

Opgaven bij het college Kwantummechanica 3

Week 4

Opgave 6: Details bij het voorbeeld van gedwongen oscillatoren

Beschouw de gedwongen oscillator uit § 1.6.2 van het collegedictaat en de verzameling $\{|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-|\lambda|^2/2) \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle : \lambda \in \mathbb{C}\}$ van alle coherente toestanden, bestaande uit de verzameling van quasi-deeltjesvacua behorende bij willekeurige gedwongen oscillatoren. Hierbij staat $\{|n\rangle : n = 0, 1, \dots\}$ voor de gebruikelijke orthonormale basis van energie-eigentoestanden van de lineaire harmonische oscillator uit § 1.6.1.

- (i) Bewijs dat de overlapwaarschijnlijkheid tussen twee coherente toestanden wordt gegeven door $|\langle\lambda'|\lambda\rangle|^2 = \exp(-|\lambda|^2 - |\lambda'|^2 + \lambda\lambda'^* + \lambda^*\lambda') = \exp(-|\lambda - \lambda'|^2)$.
- (ii) De coherente toestanden zijn eigentoestanden van de loweringoperator \hat{a} van de lineaire harmonische oscillator. Hoe kan het dan dat deze eigentoestanden niet onderling orthogonaal zijn?
- (iii) Waarom kan de operator \hat{a}^\dagger geen eigentoestanden hebben, maar \hat{a} wel? Betrek de energie-eigentoestanden van de lineaire harmonische oscillator in je argumentatie.
- (iv) Coherente toestanden bij zeer grote eigenwaarden $|\lambda| \gg 1$ worden vaak geassocieerd met “klassieke systeemtoestanden”. Leg uit waarom het resultaat uit onderdeel (i) zo’n associatie ondersteunt, gelet op de eigenschappen die je van klassieke systeemtoestanden zou verwachten.
- (v) Leid met behulp van de bosonische identiteit $[\hat{a}, F(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)] = \partial F(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)/\partial \hat{a}^\dagger$ af dat

$$\hat{c} \equiv \hat{S}(\lambda)\hat{a}\hat{S}^\dagger(\lambda) = \hat{a} - \lambda\hat{1} \quad \text{voor} \quad \hat{S}(\lambda) = \exp(\lambda\hat{a}^\dagger - \lambda^*\hat{a}).$$

Opmerking: de gebruikte identiteit is het creatie/annihilatie-analogon van de welbekende 1-dimensionale commutatierelatie $[\hat{x}, F(\hat{x}, \hat{p})] = i\hbar \partial F(\hat{x}, \hat{p})/\partial \hat{p}$.

De overgang van bosonische kwanta behorende bij de lineaire harmonische oscillator naar de bosonische quasi-kwanta behorende bij de gedwongen oscillator wordt dus geïnduceerd door een unitaire transformatie.

Opgave 7: Het kwantummechanische bereik van Bose–Einstein condensaten

Doel: eerste kennismaking met het concept van lange-afstandscorrelaties

Beschouw het identieke N -deeltjessysteem bestaande uit niet-interagerende spin-0 bosonen dat in het eerste deel van § 1.6.4 van het collegedictaat is beschreven. Stel dat dit systeem zich in de impulsbasistoestand $|\Psi\rangle$ bevindt die gekarakteriseerd wordt door de bezettingsgetallen $n_k^{(0)}$ in de impulsrepresentatie. Beschouw voor deze toestand de correlatiefunctie

$$\rho_1(\vec{r} - \vec{r}') \equiv \langle \Psi | \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r}') | \Psi \rangle$$

in termen van de creatie- en annihilatie-operatoren $\hat{\psi}^\dagger(\vec{r})$ en $\hat{\psi}(\vec{r})$ in de plaatsruimte.

(i) Waarom is $\rho_1(\vec{r} - \vec{r}')$ op te vatten als een maat voor de kwantummechanische 1-deeltjes correlaties van de toestandsfunctie $|\Psi\rangle$ over afstanden $|\vec{r} - \vec{r}'|$?

(ii) In de impulsrepresentatie gaat de correlatiefunctie over in

$$\rho_1(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \langle \Psi | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{\vec{k}'} | \Psi \rangle \exp(i\vec{k}' \cdot \vec{r}' - i\vec{k} \cdot \vec{r}) .$$

Laat zien dat dit voor de impulsbasistoestand $|\Psi\rangle$ te vereenvoudigen is tot

$$\rho_1(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \langle \Psi | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} | \Psi \rangle \exp(-i(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{k}) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} n_k^{(0)} \exp(-i(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \vec{k}) .$$

(iii) Welke Fourier-modes zijn kwantummechanisch gezien relevant voor deze functie?

(iv) – Bepaal de correlatiefunctie voor $\vec{r} = \vec{r}'$.

– Geef aan wat dit resultaat precies inhoudt en of het overeenkomt met het antwoord dat je bij onderdeel (iii) hebt gegeven.

(v) Neem aan dat $n_0^{(0)} = \mathcal{O}(N)$ en $n_{\vec{k} \neq \vec{0}}^{(0)} \ll N$. We spreken in dat geval van een macroscopisch bezette 1-deeltjestoestand (of Bose–Einstein condensaat, zie Hst. 2).

– Bepaal de correlatiefunctie in de limiet $|\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow \infty$. Neem hierbij aan dat $n_{\vec{k} \neq \vec{0}}^{(0)}$ langzaam varieert tussen naburige \vec{k} -waarden [d.w.z. $n_{\vec{k}}^{(0)} \approx n_{\vec{0}}^{(0)} \delta_{\vec{k}, \vec{0}} + f(\vec{k})$] en gebruik een destructieve-interferentie argument om de sommatie uit te voeren.

– Wat is het wezenlijke verschil met situaties waarbij ook $n_0^{(0)} \ll N$?

– Voor een normaal (kwantum)gas verwachten we dat de correlatiefunctie verdwijnt voor $|\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow \infty$. Waarom blijft de aanwezigheid van het condensaat voelbaar over willekeurige afstanden, zodat er sprake is van “off-diagonal long-range order”?

Bogolyubov’s benadering: beschrijf het condensaat kwantummechanisch aan de hand van een complex getal (ordeparameter) $\psi_0 = \exp(i\phi_0) \sqrt{n_0^{(0)}/V}$ en expandeer de veldoperator $\hat{\psi}(\vec{r})$ in analogie met de gedwongen lineaire harmonische oscillator rond deze constante waarde: $\hat{\psi}(\vec{r}) = \psi_0 + \delta\hat{\psi}(\vec{r})$.