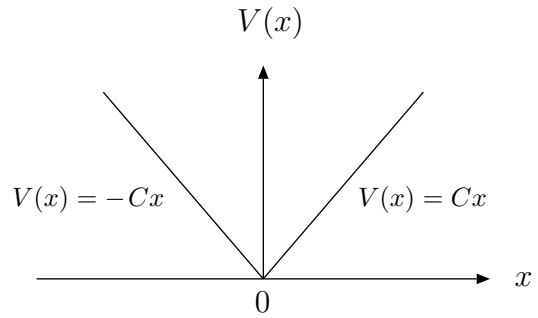


Opgaven bij het college Kwantummechanica 2

Week 9

Opgave 15: Energiespectrum voor een lineaire potentiaal!!! (stuitende neutronen)

Beschouw de beweging langs de x -as van een spin-0 deeltje met massa m onder invloed van de potentiaal $V(x) = C|x|$, met $C > 0$. Het niet-ontaaarde eigenwaardenspectrum van dit systeem kan exact worden bepaald aan de hand van een berekening in termen van zogenaamde Airy-functies.



Uit deze exacte berekening volgt voor de eerste zes energieniveaus:

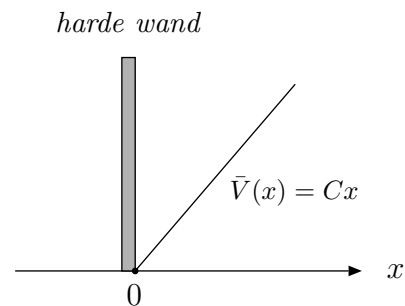
$$E_n = \left(\frac{\hbar^2 C^2}{2m} \right)^{1/3} \lambda_n, \quad \text{met} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline n & n=0 & n=1 & n=2 & n=3 & n=4 & n=5 \\ \hline \lambda_n & 1.019 & 2.338 & 3.248 & 4.088 & 4.820 & 5.521 \\ \hline \end{array}.$$

- (i) Gebruik de WKB benadering om de discrete energieniveaus van dit systeem te vinden. Schrijf je antwoord als $E_n^{\text{WKB}} = \left(\frac{\hbar^2 C^2}{2m} \right)^{1/3} \lambda_n^{\text{WKB}}$ en bepaal λ_n^{WKB} in analytische vorm.
- (ii) Vergelijk de numerieke waarden van λ_n^{WKB} met de exacte waarden uit bovenstaande tabel en beoordeel of het resultaat overeenkomt met wat je van tevoren had verwacht.
- (iii) – Beredeneer dat de bijbehorende eigenfuncties pariteitseigenfuncties moeten zijn.
– Geef aan welk verband er bestaat tussen het kwantumgetal n en de pariteit van de bijbehorende eigenfunctie.

Vervang bovenstaande potentiaal nu door

$$\bar{V}(x) = \begin{cases} \infty & \text{als } x < 0 \\ Cx & \text{als } x > 0 \end{cases},$$

waarbij bij $x = 0$ een harde, ondoordringbare wand (oneindige barrière) aan de potentiaal is toegevoegd.



- (iv) In de plaatsrepresentatie moeten de toestandsfuncties van dit systeem verdwijnen voor $x < 0$. Wat is de reden hiervan?

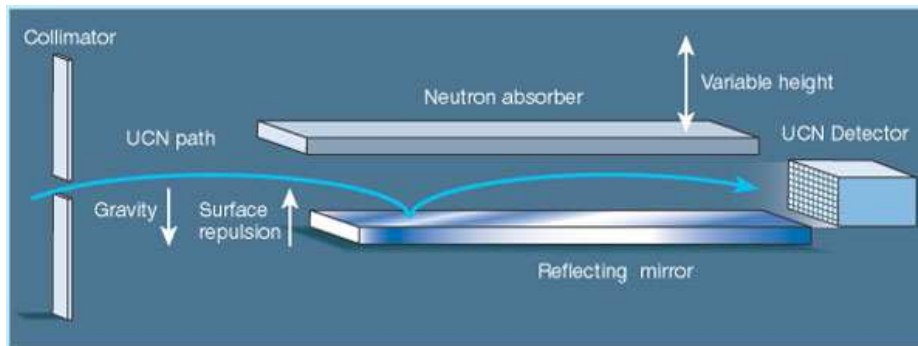
- (v) In verband met de ondoordringbare barrière bij $x = 0$ kan de WKB benadering alleen worden gebruikt in combinatie met de continuïteitsconditie $\psi(0) = 0$. Laat zien dat de combinatie van WKB benadering en $\psi(0) = 0$ aanleiding geeft tot de volgende kwantisatieconditie voor een gebonden toestand met energie E in de potentiaalput:

$$\frac{1}{\hbar} \int_0^{x_2(E)} dy \sqrt{2m[E - \bar{V}(y)]} = \left(\bar{n} + \frac{3}{4}\right)\pi \quad (\bar{n} = 0, 1, 2, \dots),$$

met $x_2(E)$ het klassieke omkeerpunt waarvoor geldt dat $\bar{V}(x_2) = E$.

- (vi) Leid hieruit af dat de bijbehorende WKB energieniveaus overeenkomen met de energieniveaus uit onderdeel (i) voor oneven n .
- (vii) Waarom was dat op basis van onderdeel (iii) te verwachten?

Experimentele toepassing uitgevoerd door V.V. Nesvizhevsky et al. (ILL Grenoble, 2002): bij dit experiment liet men langzame, ultrakoude neutronen (“ultracold neutrons [UCN]”) onder invloed van de zwaartekracht over een perfect reflecterend (ondoordringbaar) oppervlak stuiten. Door een neutronenabsorberende plaat op variabele hoogte boven het reflecterende oppervlak te plaatsen bestudeerde men vervolgens hoe de neutronenflux in de detector afhing van de maximale stuihoogte van de neutronen.



- (viii) – Vertaal deze experimentele toepassing in termen van het voorgaande. Neem hierbij aan dat de spin van de neutronen geen enkele rol speelt en dat het nulpunt van de zwaartekrachtspotentiaal samenvalt met het reflecterende oppervlak.
- Waarom is de neutronstuihoogte gekwantiseerd?
 - Bereken de laagste stuihoogte (in μm) en de bijbehorende energie (in eV).