Opgaven bij het college Analytische Mechanica
Week 3

Opgave 7: Hamiltonianen en totale energie

Beschouw een systeem met uitsluitend conservatieve krachtvelden. Geschreven in termen van Cartesische coördinaten wordt de Lagrangiaan van dit systeem gegeven door

$$L\big(\{x_j\},\{\dot{x}_j\}\big) \;=\; \frac{1}{2}\sum_j m_j\,\dot{x}_j^2 \,-\, V(\{x_j\}) \;=\; T\big(\{\dot{x}_j\}\big) \,-\, V\big(\{x_j\}\big)\;.$$

(i) Laat zien dat de Hamiltoniaan $H \,\equiv\, \sum_j p_{x_j}\,\dot{x}_j - L\big(\{x_j\},\{\dot{x}_j\}\big)$ overeenkomt met de totale energie van het systeem, hetgeen gegeven wordt door de som $E = T + V$ van kinetische en potentiële energie

(ii) Leg uit dat deze totale energie een behouden grootheid is.

(iii) Ga vervolgens over op de gegeneraliseerde coördinaten $q_k \equiv q_k(\{x_j\},t)$. Gebruik de relatie $p_{q_k} \,=\, \sum_j p_{x_j}\big(\partial x_j/\partial q_k\big)$ om het volgende te bewijzen:

$$\sum_k p_{q_k}\,\dot{q}_k \;=\; \sum_j p_{x_j}\left(\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} \,-\, \frac{\partial x_j}{\partial t}\right) \;=\; 2T \,-\, \sum_j p_{x_j}\,\frac{\partial x_j}{\partial t}\;.$$

(iv) Onder welke voorwaarde is $H' \,\equiv\, \sum_k p_{q_k}\,\dot{q}_k - L$ nu gelijk aan de totale energie?

Opgave 8: Rotatiesymmetrie en behoud van impulsmoment

Beschouw een 3-dimensionaal N-deeltjessysteem met Cartesische coördinaten $\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N$. Deze coördinaten voldoen aan randvoorwaarden van het type $f_k(\{\vec{r}_j\}) \,=\, 0$. Afgezien van de bijbehorende reactiekrachten heeft het systeem uitsluitend conservatieve krachten die in de Lagrangiaan zijn opgenomen. Neem aan dat zowel de potentiaal $V(\{\vec{r}_j\})$ als de randvoorwaarden $f_k(\{\vec{r}_j\}) = 0$ invariant zijn onder een infinitesimale rotatie van alle plaatsvectoren over een constante hoek $\delta\phi$ rond de vaste eenheidsrichting $\vec{e}_n$:

$$\underset{j}{\forall}\quad \vec{r}_j(t) \;\to\; \vec{r}_j(t) + \delta\phi\,\big(\vec{e}_n\times\vec{r}_j(t)\big) \;=\; \vec{r}_j(t) + \delta\vec{r}_j(t)\;.$$

(i) Leg uit dat ook de kinetische energie invariant is onder deze infinitesimale rotatie.

(ii) Welke collectieve grootheid is op grond hiervan behouden?
Hint: gebruik de vectoridentiteit $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}\,) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}\,) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}\,)$.

Opgave 9: Rotaties van een star lichaam

De rotatie van een star lichaam kan worden beschreven in termen van de tijdsafhankelijkheid van een drietal hoeken φ, ϑ en ψ, de zogenaamde hoeken van Euler (zie later). Stel de Lagrangiaan van het beschouwde systeem heeft de volgende gedaante:

$$L \;=\; \frac{1}{2}\,I_1\left(\dot\vartheta^2+\dot\varphi^2\sin^2\!\vartheta\right)\;+\;\frac{1}{2}\,I_2\left(\dot\varphi\cos\vartheta+\dot\psi\right)^2-\;A\cos\vartheta\ ,$$

waarbij I_1 en I_2 (constante) traagheidsmomenten zijn. De eerste twee termen representeren de kinetische energie van de rotatie, terwijl de term $A\cos\vartheta$ de potentiële energie van het systeem is. Neem verder aan dat alle voor de beweging relevante krachten hier zijn meegenomen.

(i) Bepaal de drie cyclische variabelen van deze Lagrangiaan.

(ii) Welke twee impulsen zijn dus behouden?

(iii) Laat zien dat geldt dat

$$\dot\varphi \;=\; \frac{p_\varphi-p_\psi\cos\vartheta}{I_1\sin^2\vartheta} \qquad \text{en} \qquad \dot\psi+\dot\varphi\cos\vartheta \;=\; \frac{p_\psi}{I_2}\ .$$

(iv) Leid vervolgens af dat de bewegingsvergelijking behorende bij de hoek $\vartheta(t)$ de volgende vorm heeft:

$$I_1\,\ddot\vartheta\;-\;\frac{\cos\vartheta}{I_1\sin^3\vartheta}\,(p_\varphi-p_\psi\cos\vartheta)^2\;+\;\frac{p_\psi}{I_1\sin\vartheta}\,(p_\varphi-p_\psi\cos\vartheta)\;-\;A\sin\vartheta\;=\;0\ .$$

(v) Gebruik onderdeel (i) om te laten zien dat de totale energie $E=T+V$ van het starre lichaam een behouden grootheid is.