Opgaven bij het college Kwantummechanica 3
Week 5

Opgave 8: **Details bij het voorbeeld van zwak-repulsieve spin-0 bosonen**

Gebruik §1.6.4–1.6.6 van het collegedictaat bij het maken van deze opgave

Beschouw de Bogolyubov-transformatie uit § 1.6.5 en definieer de genormeerde toestand

$$|\tilde{0}\rangle \;\equiv\; \frac{1}{u_1}\,\exp\Big(-\,\frac{v_1}{u_1}\,\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger\Big)\,|0,0\rangle \;=\; \frac{1}{u_1}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{-\,v_1}{u_1}\Big)^n\,|n,n\rangle \;,$$

waarbij $|n_1, n_2\rangle$ de gangbare telbasistoestanden zijn in de oorspronkelijke deeltjesinterpretatie (d.w.z. de deeltjesinterpretatie voorafgaande aan de Bogolyubov-transformatie). Zoals onmiddellijk is af te lezen bestaat deze toestand uit coherent gecreëerde deeltjesparen!

(i) Laat zien dat

$$\hat{a}_1\,|\tilde{0}\rangle \;=\; -\,\frac{v_1}{u_1}\,\hat{a}_2^\dagger\,|\tilde{0}\rangle \qquad \text{en} \qquad \hat{a}_2\,|\tilde{0}\rangle \;=\; -\,\frac{v_1}{u_1}\,\hat{a}_1^\dagger\,|\tilde{0}\rangle \;.$$

Hint: gebruik hiervoor de bosonische identiteit $\big[\hat{a}, F(\hat{a},\hat{a}^\dagger)\big] \;=\; \partial F(\hat{a},\hat{a}^\dagger)/\partial \hat{a}^\dagger$.

(ii) – Leid hieruit af dat de toestand $|\tilde{0}\rangle$ voldoet aan de identiteiten

$$\hat{c}_1\,|\tilde{0}\rangle \;=\; \hat{c}_2\,|\tilde{0}\rangle \;=\; 0 \quad , \quad \hat{c}_1^\dagger\,|\tilde{0}\rangle \;=\; \frac{1}{u_1}\,\hat{a}_1^\dagger\,|\tilde{0}\rangle \qquad \text{en} \qquad \hat{c}_2^\dagger\,|\tilde{0}\rangle \;=\; \frac{1}{u_1}\,\hat{a}_2^\dagger\,|\tilde{0}\rangle$$

voor de quasi-deeltjes creatie- en annihilatie-operatoren $\hat{c}_{1,2}^\dagger$ en $\hat{c}_{1,2}$ uit § 1.6.5.

– Hoe zou je de toestand $|\tilde{0}\rangle$ dus noemen?

(iii) Toon aan dat $\langle\tilde{0}|\,\hat{a}_1^\dagger\,\hat{a}_1\,|\tilde{0}\rangle = \langle\tilde{0}|\,\hat{a}_2^\dagger\,\hat{a}_2\,|\tilde{0}\rangle = v_1^2$.

In § 1.6.6 wordt voor elk paar spin-0 deeltjes met tegengestelde impulsen $\vec{q} \neq \vec{0}$ en $-\vec{q}$ een Bogolyubov-transformatie uitgevoerd met transformatieparameters $u_{\vec{q}}$ en $v_{\vec{q}}$ om van de beschrijving in termen van deeltjes over te gaan naar een beschrijving in termen van quasideeltjes. Deze quasi-deeltjes corresponderen met een benadering voor de excitaties die in het zwak-repulsieve systeem kunnen optreden. De benadering voor de grondtoestand van het interagerende systeem, d.w.z. de toestand zonder excitaties, heeft dan de volgende vorm in termen van de niet-interagerende grondtoestand $|n_{\vec{0}} = N, n_{\vec{k}\neq\vec{0}} = 0\rangle$:

$$|\Psi_{\text{grond}}\rangle \;\approx\; |\Psi_{\text{Bog}}\rangle \;\equiv\; \prod_{\text{paren}} \frac{1}{u_{\vec{q}}}\,\exp\Big(-\,\frac{v_{\vec{q}}}{u_{\vec{q}}}\,\hat{b}_{\vec{q}}^\dagger\,\hat{b}_{-\vec{q}}^\dagger\Big)\,|n_{\vec{0}} = N, n_{\vec{k}\neq\vec{0}} = 0\rangle \;,$$

waarbij het product over alle verschillende paren $(\vec{q}\,, -\vec{q}\,) \neq \vec{0}$ loopt. De definitie van de operator $\hat{b}_{\vec{q}\neq\vec{0}}^\dagger$ kan je vinden op pagina 37 van het collegedictaat.

