Opgaven bij het college Kwantummechanica 3
Week 6

Opgave 10: Bogolyubov-transformatie voor fermionen

Doel: belichten van speciale eigenschappen van fermionische quasi-deeltjes

Beschouw de fermionische versie van de Bogolyubov-transformatie zoals beschreven in § 1.7.2 van het collegedictaat. Hiervan worden nu een paar aspecten belicht die bij de behandeling van supergeleiding en de relativistische kwantummechanica gaan terugkomen.

(i) Bekijk de genormeerde quasi-deeltjes vacuümtoestand $|\tilde{0}\rangle$ waarvoor $\hat{c}_{1,2}\,|\tilde{0}\rangle \equiv 0$.

- Laat zien dat $|\tilde{0}\rangle$ als volgt (op een fasefactor na) te ontbinden is in termen van de oorspronkelijke basistoestanden $|n_1, n_2\rangle$:

$$|\tilde{0}\rangle \;=\; u_1\,|0,0\rangle - v_1\,|1,1\rangle \;=\; \big(u_1 - v_1\,\hat{a}_1^\dagger\,\hat{a}_2^\dagger\big)\,|0,0\rangle \ .$$

  Waarschuwing: let goed op waar relatieve mintekens op kunnen treden.

- Toon aan dat dit voor $u_1 \neq 0$ is om te schrijven tot

$$|\tilde{0}\rangle \;=\; u_1 \exp\Big(-\,\frac{v_1}{u_1}\,\hat{a}_1^\dagger\,\hat{a}_2^\dagger\Big)\,|0,0\rangle \ .$$

- Bepaal de verwachtingswaarden $\langle\tilde{0}|\,\hat{a}_1^\dagger\,\hat{a}_1\,|\tilde{0}\rangle$ en $\langle\tilde{0}|\,\hat{a}_2^\dagger\,\hat{a}_2\,|\tilde{0}\rangle$.

(ii) Beschouw een Bogolyubov-transformatie met $u_1 = 1 - v_1 = 0$.

- Met wat voor type quasi-deeltjes hebben we dan te maken?
- Ook voor deze quasi-deeltjes geldt het gebruikelijke Pauli-uitsluitingsprincipe. Wat houdt dit quasi-deeltjes uitsluitingsprincipe feitelijk in?
- Leid rechtstreeks uit de fundamentele (anti)commutatierelaties af dat dit speciale type Bogolyubov-transformatie wel mogelijk is voor fermionische systemen, maar niet voor bosonische systemen.

(iii) Bekijk nu de additieve 1-deeltjesgrootheid behorende bij de veeldeeltjesobservabele

$$\hat{A} \;=\; a\,\hat{a}_1^\dagger\,\hat{a}_1 + b\,\hat{a}_2^\dagger\,\hat{a}_2 \ ,$$

met a en b reële 1-deeltjes eigenwaarden. In de oorspronkelijke deeltjesinterpretatie creëert $\hat{a}_1^\dagger$ dus een deeltje met eigenwaarde a en $\hat{a}_2^\dagger$ een deeltje met eigenwaarde b. Vervolgens passen we weer een Bogolyubov-transformatie toe met $u_1 = 1 - v_1 = 0$. Wat zegt de grootheid beschreven door $\hat{A}$ dan over de quasi-deeltjes?

<u>Opgave 11</u>: Overgang van een puur naar een gemengd ensemble

Doel: wennen aan het concept "uitintegreren van vrijheidsgraden"

