Opgaven bij het college Analytische Mechanica
Week 6

Opgave 16: Rotaties van een dunne rechthoekige plaat

Beschouw een dunne (2-dimensionale) rechthoekige plaat met zijden a en b en massa M. De massa is gelijkmatig (homogeen) verdeeld over de plaat. Ga werken met een lichaamsvast assenstelsel waarvan de oorsprong samenvalt met het massamiddelpunt van de plaat.

(i) Beredeneer in welke richtingen de hoofdassen van dit lichaam liggen.

(ii) Laat zien dat de hoofdtraagheidsmomenten worden gegeven door

$$\frac{1}{12}\,M\,a^2 \quad , \quad \frac{1}{12}\,M\,b^2 \qquad \text{en} \qquad \frac{1}{12}\,M\,(a^2+b^2)\ .$$

(iii) Bereken het krachtmoment dat nodig is om de plaat met constante hoeksnelheid te laten roteren rond een diagonaal.

(iv) Waarom verdwijnt dit krachtmoment als $a=b$?

Opgave 17: Rotaties en de hoeken van Euler (zie dictaat)

Het verband tussen de oriëntatie van een hoofdassenstelsel met orthogonale eenheidsvectoren $\vec{e}_1\,,\,\vec{e}_2\,,\,\vec{e}_3$ en de oriëntatie van een inertiaalstelsel met orthogonale eenheidsvectoren $\vec{e}_{x_I}\,,\,\vec{e}_{y_I}\,,\,\vec{e}_{z_I}$ kan worden geschreven als:

$$\vec{e}_\alpha \;=\; \sum_k R_{\alpha k}\,\vec{e}_k \qquad \text{en} \qquad \vec{e}_k \;=\; \sum_\alpha \left(R^{-1}\right)_{k\alpha}\vec{e}_\alpha \;=\; \sum_\alpha R_{\alpha k}\,\vec{e}_\alpha\ ,$$

met $\alpha = 1,2,3$ en $k = x_I\,,y_I\,,z_I$. De coëfficiënten $R_{\alpha k}$ zijn de componenten van een $3{\times}3$ rotatiematrix

$$\vec{\vec{R}} \;=\; \begin{pmatrix} -\cos\vartheta\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi & \cos\vartheta\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi & \sin\vartheta\sin\psi \\ -\cos\vartheta\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi & \cos\vartheta\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi & \sin\vartheta\cos\psi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Evenzo kent het intermediaire assenstelsel $\vec{e}_x\,,\,\vec{e}_y\,,\,\vec{e}_z$ het volgende verband met het hoofdassenstelsel:

$$\vec{e}_\alpha \;=\; \sum_\xi R^{(\psi)}_{\alpha\xi}\,\vec{e}_\xi \qquad \text{en} \qquad \vec{e}_\xi \;=\; \sum_\alpha R^{(\psi)}_{\alpha\xi}\,\vec{e}_\alpha\ ,$$

met $\alpha = 1,2,3$ en $\xi = x,y,z$. De coëfficiënten $R^{(\psi)}_{\alpha\xi}$ zijn de componenten van een 3×3 rotatiematrix

$$\vec{\vec{R}}^{(\psi)} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Neem nu aan dat het hoofdassenstelsel roteert met een hoeksnelheid $\vec{\omega}$ ten opzichte van het inertiaalstelsel. In termen van de hoeken van Euler φ, ϑ en ψ geldt dan

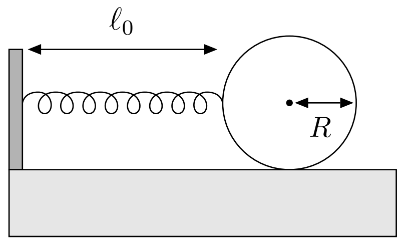
$$\vec{\omega} = (\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi)\,\vec{e}_1 + (\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\psi)\,\vec{e}_2 + (\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi})\,\vec{e}_3 .$$

Laat zien dat deze uitdrukking voor $\vec{\omega}$ equivalent is met de alternatieve schrijfwijzen

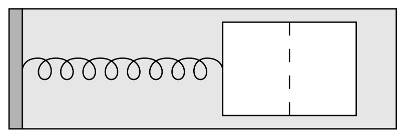
$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_{z_I} + \dot{\vartheta}\,\vec{e}_x + \dot{\psi}\,\vec{e}_3 = \dot{\vartheta}\,\vec{e}_x + \dot{\varphi}\sin\vartheta\,\vec{e}_y + (\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi})\,\vec{e}_z .$$

Opgave 18: Een rollende cilinder in een elastische potentiaal

Beschouw een starre cilinder met straal R en massa M. Neem aan dat de massa van de cilinder gelijkmatig (homogeen) verdeeld is. De cilinder ligt op een tafel en is verbonden met een vaste wand door middel van een veer met veerconstante k en rustlengte ℓ_0. Beschouw uitsluitend kleine verplaatsingen van de cilinder ten opzichte van de in het plaatje geschetste evenwichtspositie, waarbij de verplaatsing ontstaat doordat de cilinder wrijvingsloos (zonder te slippen) kan rollen om de cilinderas. Neem aan dat de veer zodanig aan de cilinder gemonteerd is dat het altijd loodrecht op de wand blijft staan.



Zij-aanzicht



Bovenaanzicht

(i) Leg uit dat dit systeem slechts één vrijheidsgraad heeft.

(ii) Laat zien dat de Lagrangiaan van dit systeem wordt gegeven door

$$L(x,\dot{x}) = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 ,$$

waarbij x de positie is van het massamiddelpunt van de cilinder ten opzichte van de in het plaatje geschetste beginsituatie.

(iii) Bepaal de trillingsfrequentie van de cilinder en verklaar het verschil met de overeenkomstige trillingsfrequentie dat een puntdeeltje met massa M zou ondervinden.