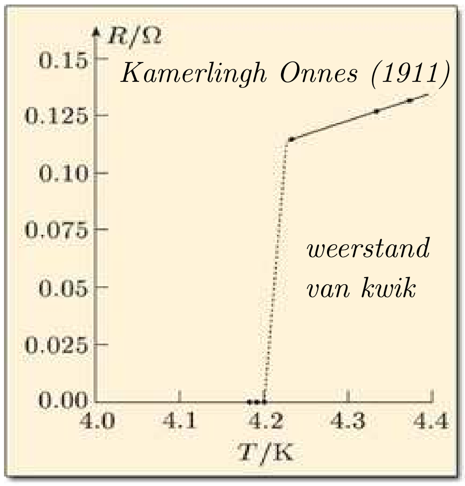
(iv) Leg uit dat $|\Psi_{\rm Bog}\rangle$ een toestand beschrijft met een vast aantal N spin-0 deeltjes.

(v) – Benader $\langle\Psi_{\rm Bog}|\hat{n}_{\vec{0}}|\Psi_{\rm Bog}\rangle \approx \langle\Psi_{\rm Bog}|\big(\hat{N} - \sum\limits_{\vec{k}\neq\vec{0}} \hat{b}^{\dagger}_{\vec{k}}\hat{b}_{\vec{k}}\big)|\Psi_{\rm Bog}\rangle$ in termen van N en $v_{\vec{q}}$.

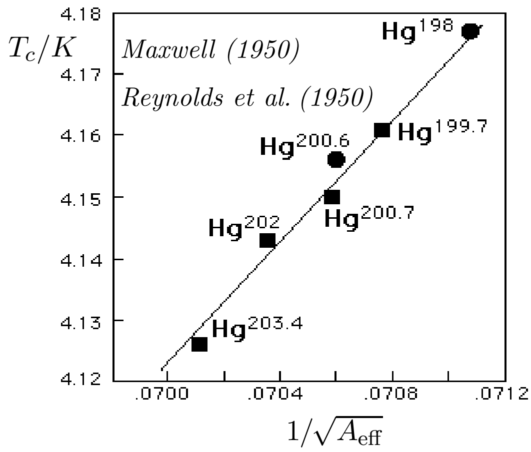
– Waaraan moeten de parameters $v_{\vec{q}}$ (en dus feitelijk de interactie) voldoen wil de benaderingsmethode in § 1.6.4 zinvol zijn?

Cooper-paren in lage-temperatuur supergeleiders

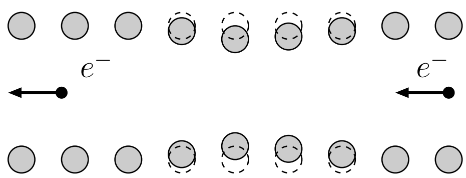
We spreken van een supergeleider als de weerstand van een geleider abrupt verdwijnt beneden een bepaalde kritische temperatuur T_c (zie plaatje). Een deel van de ladingsdragende geleidingselektronen zit dan in een collectieve superfluïde toestand, zodat ze zich wrijvingsloos door het ionenrooster van de geleider kunnen voortbewegen. De lage snelheid van zo'n superfluïde stroming wordt gecompenseerd door het massale karakter van het superfluïde collectief, zodat desondanks toch een substantiële stroom kan worden gegenereerd.



