Uitleg minimale substitutie

Extra 3) Lagrangiaan: $L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) + q\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\dot{\vec{r}} - q\phi(\vec{r},t)$,
waarbij $\vec{A}(\vec{r},t) \in \mathbb{R}^3$ de elektromagnetische vectorpotentiaal is en
$\phi(\vec{r},t) \in \mathbb{R}$ de elektromagnetische scalaire potentiaal.
Verder zijn m en q de massa en lading v/h beschouwde (spin-0) deeltje
dat net als het e.m. veld klassiek zal worden behandeld in deze opgave.

(i) Kanonieke impuls: $\vec{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}(\vec{r},t)$

de met $\vec{r}$ geconjugeerde impuls

kinematische impuls

(ii) Lagrange-vergelijking: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \Rightarrow m\ddot{\vec{r}} + q\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\nabla}(-V - q\phi + q\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}})$

$$\Rightarrow m\ddot{\vec{r}} + q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + q(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} = -\vec{\nabla}(V + q\phi) + q\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}})$$

$$\Rightarrow m\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}V + q\Big[\underbrace{-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi}_{\vec{E}} + \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}) - (\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}}_{\text{hint: } \dot{\vec{r}}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \dot{\vec{r}}\times\vec{B}}\Big] = -\vec{\nabla}V + q\underbrace{(\vec{E} + \dot{\vec{r}}\times\vec{B})}_{\text{Lorentz-kracht}} = m\ddot{\vec{r}}$$

(iii) Hamiltoniaan: $H(\vec{r},\vec{p},t) = \vec{p}\cdot\dot{\vec{r}} - L \overset{(i)}{=} \vec{p}\cdot\left(\frac{\vec{p}-q\vec{A}}{m}\right) - \frac{1}{2}m\left(\frac{\vec{p}-q\vec{A}}{m}\right)^2 + V(\vec{r})$

$$- q\vec{A}\cdot\left(\frac{\vec{p}-q\vec{A}}{m}\right) + q\phi$$

$$\Rightarrow H(\vec{r},\vec{p},t) = \frac{[\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r},t)]^2}{2m} + q\phi(\vec{r},t) + V(\vec{r}).$$

Deze overgang van $H_0(\vec{r},\vec{p}) = \vec{p}^2/2m + V(\vec{r})$ (zonder e.m. veld) naar
$H(\vec{r},\vec{p},t)$ (met e.m. veld) wordt <u>minimale substitutie</u> genoemd!

Dit is een voorbeeld v/e systeem met een snelheidsafhankelijke potentiaal
dat desondanks toch m.b.v. het Lagrangiaanformalisme kan worden
beschreven (d.w.z. de Lagrange-vergelijking = de bewegingsvergelijking)!