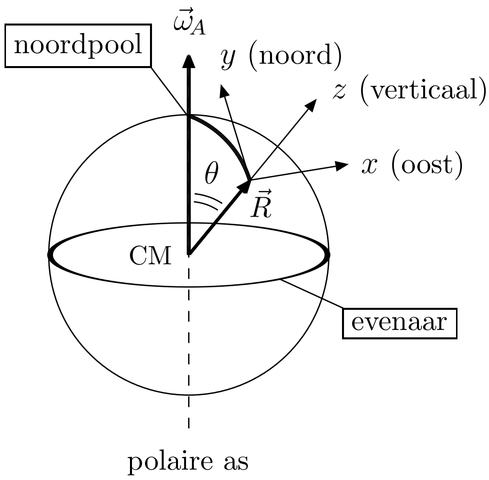
Opgaven bij het college Analytische Mechanica
Week 5

Opgave 13: Effectieve zwaartekracht aan het aardoppervlak



Beschouw een puntdeeltje met constante massa m dat zich in rust bevindt aan het aardoppervlak. Neem aan dat de beweging van de aarde bestaat uit een eenparige (vrije) beweging van het massamiddelpunt en een rotatiebeweging met constante hoeksnelheid $\vec{\omega}_A$ rond de polaire as. Vervolgens gaan we bekijken hoe de zwaartekracht verandert ten gevolge van de schijnkrachten die horen bij deze rotatiebeweging. Hiertoe gebruiken we een met het aardoppervlak meedraaiend coördinatenstelsel met de z-as radieel naar buiten gericht, de x-as wijzend naar het oosten en de y-as wijzend naar het noorden (zie plaatje). De oorsprong van het coördinatenstelsel valt samen met de positie van het beschouwde puntdeeltje.

(i) Welke schijnkracht dient in dit coördinatenstelsel te worden meegenomen bij de beschrijving van het puntdeeltje?

(ii) Bepaal nu de effectieve zwaartekracht dat het puntdeeltje ondervindt. Neem voor het gemak aan dat de aarde bolvormig is, zodat de (inertiaal) zwaartekrachtsversnelling $\vec{\mathrm{g}} = -\mathrm{g}\,\vec{e}_z$ overal aan het aardoppervlak hetzelfde is.

(iii) Waar is de correctieterm ten gevolge van schijnkrachten het grootst?

Opgave 14: Roterende coördinatenstelsels en de Lagrangiaanmethode

Beschouw een vrij bewegend deeltje in drie dimensies met Lagrangiaan $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2}$.
Ga nu over op gegeneraliseerde (roterende) coördinaten $\vec{q}$ volgens $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{q}} + \vec{\omega}\times\vec{q}$, zodat

$$L = \frac{1}{2}m\left[\dot{\vec{q}}^{\,2} + 2\dot{\vec{q}}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{q}) + \vec{\omega}^{\,2}\vec{q}^{\,2} - (\vec{\omega}\cdot\vec{q})^2\right] .$$

Leid daaruit af dat

$$m\ddot{\vec{q}} = -m\left[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{q}) + 2\vec{\omega}\times\dot{\vec{q}} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{q}\right] ,$$

gebruik makende van vergelijking (70) in het collegedictaat alsmede de vectoridentiteit $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.

Opgave 15: Traagheidsmomenten van een 4-deeltjessysteem ten opzichte van een lichaamsvast assenstelsel

Beschouw een star lichaam bestaande uit vier puntdeeltjes. Twee puntdeeltjes hebben constante massa m en twee puntdeeltjes hebben constante massa $2m$. Ten opzichte van het lichaamsvaste assenstelsel $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ zijn de deeltjes gelocaliseerd op de volgende posities:

$$\begin{array}{llllll}
\text{deeltje 1} & : & \text{massa } m & , & \text{positie} & 2\vec{e}_x - \vec{e}_z \ , \\
\text{deeltje 2} & : & \text{massa } m & , & \text{positie} & -\,2\vec{e}_y - \vec{e}_z \ , \\
\text{deeltje 3} & : & \text{massa } 2m & , & \text{positie} & -\,\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z \ , \\
\text{deeltje 4} & : & \text{massa } 2m & , & \text{positie} & 2\vec{e}_z \ .
\end{array}$$

(i) Bepaal de positie van het massamiddelpunt van het starre lichaam.

(ii) Laat zien dat de traagheidstensor van het starre lichaam de volgende vorm heeft ten opzichte van het gegeven lichaamsvaste assenstelsel:

$$\vec{\vec{I}}_v \ = \begin{pmatrix} 18m & 2m & 0 \\ 2m & 18m & 0 \\ 0 & 0 & 12m \end{pmatrix} .$$

(iii) Stel het lichaam roteert met constante hoeksnelheid $\vec{\omega} = \Omega(-\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z)$ rond een as die door de oorsprong gaat van het lichaamsvaste assenstelsel.

- Bepaal het impulsmoment van de zuivere rotatiebeweging.
- Bepaal de bijbehorende kinetische energie.
- Bereken het krachtmoment dat nodig is voor deze zuivere rotatiebeweging.

(iv) Bepaal de hoofdtraagheidsmomenten van het lichaam.

(v) Geef de richtingen van de hoofdassen, d.w.z. de eigenvectorrichtingen van $\vec{\vec{I}}_v$.

(vi) Neem tenslotte aan dat er geen externe krachten op het lichaam werken. Wat zegt het tennisracket-theorema dan over de stabiliteit van rotaties rond de hoofdassen?