Opgaven bij het college Kwantummechanica 3
Week 9

Je kan dit keer kiezen uit twee sets van twee opgaven.

- Opgaven 16 en 18. Deze opgaven hebben betrekking op de kernfysicatoepassing die in § 2.5.4 van het collegedictaat is behandeld.
- Opgaven 17 en 19. Deze opgaven hebben betrekking op de astrofysicatoepassing die in § 2.5.5 van het collegedictaat is behandeld.

Bij de voorbereiding op het tentamen kan je de andere set als oefenmateriaal gebruiken.

Opgave 16: **Randeffecten voor Fermi-gassen** (*relevant voor zware kernen*)

Beschouw een spin-1/2 deeltje met massa m dat opgesloten zit in een grote kubus met vast volume $V = L^3$. De effecten van de rand van de kubus zijn terug te vinden in het 1-deeltjes energiespectrum en in het ruimtelijke gedrag van de 1-deeltjes energie-eigenfuncties. Gebruik de uitdrukkingen voor de energie-eigenwaarden en energie-eigenfuncties uit het collegedictaat om de volgende vragen te beantwoorden.

Energiespectrum: de aanwezigheid van de rand leidt tot de eis dat de kwantumgetallen $\nu_{x,y,z}$ alleen geheeltallige positieve waarden kunnen aannemen. Als V heel groot wordt, dan is het bijbehorende energiespectrum bij benadering continu. Echter, nog steeds moeten de energie-eigenwaarden bij $\nu_x = 0 \vee \nu_y = 0 \vee \nu_z = 0$ worden uitgesloten.

(i) Laat zien dat het aantal kwantumtoestanden $N(k)$ met lengte van de golfvector kleiner dan $k = \pi|\vec{\nu}|/L \equiv \pi\nu/L$ gecorrigeerd moet worden tot

$$N(k) \approx \frac{1}{3}\pi\nu^3 - \frac{3}{4}\pi\nu^2 = \frac{V}{3\pi^2}\Big(k^3 - \frac{3\pi S}{8V}\,k^2\Big) ,$$

met $S = 6L^2$ het totale oppervlak van de rand van de kubus.

Hint: gebruik de opdeling van de $\vec{\nu}$-ruimte die in het college is geïntroduceerd en beredeneer welk volume op grond daarvan moet worden weggelaten.

(ii) Leid hieruit af dat de gecorrigeerde toestandsdichtheid nu wordt gegeven door

$$D(E_{\rm kin}) \approx \frac{1}{2\pi^2}\Big(\frac{2m}{\hbar^2}\Big)^{3/2} V E_{\rm kin}^{1/2}\Big(1 - \frac{\pi S}{4V}\,\frac{\hbar}{\sqrt{2mE_{\rm kin}}}\Big) .$$

Deze uitdrukking geldt feitelijk voor een willekeurige vorm van de omsluiting.

(iii) Presentatie-opdracht: als je niet in het "presentatieteam" zit, dan mag je deze opdracht als een bonusopgave beschouwen.

- Wat houdt deze randcorrectie in voor de grondtoestandsenergie van een Fermi-gas van zulke spin-1/2 deeltjes vergeleken met een situatie zonder randeffecten?
- Wat is er in dit verband speciaal aan een bolvormige omsluiting?
- Wat verwacht je dat er gebeurt met de grondtoestandsenergie van het Fermi-gas als de omsluiting in tweeën wordt gedeeld door middel van een ondoordringbare scheidingswand?

Energie-eigenfuncties: de ondoordringbare rand leidt tot de eis dat de energie-eigenfuncties moeten verdwijnen op de rand. Dit heeft tot gevolg dat de energie-eigenfuncties pas op een bepaalde afstand van de rand de maximale absolute waarde kunnen aannemen.

(iv) Beschouw de rand bij $x = 0$ en een energie-eigenfunctie met kwantumgetal $\nu_x = n_F$. Op welke afstand van de rand wordt de absolute waarde van deze energie-eigenfunctie voor het eerst maximaal?

