Opgaven bij het college Kwantummechanica 2
Week 3

Opgave 6: Vrij deeltje in het Heisenbergbeeld

Beschouw een vrij spin-0 deeltje met massa m en bijbehorende Hamilton-operator

$$\hat{H} \;=\; \frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2m} \;=\; \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2}{2m}$$

in het Schrödingerbeeld. Laat aan de hand van de bewegingsvergelijkingen van Heisenberg zien dat de plaats- en impulsoperatoren in het Heisenbergbeeld worden gegeven door

$$\hat{\vec{r}}_{H}(t) \;=\; \frac{\hat{\vec{p}}}{m}\,(t - t_0) \,+\, \hat{\vec{r}} \qquad \text{en} \qquad \hat{\vec{p}}_{H}(t) \;=\; \hat{\vec{p}}\;,$$

met $\hat{\vec{r}}$ en $\hat{\vec{p}}$ de tijdsonafhankelijke plaats- en impulsoperatoren in het Schrödingerbeeld. Neem hierbij aan dat beide beelden samenvallen op het tijdstip $t = t_0$ en gebruik waar nodig de commutator-algebra uit opgave 2.

Opgave 7: De padintegraal voor een homogeen zwaartekrachtsveld

Beschouw een systeem bestaande uit een spin-0 deeltje met massa m bewegend in één dimensie onder invloed van de zwaartekrachtspotentiaal $V(X) = m\mathrm{g}X$. De bijbehorende klassieke Lagrangiaan van dit systeem wordt dan gegeven door

$$L(X,\dot{X}) \;=\; \frac{1}{2}\,m\dot{X}^2 \,-\, m\mathrm{g}X\;,$$

met $\dot{X}$ de tijdsafgeleide van X. De tijdsevolutie van het systeem over het positieve tijdsinterval $T \in [0,t]$ wordt beschreven door de propagator $K(x,t;x',0)$ die te verkrijgen is uit de padintegraal van Feynman. Ontbind de paden in deze padintegraal volgens

$$X(T) \;=\; x_{cl}(T) \,+\, q(T)\;,$$

waarbij $x_{cl}(T)$ de oplossing is van de klassieke Lagrange-vergelijking $\ddot{x}_{cl}(T) = -\,\mathrm{g}$ met randvoorwaarden $x_{cl}(0) = x'$ en $x_{cl}(t) = x$. Een willekeurig pad is zo dus vastgelegd in termen van de afwijking $q(T)$ ten opzichte van het vaste klassieke pad. Deze afwijking, die ook wel kwantumfluctuatie wordt genoemd, doorloopt een gesloten traject in verband met de randvoorwaarden $q(0) = q(t) = 0$.

(i) Gebruik dat $\ddot{x}_{cl}(T) = -\,\mathrm{g}$ en dat $q(0) = q(t) = 0$ om te bewijzen dat de actie

$$S(t,0) \;=\; \int_0^t \mathrm{d}T\; L\big(X(T),\dot{X}(T)\big)$$

nu kan worden geschreven in de volgende additieve vorm:

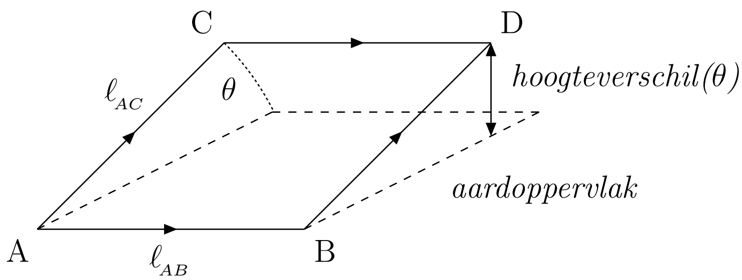
$$S(t,0) \;=\; \int_0^t \mathrm{d}T\; L\big(x_{cl}(T),\dot{x}_{cl}(T)\big) \;+\; \int_0^t \mathrm{d}T\; \frac{m}{2}\,\big[\dot{q}(T)\big]^2 \;\equiv\; S_{cl}(t,0) + S_q(t,0)\ .$$

(ii) Gebruik de definitie van de padintegraal en het feit dat het klassieke pad vastligt (en dus niet gevarieerd wordt) om te laten zien dat de propagator wordt gegeven door

$$K(x,t;x',0) \;=\; \exp\big(iS_{cl}(t,0)/\hbar\big) \int_{q(T=0)\,=\,0}^{q(T=t)\,=\,0} \mathcal{D}[q(T)]\; \exp\big(iS_q(t,0)/\hbar\big)\ .$$

(iii) Toon aan dat bij constante translatie van de paden over een afstand a de propagator slechts in fase verschuift volgens $K(x{+}a,t;x'{+}a,0)/K(x,t;x',0) = \exp(-imgta/\hbar)$. Hint: bekijk eerst het gedrag van $x_{cl}(T)$, $\dot{x}_{cl}(T)$, $q(T)$ en $\dot{q}(T)$ onder de translatie.

(iv) Beschouw vervolgens het zwaartekrachtsexperiment uit het dictaat. Het gaat hierbij om een neutron-interferometer waarvan de segmenten AB en CD (lengte $\ell_{AB} = \ell_{CD}$) evenwijdig aan het aardoppervlak lopen en evenwijdig aan elkaar (zie plaatje). Neem verder voor het gemak aan dat de segmenten AC en BD (lengte $\ell_{AC} = \ell_{BD}$) loodrecht staan op de segmenten AB en CD. Het vlak van de volledige lus ABDCA is om de bundelas AB gedraaid zodat het een hoek θ maakt met het aardoppervlak.



Vertaal deze experimentele toepassing in termen van het voorgaande. Neem hierbij aan dat de neutronen met constante impuls $p = |\vec{p}|$ de trajecten ABD dan wel ACD doorlopen. Leid af dat het kwantummechanische faseverschil tussen de evoluties op beide trajecten wordt gegeven door

$$\varphi_{ABD} - \varphi_{ACD} \;=\; \frac{M_n^2}{\hbar p}\,\mathrm{g}\,A_{\text{lus}}\sin\theta\ ,$$

waarbij M_n de massa is van het neutron en $A_{\text{lus}} = \ell_{AB}\,\ell_{AC}$ de oppervlakte van het vlak dat door de beide trajecten wordt omsloten.

(v) Uitdaging: herhaal de truc uit onderdeel (i) voor een willekeurige potentiaal $V(X)$. Voor welke potentiaal $V(X) \neq cX$ heeft de actie wederom een additieve vorm?