

Opg 22) N niet-interagerende identieke spin- s deeltjes in een harmonische val:
 ruimtelijke 1-deeltjes energie-eigenw. $E_{x,y,z} = E_0 + \hbar(\nu_x n_x + \nu_y n_y + \nu_z n_z)$ ($\nu_j \in \mathbb{N}$)
 x,y,z

(i) Continuüm limiet voor de toestandsdichtheid: $D(E) \equiv (2s+1) \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty dz \delta(E - E_{x,y,z})$

$$= (2s+1) \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \int_0^\infty dz \delta(E - E_0 - \hbar\nu_x n_x - \hbar\nu_y n_y - \hbar\nu_z n_z)$$

$$\frac{E_j \equiv \hbar\nu_j n_j}{\text{voor } j=x,y,z} \quad \frac{2s+1}{(\hbar\bar{\omega})^3} \int_0^{E-E_0} dE_x \int_0^{E-E_0-E_x} dE_y \int_0^{E-E_0-E_x-E_y} dE_z \delta(E-E_0-E_x-E_y-E_z) = \begin{cases} \frac{2s+1}{2(\hbar\bar{\omega})^3} (E-E_0)^2 & \text{als } E \geq E_0 \\ 0 & \text{als } E < E_0 \end{cases}$$

$$\int_0^{E-E_0} dE_x \int_0^{E-E_0-E_x} dE_y = \int_0^{E-E_0} dE_x (E-E_0-E_x) = \frac{1}{2}(E-E_0)^2 \text{ met } E \geq E_0$$

Scenario 1: $s = 1/2$ en $T = 0$

(ii) Bepaling Fermi-energie: $\int_{E_0}^{E_F} dE D(E) = \int_0^{E_F-E_0} d(E-E_0) \frac{2s+1}{2\hbar^3 \bar{\omega}^3} (E-E_0)^2 = \frac{(E_F-E_0)^3}{3\hbar^3 \bar{\omega}^3} = N$

$\Rightarrow E_F - E_0 = (3\hbar^3 \bar{\omega}^3 N)^{1/3} = \hbar\bar{\omega} (3N)^{1/3}$ maximale excitatie-energie.

(iii) Gemiddelde excitatie-energie: $\int_0^{E_F-E_0} d(E-E_0) (E-E_0) \frac{(E-E_0)^2}{\hbar^3 \bar{\omega}^3} = \frac{(E_F-E_0)^4}{4\hbar^3 \bar{\omega}^3} = \frac{3}{4} N (E_F-E_0)$

$\Rightarrow \frac{3}{4} (E_F - E_0)$ per deeltje.

Scenario 2: $s = 0$ en $T \neq 0$, gebruik groot-kanoniek ensemble.

(iv) $N = \int_{-\infty}^{\infty} dE D(E) \bar{n}(E) = \int_{E_0}^{\infty} dE \frac{(E-E_0)^2}{2\hbar^3 \bar{\omega}^3} \frac{e^{-\beta(E-E_0)}}{e^{\beta E_0} - 1} \stackrel{x = \beta(E-E_0)}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{k_B T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \int_0^{\infty} dx \frac{x^2}{e^{x+\beta E_0} - 1}$ (1)

$\bar{n}(E) \geq 0 \Rightarrow \beta \geq -\beta E_{\text{grndtoest}} = -\beta E_0$

monotoon dalende functie van $x + \beta E_0$ met als maximum $\int_0^{\infty} dx \frac{x^2}{e^x - 1} = 2.404$ voor $x + \beta E_0 = 0$

(v) De bezetting raakt verzadigd als $k_B T = k_B T_0 = \hbar\bar{\omega} (2N/2.404)^{1/3}$

- \Rightarrow (1) correct voor $T > T_0$,
- Bose-Einstein condensatie als $T < T_0 \Rightarrow$ corrigeer $D(E)$ voor de grondtoest.:

$\bar{D}(E) = D(E) + \delta(E-E_0)$

Dan is $x + \beta E_0 = 0$ vereist, zodat $\bar{N}_0 = \frac{1}{e^{\beta E_0 + \beta E_0} - 1} = \mathcal{O}(N)$ deeltjes (gemiddeld) in de grondtoest. zitten: $\bar{N}_0/N \stackrel{\text{opg-21}}{=} \frac{1}{1 - (T/T_0)^3}$