Het rooster speelt een rol: door verschillende isotopen voor de roosterionen te gebruiken werd experimenteel aangetoond dat naast de elektronenconfiguratie ook het rooster zelf een rol speelt bij het tot stand komen van supergeleiding. Er werd namelijk gevonden dat de kritische temperatuur T_c voor lage-temperatuur supergeleiding in dat geval afhing van de massa $A_{\rm eff}$ van het isotoop in atomaire massa-eenheden.



BCS theorie en Cooper-paren: het fysische plaatje achter de voorgaande observaties werd in 1957 geformuleerd in de zogenaamde BCS (Bardeen–Cooper–Schrieffer) theorie. De BCS theorie zegt dat een geleidingselektron dat zich door het rooster voortbeweegt excitaties (golven) veroorzaakt in het rooster (fononemissie). De roosterionen zijn immers positief geladen en worden dus door het negatief geladen elektron aangetrokken, waardoor het rooster een lichte vervorming ondergaat. De tijdschaal waarop deze vervorming in de



Het Cooper-paar concept

tijd evolueert is zeer langzaam (adiabatisch) vergeleken bij de bewegingen van de veel lichtere elektronen. Alvorens het rooster nu terugveert kan een ander elektron worden aangetrokken door de ontstane fluctuatie in de ladingsdichtheid. Dit elektron kan vervolgens de gekwantiseerde roostertrilling absorberen (fononabsorptie). Ten gevolge van deze lange-afstandsinteractie via het rooster kan nu een netto attractieve interactie ontstaan tussen paren van elektronen die elkaar normaalgesproken zouden afstoten. Zo'n attractief elektronpaar wordt een Cooper-paar genoemd. Het is de "vloeistof" van deze Cooper-paren dat zich bij voldoende lage temperaturen wrijvingsloos door het rooster kan voortbewegen (in analogie met het "two-fluid model" voor superfluïde ^{4}He).

Normale geleiders versus supergeleiders: aan de hand van dit model kunnen we onmiddellijk één van de fundamentele verschillen tussen normale geleiders en supergeleiders begrijpen. Des te starder het ionenrooster namelijk is

- des te beter is een normale geleider, aangezien de vrije weglengte voor de geleidingselektronen dan groter is;
- des te slechter is een supergeleider, aangezien er in verband met de verminderde interactie met het rooster minder Cooper-paarvorming zal plaatsvinden.

Opgave 9: Een attractief fermionpaar boven een volle Fermi-zee

Dit voorbeeld staat model voor de Cooper-instabiliteit in o.a. supergeleiding

Beschouw twee identieke fermionen met massa m en impulsen $\hbar\vec{k}_1$ en $\hbar\vec{k}_2$ uit het spectrum

$$\{\vec{p} = \hbar\vec{k} \,:\, k_{x,y,z} \;=\; 0, \pm 2\pi/L, \pm 4\pi/L, \cdots\} \qquad (L \in \mathbb{R})\,.$$

Neem aan dat alle 1-deeltjes impulstoestanden met $|\vec{k}| < k_F$ al bezet zijn door andere fermionen van hetzelfde type die verder gemakshalve buiten de beschouwing worden gelaten. Op grond van het Pauli-uitsluitingsprincipe moet dan voor het beschouwde fermionpaar $|\vec{k}_{1,2}| \geq k_F$ worden genomen. Afgezien hiervan worden alle spin- en identiteitsaspecten van de deeltjes weggelaten, d.w.z. doe verder alsof er sprake is van een systeem bestaande uit twee onderscheidbare spin-0 deeltjes! De essentie van het fenomeen van Cooper-instabiliteit is feitelijk al bevat in dit zeer vereenvoudigde systeem (zie beneden).

