

Opgaven bij het college Kwantummechanica 2

Week 8

Opgave 14: Identieke deeltjes en energiebanden!!!

Beschouw een systeem bestaande uit niet-interagerende spin- s deeltjes. Neem aan dat de 1-deeltjes energie-eigenwaarden van dit systeem worden gegeven door

$$E_{n\kappa, m_s} = nE + \kappa \frac{\Delta}{\nu - 1} \quad , \quad \nu = \text{even geheel getal} \gg 1 \quad (E > \Delta > 0) \quad ,$$

met $n = 0, 1, \dots$, $\kappa = 0, 1, \dots, \nu - 1$ en $m_s = -s, -s+1, \dots, s-1, s$,

en de bijbehorende volledig gespecificeerde 1-deeltjes energie-eigenfuncties door

$$\psi_{n\kappa, m_s}(\vec{r}, \sigma) = \psi_{n\kappa}(\vec{r}) \chi_{s, m_s}(\sigma) \quad , \quad \text{met} \quad \chi_{0,0}(\sigma) \equiv 1 \quad .$$

Dit spectrum heeft een bandenstructuur, bestaande uit ν zeer dicht bij elkaar gelegen niveaus per band die elk $(2s+1)$ -voudig ontaard zijn ten gevolge van het spinkwantumgetal m_s . Verder is $\psi_{n\kappa}(\vec{r})$ de ruimtelijke 1-deeltjes eigenfunctie en $\chi_{s, m_s}(\sigma)$ de 1-deeltjes spinvector die een spin- s deeltje beschrijft met spincomponent $m_s \hbar$ langs de z -as.

Neem aan dat het systeem uit $N = \nu$ deeltjes bestaat.

- (i) Bepaal de laagste energie-eigenwaarde E_0 van het N -deeltjessysteem als
 - de deeltjes identieke spin-0 deeltjes zijn;
 - de deeltjes identieke spin-1/2 deeltjes zijn.
- (ii) Hoe zien de bijbehorende energie-eigenfuncties ψ_0 er dan uit? Waar mogelijk mag je deze N -deeltjes energie-eigenfuncties in determinantvorm uitdrukken.
- (iii) Bepaal de energietoename $E_1 - E_0$ voor de overgang van de grondtoestand naar de eerste aangeslagen N -deeltjestoestand als de deeltjes identieke spin-1/2 deeltjes zijn.
- (iv) Waarom verandert het resultaat van onderdeel (iii) wezenlijk als het systeem uit twee keer zoveel deeltjes bestaat?

Oefenopgave: niet-interagerend systeem bestaande uit drie spin- s deeltjes

Beschouw een systeem bestaande uit drie niet-interagerende spin- s deeltjes met massa's M_1 , M_2 en M_3 . De 1-deeltjes energie-eigenwaarden van dit systeem worden gegeven door

$$E_{n_k} = n_k^2 \frac{C}{M_k} \quad (n_k = 1, 2, \dots \text{ en } C > 0)$$

voor $k = 1, 2, 3$, met bijbehorende volledig gespecificeerde energie-eigenfuncties

$$\psi_{n_k, m_{s_k}}(\vec{r}_k, \sigma_k) = \psi_{n_k}(\vec{r}_k) \chi_{s, m_{s_k}}(\sigma_k) \quad (m_{s_k} = -s, -s+1, \dots, s-1, s).$$

Hier is $\psi_n(\vec{r})$ de ruimtelijke 1-deeltjes eigenfunctie en $\chi_{s, m_s}(\sigma)$ de 1-deeltjes spinvector die een spin- s deeltje beschrijft met spincomponent $m_s \hbar$ langs de z -as. Verder geldt per definitie dat $\chi_{0,0}(\sigma) = 1$. Bepaal nu voor het volledige 3-deeltjessysteem de energie en bijbehorende eigenfuncties van de laagste twee energieniveaus in de volgende vier situaties.

- (i) De drie deeltjes zijn onderscheidbare spin-0 deeltjes met massa's $M_1 < M_2 < M_3$.
- (ii) De drie deeltjes zijn identieke spin-0 deeltjes.
- (iii) De drie deeltjes zijn identieke spin-1/2 deeltjes die alle drie in dezelfde 1-deeltjes spintoestand $\chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$ zitten.
- (iv) De drie deeltjes zijn identieke spin-1/2 deeltjes.

Hint: je mag waar mogelijk de 3-deeltjes eigenfunctie in determinantvorm uitdrukken.

- (v) Bepaal de ontardingsgraad van de energieniveaus die je in onderdelen (i)–(iv) hebt gevonden. Motiveer je antwoord.
- (vi) Stel dat de deeltjes elkaar ook nog eens (zwak) elektrostaticch afstoten. Bediscussieer de relatieve sterkte van het repulsie-effect op de grondtoestandsenergie E_0 in situaties (ii), (iii) en (iv).