<u>Opgave 18</u>: Aspecten van het Fermi-gas model voor zware kernen

Beschouw voor $T = 0$ een systeem bestaande uit twee onafhankelijke Fermi-gassen voor protonen en neutronen (met $M_p \approx M_n$), gehouden binnen een bol met straal R door een constante potentiaal $V = -V_0 < 0$ binnen de bol. Neem aan dat het systeem bestaat uit Z protonen en $A-Z$ neutronen. De totale (uniforme) deeltjesdichtheid van het systeem wordt gegeven door

$$\rho_N = \frac{A}{4\pi R^3/3} = \frac{3}{4\pi r_0^3} = \text{constant} .$$

In termen van de verhouding $2Z/A \equiv x$ resulteert dit in de proton- en neutrondichtheden

$$\rho_N^{(p)} = \frac{Z}{A}\,\rho_N = x\,\frac{\rho_N}{2} \qquad \text{en} \qquad \rho_N^{(n)} = \frac{A-Z}{A}\,\rho_N = (2-x)\,\frac{\rho_N}{2} .$$

Voor een gelijk aantal protonen en neutronen wordt de Fermi-energie van zowel het protongas als het neutrongas gegeven door één en dezelfde waarde $E_F = \big(\hbar^2/2M_p\big)\big(3\pi^2\rho_N/2\big)^{2/3}$.

(i) Toon aan dat voor vaste A de laagste totale kinetische energie wordt bereikt als $x = 1$, zodat het systeem evenveel protonen als neutronen bevat. Je mag hierbij voor het gemak aannemen dat Z alle reële waarden op het interval $[0, A]$ kan aannemen.

(ii) Stel dat $x = 1 - \lambda$ met $0 \le \lambda \ll 1$, zodat het systeem iets meer neutronen dan protonen bevat. Laat dan aan de hand van een reeksontwikkeling rond $\lambda = 0$ zien dat de totale kinetische energie van het systeem bij benadering wordt gegeven door

$$E_{\text{tot, kin}}^{T=0} \approx \frac{3}{5}\,A E_F + \frac{\lambda^2 A}{3}\,E_F = \frac{3}{5}\,A E_F + \frac{(A-2Z)^2}{3A}\,E_F .$$

(iii) <u>Vervolg presentatie-opdracht</u>: beschouw het effect op de bindingspotentiaal veroorzaakt door de uniforme ladingsdistributie ten gevolge van de protonen. De (klassieke) Coulomb-energie voor de bolvormige kern bedraagt in analogie met het voorbeeld in §2.5.5

$$\Delta V_{\text{Coul}} = \frac{3}{5}\,\frac{Z^2\alpha\hbar c}{R} = \frac{3\alpha\hbar c}{5r_0}\,\frac{Z^2}{A^{1/3}} = \frac{3\alpha\hbar c}{20r_0}\,A^{5/3}x^2 ,$$

gegeven een totale lading $+Z|e|$ binnen de kern.

- Bewijs dat voor vaste A de totale energie van het systeem nu minimaal is als

$$x^{2/3} - (2-x)^{2/3} + \frac{3\alpha\hbar c}{5r_0 E_F}\,A^{2/3}\,x = 0 .$$

- Bediscussieer wat dit inhoudt voor de fractie protonen in zware kernen.

(iv) Stel we willen de Coulomb-correcties voor protonparen netjes kwantummechanisch uitrekenen. Beredeneer dan of de kwantummechanische correcties kleiner dan wel groter worden dan het klassieke resultaat uit onderdeel (iii) voor

- het gedeelte van de interagerende protonparen dat in spin-triplet toestanden zit;
- het gedeelte van de interagerende protonparen dat in de spin-singlet toestand zit.