Stel dat tussen beide deeltjes een attractieve paarinteractie bestaat met matrixelementen

$$\langle \vec{k}_1', \vec{k}_2' | \hat{V} | \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle \;=\; -\,\lambda\,\delta_b\,\delta_{b'}\,\delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_2,\vec{k}_1'+\vec{k}_2'} \quad \text{waarbij} \quad \delta_{b^{(\prime)}} \;=\; \begin{cases} 1 & k_F \leq |\vec{k}_{1,2}^{(\prime)}| \leq k_M \\ \\ 0 & \text{anders} \end{cases}\,.$$

Hier zijn λ, k_F en k_M positieve reële constanten en ligt k_M vlak boven k_F. De orthonormale toestanden $|\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle$ beschrijven paren met impulseigenwaarden $\hbar\vec{k}_1$ en $\hbar\vec{k}_2$. We gaan nu op zoek naar de grondtoestand van dit 2-deeltjessysteem met Hamilton-operator

$$\hat{H} \;=\; \frac{\hat{\vec{p}}_1^{\,2} + \hat{\vec{p}}_2^{\,2}}{2m} + \hat{V} \; .$$

Aangezien de totale impuls van het deeltjespaar hier behouden is beschouwen we voor de grondtoestand een lineaire combinatie van orthonormale paartoestanden met vaste totale impuls $\hbar\vec{Q}$ en variabele relatieve impuls $\hbar\vec{q}$:

$$|\Psi_{\vec{Q}}\rangle \;\equiv\; \sum_{\vec{q}} \delta_b\, C_{\vec{Q}}(\vec{q}\,)\,|\vec{k}_1 = \tfrac{1}{2}\vec{Q} + \vec{q},\, \vec{k}_2 = \tfrac{1}{2}\vec{Q} - \vec{q}\,\rangle \; ,$$

waarbij $\vec{q}$ een beperkt waardenbereik doorloopt omdat $k_F \le |\frac{1}{2}\vec{Q} \pm \vec{q}\,| \le k_M$.

(i) Waarom is het niet zinvol om bij het zoeken naar de grondtoestand paartoestanden buiten de smalle band $k_F \le |\frac{1}{2}\vec{Q} \pm \vec{q}\,| \le k_M$ te beschouwen?

(ii) Leid uit de eigenwaardenvergelijking $\hat{H}\,|\Psi_{\vec{Q}}\rangle = E\,|\Psi_{\vec{Q}}\rangle$ af dat

$$C_{\vec{Q}}(\vec{q}\,') \;=\; \frac{-\lambda}{E - \hbar^2\vec{Q}^2/(4m) - \hbar^2\vec{q}\,'^2/m} \sum_{\vec{q}} \delta_b\, C_{\vec{Q}}(\vec{q}\,) \qquad \text{voor} \qquad k_F \le |\tfrac{1}{2}\vec{Q} \pm \vec{q}\,'| \le k_M \; .$$

Hint: projecteer op de orthonormale toestanden $\langle \vec{k}_1' \equiv \frac{1}{2}\vec{Q} + \vec{q}\,',\, \vec{k}_2' \equiv \frac{1}{2}\vec{Q} - \vec{q}\,'\,|$.

(iii) Sommeer dit tot $F_{\vec{Q}}(E) \;\equiv\; \displaystyle\sum_{\vec{q}\,'} \frac{\delta_{b'}}{E - \hbar^2\vec{Q}^2/(4m) - \hbar^2\vec{q}\,'^2/m} \;=\; -\frac{1}{\lambda}$.

(iv) Presentatie-opdracht: als je niet in het "presentatieteam" zit, dan mag je deze opdracht als een bonusopgave beschouwen.

- Maak een kwalitatieve schets van $F_{\vec{Q}}(E)$ en beredeneer dat voor de laagste energie-eigenwaarde E_{grond} geldt dat $E_{\text{grond}} < \hbar^2 k_F^2/m \;=\;$ de laagste energie van de twee afzonderlijke deeltjes, ongeacht de grootte van $\lambda > 0$. Beargumenteer hiertoe eerst wat $F_{\vec{Q}}(E)$ ruwweg doet als E een totale kinetische energie-eigenwaarde passeert.

  Er is dus een "gebonden" toestand, hoe zwak de attractieve interactie ook is. Dit fenomeen wordt de Cooper-instabiliteit genoemd.

- In welke opzichten verschilt zo'n binding van een gangbare binding, zoals in een molecuul, en wat is de rol van de Fermi-zee hierin?
- Geef in het kort aan wat er zal gebeuren als de deeltjes in de Fermi-zee wel worden meegenomen in de beschouwing terwijl de interactieband hetzelfde blijft.