Beschouw een vervalproces waarbij twee <u>verschillende</u> spin-0 deeltjes worden geproduceerd die samen in een pure paartoestand met totale impuls $\vec{P}$ zitten. Stel dat deze pure toestand wordt gegeven door

$$|\Psi\rangle \;=\; \int \mathrm{d}\vec{p}_1 \, f(\vec{p}_1)\, \hat{a}^\dagger(\vec{p}_1)\, \hat{b}^\dagger(\vec{P}-\vec{p}_1)\,|0\rangle \qquad \text{met} \qquad f(\vec{p}_1) \in \mathbb{C} \qquad \text{en} \qquad \vec{P}, \vec{p}_1 \in \mathrm{IR}^3 \;,$$

waarbij $f(\vec{p}_1) \neq 0$ indien het proces kinematisch mogelijk is voor de aangegeven impuls $\vec{p}_1$. Verder is $|0\rangle$ de vacuümtoestand en zijn $\hat{a}^\dagger(\vec{p}_1)$ en $\hat{b}^\dagger(\vec{P}-\vec{p}_1)$ de creatie-operatoren in de continue impulsrepresentatie behorende bij respectievelijk het eerste en het tweede deeltje. Deze operatoren voldoen elk afzonderlijk aan de gebruikelijke bosonische commutatierelaties voor een continue representatie, zodat bijvoorbeeld geldt dat

$$\big[\hat{a}(\vec{p}_1), \hat{a}^\dagger(\vec{p}_1^{\,\prime})\big] \;=\; \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_1^{\,\prime})\,\hat{1} \qquad \text{en} \qquad \big[\hat{b}(\vec{p}_2), \hat{b}^\dagger(\vec{p}_2^{\,\prime})\big] \;=\; \delta(\vec{p}_2 - \vec{p}_2^{\,\prime})\,\hat{1} \;.$$

(i) Beschouw nu een alleen op het eerste deeltje betrekking hebbende observabele $\hat{A}$. Leg uit dat $\hat{b}(\vec{p}_2)$ dan commuteert met zowel $\hat{A}$ als $\hat{a}(\vec{p}_1)$ en $\hat{a}^\dagger(\vec{p}_1)$.

(ii) Laat vervolgens zien dat

$$\langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle \;=\; \int \mathrm{d}\vec{p}_1 \, |f(\vec{p}_1)|^2 \,\langle 0|\,\hat{a}(\vec{p}_1)\,\hat{A}\,\hat{a}^\dagger(\vec{p}_1)\,|0\rangle \;\equiv\; \int \mathrm{d}\vec{p}_1 \, |f(\vec{p}_1)|^2 \,\langle \vec{p}_1|\hat{A}\,|\vec{p}_1\rangle \;,$$

waarbij $\hat{a}^\dagger(\vec{p}_1)\,|0\rangle \equiv |\vec{p}_1\rangle$ de impulseigentoestand is van deeltje 1 bij de impuls $\vec{p}_1$.

(iii) Toon aan dat dit kan worden omgeschreven tot $\langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle = \mathrm{Tr}_{1}(\hat{A}\hat{\rho}_1)$, waarbij

$$\hat{\rho}_1 \;\equiv\; \int \mathrm{d}\vec{p}_1 \, |f(\vec{p}_1)|^2 \; \hat{a}^\dagger(\vec{p}_1)\,|0\rangle\langle 0|\,\hat{a}(\vec{p}_1) \;=\; \int \mathrm{d}\vec{p}_1 \, |f(\vec{p}_1)|^2 \; |\vec{p}_1\rangle\langle\vec{p}_1|$$

een gemengd ensemble beschrijft gekarakteriseerd door de impulseigentoestanden $|\vec{p}_1\rangle$ van deeltje 1 met statistische gewichten $W(\vec{p}_1) = |f(\vec{p}_1)|^2$. Het spoor Tr_{1} heeft hier betrekking op de volledige toestandsruimte van deeltje 1, zodat je moet integreren over alle impulsen:

$$\mathrm{Tr}_{1}(\hat{O}) \;\equiv\; \int \mathrm{d}\vec{p}_1 \, \langle\vec{p}_1|\hat{O}|\vec{p}_1\rangle \;.$$

Door de vrijheidsgraden van deeltje 2 uit te integreren (weg te laten) is er een gemengd ensemble ontstaan voor de QM beschrijving van deeltje 1. Dit is bijvoorbeeld van belang als er alleen metingen kunnen worden verricht aan deeltje 1 omdat deeltje 2 zo goed als niet detecteerbaar is (zoals o.a. het geval is voor neutrino's).