

Opgaven bij het college Kwantummechanica 3

Week 7

Doel: analyseren van polarisatie-effecten van spin-1/2 ensembles

Opgave 12: Polarisation van een spin-1/2 ensemble

Beschouw een gemengd ensemble van spin-1/2 deeltjes. Een derde deel van deze spin-1/2 deeltjes is volledig in de positieve x -richting gepolariseerd, een derde deel is volledig in de positieve y -richting gepolariseerd en een derde deel is volledig in de positieve z -richting gepolariseerd.

- (i) Toon aan dat de dichtheidsmatrix in de spinruimte wordt gegeven door

$$\rho = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 - i/6 \\ 1/6 + i/6 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Hint: gebruik dat de aangegeven drie deelensembles puur zijn en dus alle drie gekarakteriseerd kunnen worden door een pure polarisatievector.

- (ii) Bepaal de polarisatiegraad $|\vec{P}|$ van het gemengde ensemble.
(iii) Bepaal de polarisatierichting.

Opgave 13: Een spin-1/2 ensemble in een pure spintoestand

Beschouw een ensemble bestaande uit spin-1/2 deeltjes die worden beschreven door een pure spintoestandsfunctie (spinvector). Er is dus sprake van een puur spinensemble. Neem aan dat het volgende bekend is over de spinverwachtingswaarden:

$$\langle \hat{S}_x \rangle = 0 \quad , \quad \langle \hat{S}_y \rangle > 0 \quad \text{en} \quad \langle \hat{S}_z \rangle = \lambda \frac{\hbar}{2} \quad (0 < \lambda < 1) .$$

- (i) – Bepaal aan de hand hiervan de polarisatievector \vec{P} van het pure ensemble en de bijbehorende dichtheidsmatrix ρ in de spinruimte.
– Waarom is het hiervoor niet nodig de precieze waarde van $\langle \hat{S}_y \rangle$ te kennen?
- (ii) – Wat is nu de eenvoudigste methode om de spinvector van het systeem te vinden?
– Bepaal deze spinvector op een fasefactor na.

Hint: ga eerst eens na wat je qua eigenschappen weet over de dichtheidsmatrix ρ .

Extra oefenopgave 1: Polarisation en elastische verstrooiing

Beschouw de elastische verstrooiing van spin-1/2 deeltjes (zoals nucleonen) aan spin-0 deeltjes (zoals pionen). De bijbehorende verstrooiingspotentiaal is in het algemeen spinafhankelijk. Dit houdt in dat de verstrooiingsamplitude overgaat in een verstrooiingsoperator \hat{F} die als een 2×2 matrix F werkt in de spin-1/2 spinruimte. Voor een gegeven pure spinbegintoestand $|\chi^i\rangle$ van de spin-1/2 bundeldeeltjes en een pure spin-eindtoestand $|\chi^f\rangle$ van de verstrooide spin-1/2 deeltjes wordt de differentiële werkzame doorsnede gegeven door

$$\frac{d\sigma_{i \rightarrow f}}{d\Omega} = |\langle \chi^f | \hat{F} | \chi^i \rangle|^2.$$

Situatie 1: soms wordt de polarisation van de verstrooide spin-1/2 deeltjes niet gemeten, zodat de differentiële werkzame doorsnede gesommeerd mag worden over de twee onafhankelijke spin-eindtoestanden $|\chi^f\rangle = |\chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}\rangle$ en $|\chi^f\rangle = |\chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}\rangle$.

- (i) Stel de inkomende spin-1/2 bundel zit in de pure spintoestand $|\chi^i\rangle$.

Laat dan zien dat de differentiële werkzame doorsnede gelijk is aan de verwachtingswaarde van de operator $\hat{F}^\dagger \hat{F}$ voor deze spintoestand $|\chi^i\rangle$.

- (ii) Ga vervolgens over op een inkomende spin-1/2 bundel met polarisatievector \vec{P} .

Toon aan dat het spinensemblegemiddelde van de differentiële werkzame doorsnede wordt gegeven door

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = \frac{1}{2} \text{Tr}(F^\dagger F) + \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \text{Tr}(\vec{\sigma} F^\dagger F).$$

Situatie 2: een interessant fenomeen van verstrooiing is dat de verstrooiing zelf aanleiding kan geven tot polarisation van de deeltjes, ongeacht de polarisation van de inkomende bundels.

- (iii) Door de verstrooiing gaat een pure spin-begintoestand $|\chi^i\rangle$ over in een pure spintoestand $|\chi^{\text{sc}}\rangle = c |\hat{F} \chi^i\rangle$ voor de verstrooide spin-1/2 deeltjes, waarbij c een spinafhankelijke complexe ensemblenormeringsfactor is die in rekening brengt dat feitelijk slechts een deel van de inkomende deeltjes wordt verstrooid.

Waarom heeft $|\chi^{\text{sc}}\rangle$ deze vorm?

- (iv) Beschouw een inkomende spin-1/2 bundel met dichtheidsoperator

$$\hat{\rho} = \sum_i W_i |\chi^i\rangle \langle \chi^i|.$$

Leid dan de volgende dichtheidsoperator af voor de verstrooide spin-1/2 deeltjes:

$$\hat{\rho}' = |c|^2 \hat{F} \hat{\rho} \hat{F}^\dagger, \quad \text{met} \quad |c|^2 = 1/\text{Tr}(\hat{F} \hat{\rho} \hat{F}^\dagger).$$

- (v) Neem tenslotte aan dat de inkomende spin-1/2 bundel ongepolariseerd is. Bepaal de polarisatievector \vec{P}' voor de verstrooide spin-1/2 deeltjes.