Opgaven bij het college Kwantummechanica 2
Week 6

Opgave 11: **Kort resumé hoofdstuk 1**

(i) Wanneer wordt de tijdsevolutie in de kwantummechanica beschreven door een unitaire operator en wat houdt het unitair zijn van deze operator feitelijk in?

(ii) Stel er is sprake van een geïsoleerd systeem.
- Geef aan wat je dan allemaal over het systeem weet.
- Wat gebeurt er als functie van de tijd als de toestandsfunctie van het systeem uit meerdere energie-eigenfuncties bestaat?

(iii) Beschouw een systeem met Hamilton-operator $\hat{H}$. Het systeem heeft een symmetrie onder continue ruimtelijke (tijdsonafhankelijke) transformaties met generator $\hat{G}$.
- Geef aan wat je dan allemaal over het systeem weet.
- Waarom mengt $\hat{H}$ geen eigentoestanden van $\hat{G}$ bij verschillende eigenwaarden?

(iv) Leg uit wat een generator is en maak een lijstje van de generatoren en bijbehorende symmetrieën die je tot nu toe bent tegengekomen. Geef hierbij aan of de generator op de spinruimte werkt of niet.

(v) Beschouw een systeem met pariteitssymmetrie. Geef de selectieregels waaraan de bijbehorende Hamilton-operator $\hat{H}$ dan moet voldoen.

Extraatje: **Een paar details van het Stern−Gerlach experiment**

Lees eerst de beschrijving van het Stern−Gerlach experiment op pagina's 64 t/m 67 van het collegedictaat. Beschouw een spin-1/2 deeltje dat onder invloed staat van een magneetveld. In de spinruimte heeft de Hamilton-operator van dit systeem de volgende vorm:

$$\hat{H}^{\,\text{spin}} \;=\; C\vec{\mathcal{B}}\cdot\hat{\vec{S}} \;=\; C\big(\vec{e}_z\mathcal{B}_0 + [z\,\vec{e}_z - x\,\vec{e}_x]\mathcal{B}'\big)\cdot\hat{\vec{S}} \qquad (C\,,\mathcal{B}_0 \in \mathbb{R} \quad \text{en} \quad \mathcal{B}' \in \mathbb{R} \text{ klein})\ .$$

De term $\propto \mathcal{B}'$ brengt hier een lichte inhomogeniteit van het magnetisch veld in rekening. Op het tijdstip $t = 0$ bevindt het systeem zich in de genormeerde spintoestand

$$\chi(t=0) \;=\; a\,\chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} + b\,\chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \qquad (a,b \in \mathbb{C})\ ,$$

waarbij $\chi_{\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}}$ de gebruikelijke basisvectoren zijn voor spinkwantisatie langs de z-as.

(i) Laat zien dat bij verwaarlozing van de x-component van het magneetveld (zie dictaat) de spinvector evolueert volgens

$$\chi(t) \;=\; a\,\exp\bigl(-iCt\,[\mathcal{B}_0 + z\mathcal{B}']/2\bigr)\,\chi_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \;+\; b\,\exp\bigl(iCt\,[\mathcal{B}_0 + z\mathcal{B}']/2\bigr)\,\chi_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} \;.$$

(ii) Leid hieruit af dat de impulsverwachtingswaarde van het deeltje als volgt verandert:

$$\langle\hat{\vec{p}}\rangle_t \;-\; \langle\hat{\vec{p}}\rangle_{t=0} \;=\; \bigl(|b|^2 - |a|^2\bigr)\,\frac{\hbar}{2}\,Ct\mathcal{B}'\,\vec{e}_z \;,$$

ongeacht het ruimtelijke deel $\psi(\vec{r}\,)$ van de volledige toestandsfunctie. Je mag hierbij aannemen dat dit ruimtelijke deel tijdsonafhankelijk is en op één is genormeerd.