

Opgaven bij het college Analytische Mechanica

Week 4

Opgave 10: Hoofdassen, hoofdtraagheidsmomenten en symmetrieën

Beschouw een 2-dimensionaal star lichaam in het xy -vlak. Dit lichaam heeft traagheidsmomenten I_{xx} en I_{yy} en een deviatiemoment I_{xy} voor rotaties rond in het xy -vlak gelegen assen die door de oorsprong O gaan. Ga vervolgens over op een nieuw coördinatenstelsel dat gedraaid is over een hoek ϕ , zodat

$$x' = x \cos \phi + y \sin \phi \quad , \quad y' = -x \sin \phi + y \cos \phi .$$

- (i) In het nieuwe coördinatenstelsel worden de traagheidsmomenten gegeven door $I_{x'x'}$ en $I_{y'y'}$ en het deviatiemoment door $I_{x'y'}$. Leid het volgende verband af:

$$I_{x'x'} = \frac{1}{2} [1 + \cos(2\phi)] I_{xx} + \frac{1}{2} [1 - \cos(2\phi)] I_{yy} + \sin(2\phi) I_{xy} ,$$

$$I_{y'y'} = \frac{1}{2} [1 - \cos(2\phi)] I_{xx} + \frac{1}{2} [1 + \cos(2\phi)] I_{yy} - \sin(2\phi) I_{xy} ,$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{2} \sin(2\phi) (I_{yy} - I_{xx}) + \cos(2\phi) I_{xy} ,$$

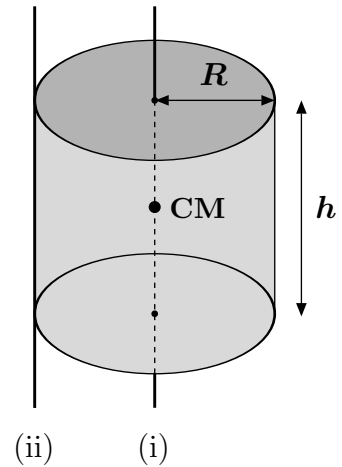
met $\sin(2\phi) = 2 \sin(\phi) \cos(\phi)$ en $\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)$.

- (ii) Voor een draaiingshoek ϕ_0 verdwijnt het nieuwe deviatiemoment. Aan welke vergelijking moet ϕ_0 dan voldoen en waarom ligt ϕ_0 slechts op een veelvoud van $\pi/2$ na vast?
- (iii) De x' -as en y' -as behorende bij de oplossing(en) uit onderdeel (ii) worden hoofdassen genoemd en de bijbehorende traagheidsmomenten heten hoofdtraagheidsmomenten. Voor rotaties rond deze hoofdassen geldt dat $\vec{L} = \vec{I} \cdot \vec{\omega} \parallel \vec{\omega}$. Toon dit aan.
- (iv) Druk de hoofdtraagheidsmomenten uit in termen van de oorspronkelijke traagheidsmomenten I_{xx} en I_{yy} en het deviatiemoment I_{xy} . Hint: ga niet meteen wild rekenen, maar kijk eerst eens wat je in feite in onderdeel (ii) hebt gedaan.
- (v) Stel dat $I_{xy} = 0$ én dat $I_{x'y'} = 0$ bij draaiing van het coördinatenstelsel over een hoek ϕ die geen veelvoud is van $\pi/2$.
- Bewijs dan dat beide hoofdtraagheidsmomenten aan elkaar gelijk moeten zijn.
 - Laat zien dat de traagheidsmomenten in dat geval niet veranderen bij overgang naar een willekeurig gedraaid coördinatenstelsel! Begrijp je ook waarom dat zo is?
 - Een platte cirkelvormige schijf met homogene massaverdeling is een voorbeeld van zo'n lichaam, mits $O = \text{CM}$ van de schijf. Uitdaging: bedenk een ander voorbeeld.

Opgave 11: Traagheidsmomenten van een homogene cilinder

Beschouw een cilinder met straal R , hoogte h en massa M . Neem aan dat de massa van de cilinder gelijkmatig (homogeen) verdeeld is.

- (i) Laat zien dat het traagheidsmoment voor rotaties rond de cilinderas wordt gegeven door $I = \frac{1}{2} MR^2$.
- (ii) Bereken het traagheidsmoment voor rotaties rond een vaste as die raakt aan het cilinderoppervlak en die evenwijdig is aan de cilinderas.



Opgave 12: Traagheidsmoment van een bol voor rotaties rond een rakende as

Bereken het traagheidsmoment van een bol met massa M en straal R voor rotaties rond een vaste as die raakt aan de bol. Neem aan dat de massa van de bol gelijkmatig (homogeen) verdeeld is.

Hint: in het collegedictaat is een ander traagheidsmoment van een homogene bol afgeleid, namelijk het traagheidsmoment voor rotaties rond een vaste as die door het massamiddelpunt (midden) van de bol gaat. Gebruik dit resultaat.