Opgave 17: **Ultra-relativistisch gas van spin-1/2 deeltjes bij $T = 0$**

Beschouw een ultra-relativistisch Fermi-gas bij $T = 0$. Het gas bestaat uit een zeer groot, constant aantal N vrije spin-1/2 deeltjes die opgesloten zitten binnen een macroscopische 3-dimensionale omsluiting met constante zijden $L = V^{1/3}$ en ondoordringbare wanden. In de ultra-relativistische limiet worden de bijbehorende (kinetische) 1-deeltjes energie-eigenwaarden gegeven door

$$E_\nu \;=\; \frac{\hbar\pi c}{L}\sqrt{\nu_x^2+\nu_y^2+\nu_z^2} \;\equiv\; \frac{\hbar\pi c}{L}\,\nu \qquad (\nu_{x,y,z} = 1, 2, \cdots)\ ,$$

met c de lichtsnelheid in vacuüm. Net als in het niet-relativistische geval is het verstandig om te gaan werken met de gekwantiseerde golfvector $\vec{k} = \pi\vec{\nu}/L$.

Gebruik de vergelijking voor $D(k)$ uit het collegedictaat en leid daarmee de volgende uitdrukkingen af voor de 1-deeltjes toestandsdichtheid $D(E_{\rm kin})$, Fermi-energie E_F, gemiddelde kinetische energie per deeltje $\bar{E}_{\rm kin}$ en druk P:

$$D(E_{\rm kin}) \;\approx\; \frac{VE_{\rm kin}^2}{\pi^2\hbar^3c^3} \quad , \quad E_F \;=\; \hbar c\,(3\pi^2\rho_{\scriptscriptstyle N})^{1/3} \quad , \quad \bar{E}_{\rm kin} \;=\; \frac{3}{4}E_F \quad , \quad P \;=\; \frac{1}{4}\rho_{\scriptscriptstyle N}E_F\ ,$$

met $\rho_{\scriptscriptstyle N}$ de constante deeltjesdichtheid van het Fermi-gas.

Opgave 19: **Chandrasekhar limiet voor zware witte dwergen**

Model 1: het binnenste van een zware witte dwerg bestaat uit één karakteristiek atoomsoort met ladingsgetal Z en massagetal A. Alle elektronen zijn uit de atomen geperst en vormen in eerste benadering een ultra-relativistisch elektrongas binnen een bolvormig volume. Gebruik de resultaten van opgave 17 om de volgende vragen te beantwoorden.

(i) Laat zien dat voor de totale energie van zo'n zware witte dwerg bij benadering geldt

$$E_T \;=\; b\,\frac{M^{4/3}}{R} - \frac{3G_{\scriptscriptstyle N}M^2}{5R}\ , \qquad \text{met} \quad b \;=\; \frac{3}{4}\Big(\frac{9\pi}{4}\Big)^{1/3}\hbar c\,\Big(\frac{Z}{AM_p}\Big)^{4/3}\ .$$

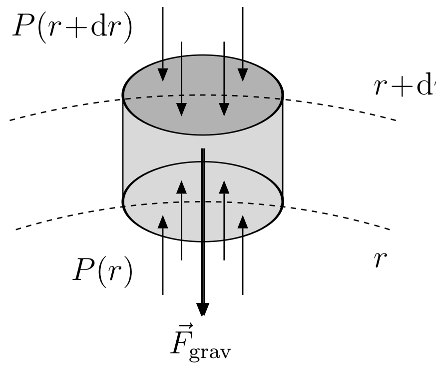
Hier zijn M en R de massa en straal van de witte dwerg, $G_{\scriptscriptstyle N}$ de gravitatieconstante van Newton en $M_p \approx M_n$ de protonmassa.

(ii) Presentatie-opdracht: als je niet in het "presentatieteam" zit, dan mag je deze opdracht als een bonusopgave beschouwen.

