Opgaven bij het college Analytische Mechanica
Week 7

Opgave 19: **Hamilton-vergelijkingen voor een centrale potentiaal**

Een puntdeeltje met constante massa m beweegt in het xy-vlak onder de invloed van een centrale potentiaal, d.w.z. een potentiaal die slechts afhangt van de afstand tot de oorsprong van het coördinatenstelsel. Gebruik de poolcoördinaten r en φ als gegeneraliseerde coördinaten.

(i) Laat zien dat de Hamiltoniaan van dit systeem wordt gegeven door

$$H \;=\; \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) \;+\; V(r)\ ,$$

met $V(r)$ de centrale potentiaal. Gebruik voor het bewijs de Lagrangiaan die is gegeven in formule (21) van het collegedictaat en die is afgeleid in opgave 2 van het werkcollege.

(ii) Welke twee grootheden zijn op grond van deze Hamiltoniaan behouden?

(iii) – Hoe luiden de Hamilton-vergelijkingen voor dit systeem?
– Toon aan dat deze vergelijkingen equivalent zijn met de Lagrange-vergelijkingen die in opgave 2 zijn afgeleid.

Opgave 20: **Fundamentele Poissonhaakjes**

Beschouw een systeem dat wordt beschreven in termen van de gegeneraliseerde coördinaten $\{q_j\}$ en bijbehorende geconjugeerde impulsen $\{p_{q_j}\}$. Voor dit systeem gaan we nu een paar belangrijke relaties voor het Poissonhaakje afleiden.

(i) Laat zien dat voor een willekeurige dynamische grootheid $A\big(\{q_j\},\{p_{q_j}\},t\big)$ geldt dat

$$\big\{A, q_j\big\} \;=\; -\,\frac{\partial A}{\partial p_{q_j}} \qquad \text{en} \qquad \big\{A, p_{q_j}\big\} \;=\; \frac{\partial A}{\partial q_j}\ .$$

Gebruik hiervoor de definitie van het Poissonhaakje zoals gegeven in formule (144) van het collegedictaat.

(ii) Leid hieruit de volgende fundamentele Poissonhaakjes af voor gegeneraliseerde coördinaten en impulsen:

$$\big\{q_k\,, q_j\big\} \;=\; 0 \quad , \quad \big\{p_{q_k}\,, p_{q_j}\big\} \;=\; 0 \qquad \text{en} \qquad \big\{p_{q_k}\,, q_j\big\} \;=\; -\,\delta_{jk}\ .$$

Opgave 21: **Bepaling van de elliptische Kepler-banen**

Een puntdeeltje met constante massa m beweegt in het xy-vlak onder de invloed van een centrale potentiaal $V(r) = -C/r$ met $C > 0$. In termen van de poolcoördinaten r en φ heeft de Hamiltoniaan van dit systeem de volgende vorm:

$$H \;=\; \frac{1}{2m}\Big(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\Big) - \frac{C}{r} \;.$$

Gebruik vervolgens de Hamilton-Jacobi vergelijking met als genererende functie

$$S(r,\varphi,\bar{p}_1,\bar{p}_2,t) \;=\; W(r,\bar{p}_1,\bar{p}_2) \,+\, \bar{p}_2\varphi \,-\, \bar{p}_1 t \;.$$

(i) – Laat zien dat $\bar{p}_1$ gelijk is aan de constante totale energie E van het systeem en dat $\bar{p}_2$ overeenkomt met de behouden impuls p_φ.

– Waarom is S dus een geschikte genererende functie voor de Hamilton-Jacobi vergelijking?

(ii) Toon aan dat de onbepaalde integraal (primitieve functie)

$$W(r,E,p_\varphi) \;=\; \int \mathrm{d}r \,\sqrt{2m(E + C/r) - p_\varphi^2/r^2}$$

een oplossing is van de Hamilton-Jacobi vergelijking.

(iii) Leid hieruit af dat de behouden nieuwe coördinaten $\bar{q}_1$ en $\bar{q}_2$ als volgt kunnen worden uitgedrukt in termen van onbepaalde integralen:

$$\bar{q}_1 \;=\; m\int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E + C/r) - p_\varphi^2/r^2}} \;-\; t \;\equiv\; \tau \;=\; \text{constant}\;,$$

$$\bar{q}_2 \;=\; -\,p_\varphi\int \frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{2m(E + C/r) - p_\varphi^2/r^2}} \;+\; \varphi \;\equiv\; \alpha \;=\; \text{constant}\;.$$

(iv) Laat tenslotte zien dat de elliptische Kepler-banen voor $0 < -E < mC^2/(2p_\varphi^2)$ en $p_\varphi > 0$ worden gegeven door

$$r(\varphi) \;=\; \frac{p_\varphi^2/(mC)}{1 - \varepsilon\sin(\varphi - \alpha)}\;, \qquad \text{met} \quad \varepsilon \;\equiv\; \sqrt{1 + 2Ep_\varphi^2/(mC^2)}\;.$$

Hint: ga uit van de uitdrukking voor $\bar{q}_2$, substitueer $u = 1/r$ en gebruik dat

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a + bu + cu^2}} \;=\; -\,\frac{1}{\sqrt{-c}}\,\arcsin\Big(\frac{2cu + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\Big)$$

voor het geval dat $c < 0$ en $b^2 > 4ac$.