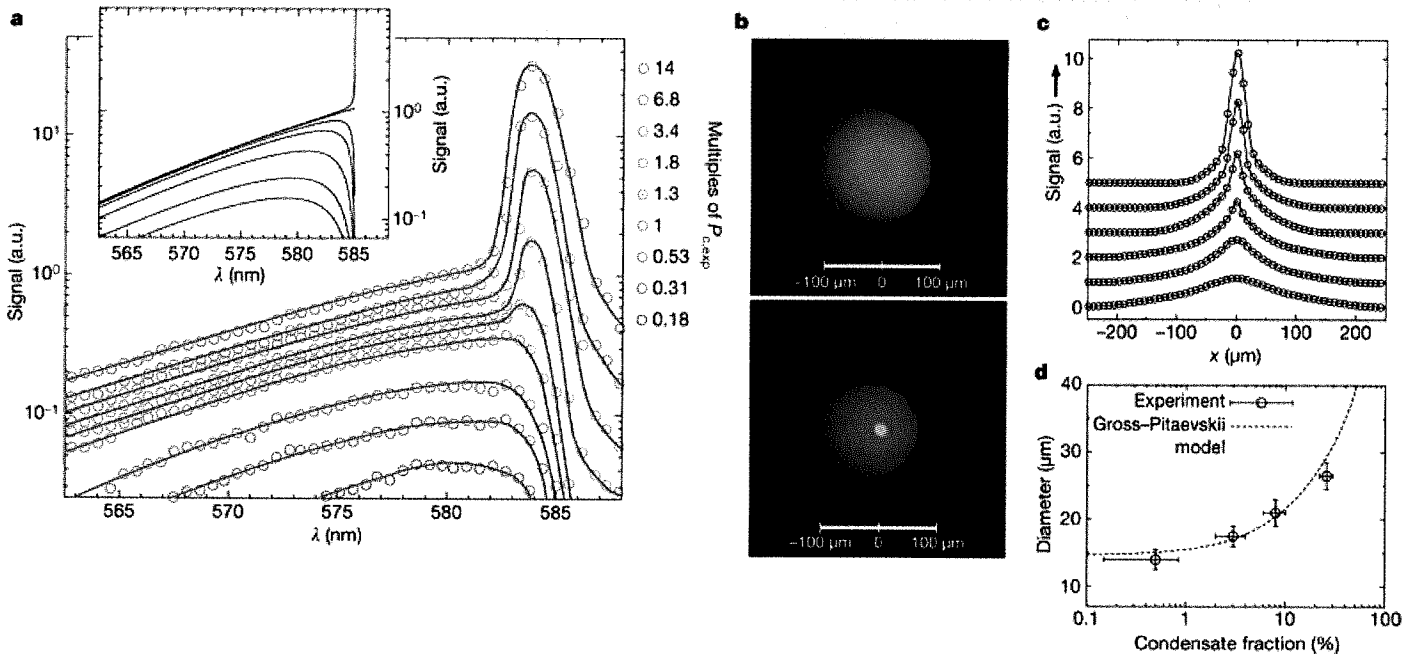
Dit voorbeeld is van toepassing op de QM van ultrakoude kwantumgassen!

Figure 2: Spectral and spatial intensity distribution.

From Bose-Einstein condensation of photons in an optical microcavity

Jan Klaers,, Julian Schmitt,, Frank Vewinger & Martin Weitz

Nature 468, 545–548 (25 November 2010) doi:10.1038/nature09567



a, Spectral intensity distributions (connected circles) transmitted through one cavity mirror, as measured with a spectrometer, for different pump powers (see colour key). The intracavity power (in units of $P_{\text{c,exp}} = (1.55 \pm 0.60) \text{ W}$) is derived from the power transmitted through one cavity mirror. A spectrally sharp condensate peak at the cavity cut-off is observed above a critical power level, with a width limited by the spectrometer resolution. The inset gives theoretical spectra (solid lines) based on a Bose-Einstein distribution of photons for different particle numbers at room temperature¹⁴. a.u., arbitrary units. b, Images of the spatial radiation distribution transmitted through one cavity mirror both below (upper panel) and above (lower panel) criticality, showing a macroscopically occupied TEM₀₀-mode for the latter case. c, d, Cut through the centre of the intensity distribution for increasing optical pump powers (c) and width of the condensate peak versus condensate fraction, along with a theoretical model based on the Gross-Pitaevskii equation with an interaction parameter $\tilde{g} = 7 \times 10^{-4}$ (Methods) (d). Error bars are the systematic calibration uncertainties. $q = 11$ for c and d. All other measurements use $q = 7$.

