Extra 1) Verstrooiing van spin-½ deeltjes aan spin-0 deeltjes

$\Rightarrow$ verstrooiingsoperator $\hat F$ die als een 2x2 matrix F werkt in de spin-½ spinruimte.

Voor een pure spin-begintoestand $|\chi^i\rangle$ v/d inkomende spin-½ bundel en een pure spin-eindtoestand $|\chi^f\rangle$ v/d verstrooide spin-½ deeltjes geldt

$$\frac{d\sigma_{i\to f}}{d\Omega} = \underbrace{|\langle\chi^f|\hat F|\chi^i\rangle|^2}_{\text{waarschijnlijkheid}}$$ voor de differentiële werkzame doorsnede.

Situatie 1: geen spinmeting in de eindtoestand $\Rightarrow$ sommeer over de bijdragen voor $|\chi^f\rangle = |\chi_{\frac12,\frac12}\rangle$ en $|\chi^f\rangle = |\chi_{\frac12,-\frac12}\rangle$.

(i) Inkomende spin-½ bundel zit in de pure spintoestand $|\chi^i\rangle$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_i}{d\Omega} = \sum_{m_s=\pm 1/2} |\langle\chi_{\frac12,m_s}|\hat F|\chi^i\rangle|^2 = \sum_{m_s=\pm 1/2} \langle\chi_{\frac12,m_s}|\hat F|\chi^i\rangle^* \langle\chi_{\frac12,m_s}|\hat F|\chi^i\rangle$$

$$= \sum_{m_s=\pm 1/2} \langle\chi^i|\hat F^\dagger|\chi_{\frac12,m_s}\rangle\langle\chi_{\frac12,m_s}|\hat F|\chi^i\rangle \xrightarrow[\text{spinru.}]{\text{voll.}} \langle\chi^i|\hat F^\dagger\hat F|\chi^i\rangle = \langle\hat F^\dagger\hat F\rangle_i$$

(ii) Inkomende spin-½ bundel heeft polarisatievector $\vec P$ $\Rightarrow$ gemengd ensemble met dichtheidsoperator $\hat\rho \xrightarrow{\text{spinru.}} \rho = \frac12(I+\vec P\cdot\vec\sigma)$.

Ensemblegemiddelde v/d differentiële werkzame doorsnede:

$$\frac{d\bar\sigma}{d\Omega} \overset{(i)}{=} [\hat F^\dagger\hat F] = Tr(\hat\rho\hat F^\dagger\hat F) \xrightarrow{\text{spinru.}} \frac12 Tr(F^\dagger F) + \frac12\vec P\cdot Tr(\vec\sigma F^\dagger F).$$

Situatie 2: polarisatie geïnduceerd door de verstrooiing.

normalisatie

(iii) Pure spin-begintoest. $|\chi^i\rangle \xrightarrow{\text{verstr.}}$ pure spin-eindtoestand $|\chi^{sc}\rangle = c|\hat F\chi^i\rangle$, immers $|\langle\chi^f|\hat F|\chi^i\rangle|^2 = |\langle\chi^f|\hat F\chi^i\rangle|^2 = 0$ als $|\chi^f\rangle \perp |\hat F\chi^i\rangle$. De spinonafhankelijke coëfficiënt $c\in\mathbb{C}$ brengt in rekening dat slechts een deel v/d deeltjes wordt verstrooid!

(iv) Inkomende spin-½ bundel heeft dichtheidsoperator $\hat\rho = \sum_i W_i|\chi^i\rangle\langle\chi^i|$

$\Rightarrow$ na de verstrooiing: $\hat\rho' = \sum_i W_i |c\hat F\chi^i\rangle\langle c\hat F\chi^i| = |c|^2\sum_i W_i \hat F|\chi^i\rangle\langle\chi^i|\hat F^\dagger$

$= |c|^2\hat F\hat\rho\hat F^\dagger$, met $|c|^2 = 1/Tr(\hat F\hat\rho\hat F^\dagger)$ om te garanderen dat $Tr(\hat\rho') = 1$

$\Rightarrow$ dichtheidsoperator voor verstrooide deeltjes: $\boxed{\hat\rho' = \frac{\hat F\hat\rho\hat F^\dagger}{Tr(\hat F\hat\rho\hat F^\dagger)}}$.

(v) Ongepolariseerde inkomende spin-½ bundel: $\hat\rho = \frac12\hat 1 \Rightarrow \hat\rho' = \frac{\hat F\hat F^\dagger}{Tr(\hat F\hat F^\dagger)}$.

puur gevolg v/d verstrooiing

Polarisatievector bij $\hat\rho'$: $\vec P' = \frac{2}{\hbar}[\hat{\vec S}]' = Tr(\hat\rho'\frac{2}{\hbar}\hat{\vec S}) \xrightarrow{\text{spinru.}} \boxed{\frac{Tr(FF^\dagger\vec\sigma)}{Tr(FF^\dagger)} = \vec P'}$.