- Waarom blijft de witte dwerg instorten als $E_T < 0$?
- Beredeneer waarom de witte dwerg uiteindelijk wel stabiel wordt als

$$E_T \;\geq\; 0 \quad\Rightarrow\quad M \;\leq\; \Big(\frac{5b}{3G_{\scriptscriptstyle N}}\Big)^{3/2} \;\underline{\underline{\overset{A=2Z}{}}}\; 3.423\times10^{30}\,\text{kg} \;\approx\; 1.72 \text{ zonnemassa's}\ .$$

$$\boxed{\text{Gebruikt:}\ \ M_p^{-2}\big(\hbar c/G_{\scriptscriptstyle N}\big)^{3/2} \;=\; \frac{M_{\rm Planck}^3}{M_p^2} \;=\; 3.6851\times10^{30}\,\text{kg} \;\approx\; 1.8533 \text{ zonnemassa's}\ .}$$



$\boxed{\text{Model 2}}$: verfijn het voorgaande model door de constante massadichtheid $\rho_{_M}$ van de bolvormige ster te vervangen door een meer realistisch radieel symmetrisch dichtheidsprofiel $\rho_{_M}(r) \equiv \rho_c\theta^3(r)$, met $\theta(0) \equiv 1$ en met de straal R van de ster gedefinieerd volgens $\theta(R) \equiv 0$. Vervolgens wordt aangenomen dat overal in de ster de zwaartekracht in evenwicht is met de kracht veroorzaakt door de elektrongasdruk

$$P(r) \overset{\text{opg. 17}}{=\!=\!=} K\rho_{_M}^{4/3}(r)\ , \qquad \text{met} \quad K = \frac{1}{4}\hbar c\,(3\pi^2)^{1/3}\Big(\frac{Z}{AM_p}\Big)^{4/3} .$$

Hiertoe beschouwen we een infinitesimaal cilindrisch volume-element van de ster met de cilinderas wijzend naar het centrum (zie plaatje). De twee cirkelvormige begrenzingen van het volume-element beslaan elk een oppervlak $\mathrm{d}A$ en bevinden zich op een afstand r dan wel $r+\mathrm{d}r$ van het centrum van de ster.

(iii) Leid uit de evenwichtsconditie tussen zwaartekracht en gasdruk af dat

$$m(r) = -\frac{r^2}{G_{_N}\rho_{_M}(r)}\frac{\mathrm{d}P(r)}{\mathrm{d}r} = -\frac{4K}{G_{_N}}\rho_c^{1/3}r^2\frac{\mathrm{d}\theta(r)}{\mathrm{d}r}\ ,$$

waarbij $m(r)$ de massa van de ster is binnen een straal r vanaf het centrum.

(iv) Schrijf hiermee vervolgens de definitie

$$\rho_{_M}(r) \equiv \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}m(r)}{\mathrm{d}r}$$

