,|$.

Opmerking: als het systeem opgesloten zit in een macroscopische omsluiting, dan wordt het impulsspectrum discreet en maken de Fourier-integralen plaats voor overeenkomstige Fourier-reeksen (zie App. A en Hst. 2 van het dictaat).