Bijlage opg. 15:

- * perfect reflecterende spiegels \Rightarrow fotonen hebben een minimale energie $\hbar\omega_c \equiv m_\gamma c^2$.
 Gevolg: 2-D gas van massieve fotonen; voor $\hbar\omega_c \gg k_B T$ is er effectief sprake van een behouden aantal fotonen (thermische creatie onderdrukt met $e^{-\hbar\omega_c/k_B T}$).
 [Experiment: $\hbar\omega_c \approx 2.1 \text{ eV}$, $k_B T_{\text{kamer}} \approx 0.026 \text{ eV} \Rightarrow$ onderdrukkingsfactor $\approx e^{-80}$]
- * gekromde spiegels \Rightarrow er ontstaat een harmonische val met frequentie Ω voor het 2-D gas.
 Opg. 22 voor 2-D val en twee polarisaties; $D(E) = 2(E - E_0)/(\hbar\Omega)^2$, met $E_0 = \hbar\Omega$
 Opg. 21 \Rightarrow Bose-Einstein condensatie is mogelijk

$$N = \left(\frac{k_B T}{\hbar\Omega}\right)^2 \int_0^\infty dx \frac{2x}{e^{x+\gamma+\beta E_0} - 1} \Rightarrow \text{BEC} \begin{cases} \text{als } T < T_0 = \frac{\hbar\Omega}{\pi k_B} \sqrt{3N} \text{ voor } N \text{ vast} \\ \text{als } N > N_c = \left(\frac{k_B T}{\hbar\Omega}\right)^2 \frac{\pi^2}{3} \text{ voor } T \text{ vast} \end{cases}$$

max.: $\frac{\pi^2}{3}$ voor $\gamma = -\beta E_0$

b.v.u. kamertemp. $\approx 300 \text{ K}$

Opg. 23) Vlakke-golf oplossingen v/d vroege Klein-Gordon vergelijking:

$$\psi_p(x) = e^{-ip \cdot x / \hbar}, \quad p^2 = m^2 c^2 \Rightarrow p^0 = E/c = \pm \sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}$$

(i) $\square \psi_p(x) = \partial_\mu (\overset{\partial/\partial x_\mu}{\partial} e^{-ip \cdot x / \hbar}) = -\frac{i}{\hbar} p^\mu \partial_\mu e^{-ip \cdot x / \hbar} = (-\frac{i}{\hbar} p^\mu) (-\frac{i}{\hbar} p_\mu) \psi_p(x) = \frac{p^2}{\hbar^2} \psi_p(x)$

$$\Rightarrow (\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}) \psi_p(x) = \frac{m^2 c^2 - p^2}{\hbar^2} \psi_p(x) = 0 \text{ als } p^2 = m^2 c^2$$

(ii) "waarschijnlijkheidsdichtheid": $\rho(x) = \text{Re} \left\{ \frac{i\hbar}{mc^2} \psi^*(x) \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) \right\}$

$$\Rightarrow \text{voor } \psi_p(x) \text{ geldt } \rho(x) = \text{Re} \left\{ \frac{i\hbar}{mc^2} e^{ip \cdot x / \hbar} \left(\frac{-i}{\hbar} p^0 c \right) e^{-ip \cdot x / \hbar} \right\} = \frac{p^0}{mc}$$

hetgeen negatief is voor negatieve-energie oplossingen ($p^0 < 0$).

(iii) Laat alleen oplossingen met $p^0 > 0$ toe en bekijk de lineaire combinatie $\psi(x) = a \psi_{p_1}(x) + b \psi_{p_2}(x)$, met $p_1^0 > p_2^0 > 0$ en $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Dan geldt: } \rho(x) = \text{Re} \left(\left[a e^{ip_1 \cdot x / \hbar} + b e^{ip_2 \cdot x / \hbar} \right] \left[\frac{p_1^0}{mc} a e^{-ip_1 \cdot x / \hbar} + \frac{p_2^0}{mc} b e^{-ip_2 \cdot x / \hbar} \right] \right)$$
$$= \text{Re} \left(\frac{p_1^0}{mc} \left[a^2 + ab e^{-i(p_1 - p_2) \cdot x / \hbar} \right] + \frac{p_2^0}{mc} \left[b^2 + ab e^{i(p_1 - p_2) \cdot x / \hbar} \right] \right)$$

Kies bijvoorbeeld x z.d.d. $e^{\pm i(p_1 - p_2) \cdot x / \hbar} = -1$, dan kan $\rho(x) = \frac{a p_1^0 - b p_2^0}{mc} (a - b)$ negatief worden voor $a < b < a p_1^0 / p_2^0$.

(iv) Zulke lineaire combinaties kunnen niet uit de theorie verwijderd worden, aangezien anders het superpositieprincipe verloren gaat. Dit fundamentele QM principe zegt namelijk dat een lineaire combinatie van legitieme QM golf functies weer een legitieme QM golf functie moet opleveren.

↑ Klein-Gordon verg. \neq relativistische 1-deeltjes QM golfverg.

Opmerking: de Klein-Gordon vergelijking is een 2^e orde differentiaalvers. in de tijd \Rightarrow begincondities voor ψ en $\partial\psi/\partial t$ zijn onafhankelijk te kiezen (en daardoor is het teken van $\rho(x)$ te manipuleren).