om tot de dimensieloze Lane–Emden vergelijking

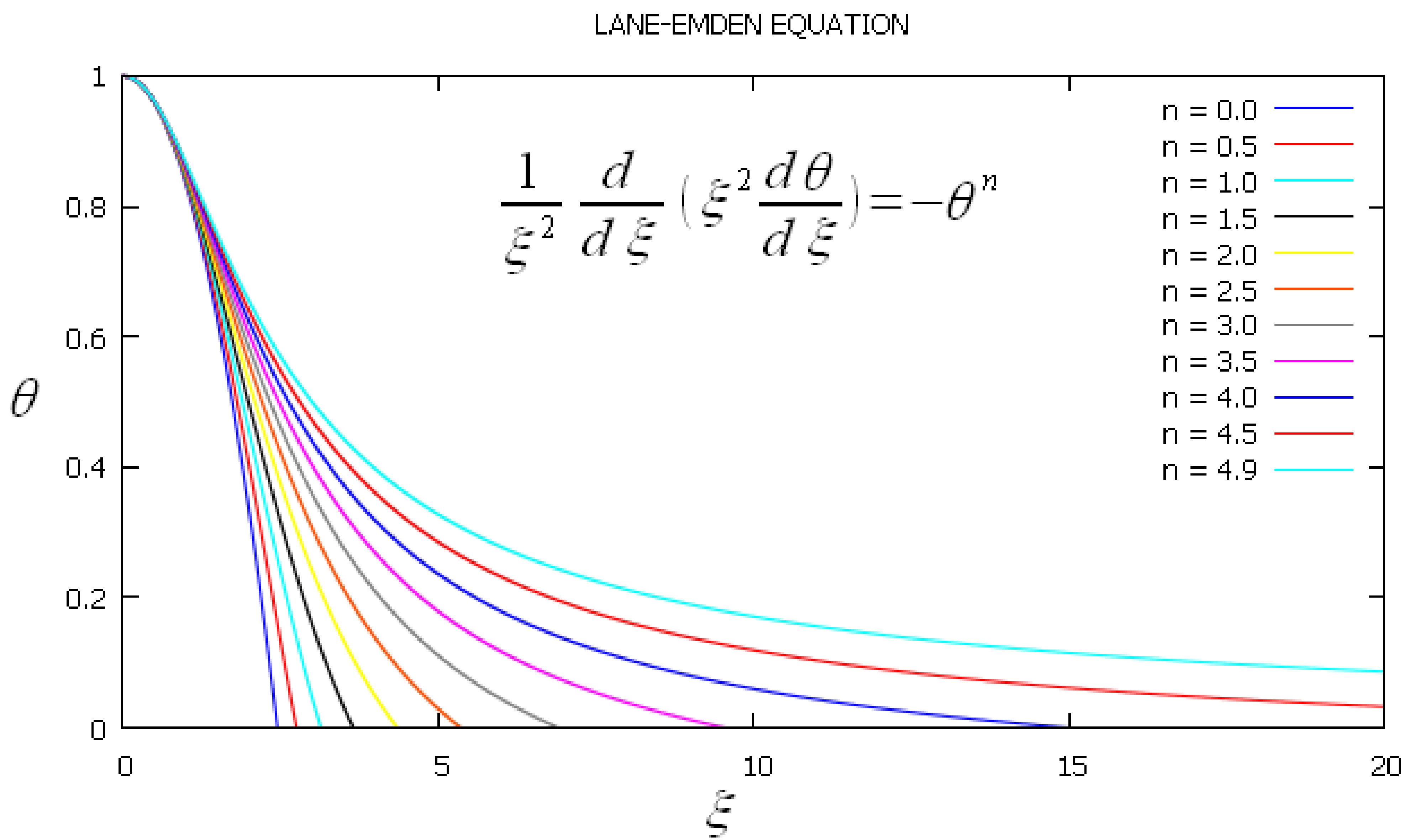
$$\theta^3 + \frac{1}{\xi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\Big(\xi^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\xi}\Big) = 0\ , \qquad \text{met} \quad \xi \equiv r\rho_c^{1/3}\Big(\frac{\pi G_{_N}}{K}\Big)^{1/2}.$$

Deze vergelijking kan nu onafhankelijk van de ster worden opgelost!

(v) Vervolg presentatie-opdracht: de gezochte oplossing van de Lane–Emden vergelijking wordt vastgelegd door de randvoorwaarden voor $\xi = 0$, waar moet gelden dat $\theta = 1$ en $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\xi = 0$. De straal R van de ster komt dan overeen met $\xi = 6.897$, alwaar geldt dat $\theta = 0$ en $\xi^2\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\xi = -2.018$. Laat met behulp van onderdeel (iii) zien dat er nu een unieke oplossing is voor de massa van een zware witte dwerg, namelijk de zogenaamde Chandrasekhar limiet

$$M_{_C} = m(R) = 8.072\,\pi\Big(\frac{K}{\pi G_{_N}}\Big)^{3/2} \overset{A=2Z}{=\!=\!=} 2.854\times 10^{30}\,\text{kg} \approx 1.44 \text{ zonnemassa's}\ .$$

$$\boxed{\text{Te gebruiken:}\ \ M_p^{-2}\big(\hbar c/G_{_N}\big)^{3/2} = \frac{M^3_{\text{Planck}}}{M_p^2} = 3.6851\times 10^{30}\,\text{kg} \approx 1.8533 \text{ zonnemassa's}\ .}$$


LANE-EMDEN EQUATION
$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi})=-\theta^n$
θ
ξ
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
5
10
15
20
n = 0.0
n = 0.5
n = 1.0
n = 1.5
n = 2.0
n = 2.5
n = 3.0
n = 3.5
n = 4.0
n = 4.5
n = 4.9