Opg. 26) Dirac-verg. voor vrije deeltjes : $(i\hbar\not{\partial} - mc)\,\psi(x) = 0$.

Infinitesimale rotatie over $\delta\varphi$ rond $\vec{e}_n$-as : $\vec{x}' = \vec{x} + \delta\varphi\, \vec{e}_n \times \vec{x}$

(i) Schrijf dit als infinitesimale Lorentz-transf. : $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} = x^{\mu} + \delta\omega^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$

$$x'^0 = x^0 \Rightarrow \delta\omega^0{}_\nu = -\delta\omega^\nu{}_0 = 0 \qquad (\nu = 0, \dots, 3)$$

$$x'^j = x^j + \delta\varphi \underbrace{\sum_{k,l=1}^{3} \epsilon^{jlk} e_n^l x^k}_{(\vec{e}_n \times \vec{x})^j} \Rightarrow \delta\omega^j{}_k = \delta\varphi \sum_{l=1}^{3} \epsilon^{jlk} e_n^l = -\delta\varphi \sum_{l=1}^{3} \epsilon^{jkl} e_n^l \qquad (j,k = 1,2,3)$$

(antisymm. onder $j \leftrightarrow k$)

(ii) $\psi'(x') \overset{\text{inf.}}{=} (I - \frac{i}{4}\delta\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})\,\psi(x)$, met

$$\sigma^{jk} \underset{\text{repr.}}{\overset{\text{Dirac}}{=}} \sum_{l'=1}^{3} \epsilon^{jkl'} \begin{pmatrix} \sigma^{l'} & \emptyset \\ \emptyset & \sigma^{l'} \end{pmatrix} = \frac{2}{\hbar} \sum_{l'=1}^{3} \epsilon^{jkl'} \hat{S}^{l'}$$

$$\Rightarrow \psi'(x') \overset{(i)}{=} (I - \frac{i}{4} \sum_{j,k=1}^{3} \underbrace{\delta\omega_{jk}}_{-\delta\omega^j{}_k} \sigma^{jk})\,\psi(x) = (I - \frac{i}{2\hbar} \sum_{l,l'=1}^{3} \delta\varphi\, e_n^l \hat{S}^{l'} \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon^{jkl} \epsilon^{jkl'})\,\psi(x)$$

$$\overset{\text{hint}}{=} (I - \frac{i}{\hbar}\delta\varphi \sum_{l=1}^{3} e_n^l \hat{S}^l)\,\psi(x) = (I - \frac{i}{\hbar}\delta\varphi\, \vec{e}_n \cdot \hat{\vec{S}})\,\psi(x)$$

generator rotaties in de spinorruimte

(iii) Eindige rotatie over een hoek φ rond de $\vec{e}_n$-as : te schrijven als een oneindige set van infinitesimale rotaties.

$$\psi'(x') = \lim_{N \to \infty} (I - \frac{i}{\hbar} \left(\frac{\varphi}{N}\right) \vec{e}_n \cdot \hat{\vec{S}})^N \psi(x) = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi\, \vec{e}_n \cdot \hat{\vec{S}}}\, \psi(x)$$

($\frac{\varphi}{N}$: $\delta\varphi$)

$$\varphi = 2\pi \Rightarrow S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{\hbar} 2\pi\, \vec{e}_n \cdot \hat{\vec{S}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-i\pi \frac{2}{\hbar} \vec{e}_n \cdot \hat{\vec{S}})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-i\pi)^k \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{e}_n & \emptyset \\ \emptyset & \vec{\sigma}\cdot\vec{e}_n \end{pmatrix}^k$$

Er geldt :
$$\begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{e}_n & \emptyset \\ \emptyset & \vec{\sigma}\cdot\vec{e}_n \end{pmatrix}^k = \begin{cases} I & \text{als } k \text{ even} \\ \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{e}_n & \emptyset \\ \emptyset & \vec{\sigma}\cdot\vec{e}_n \end{pmatrix} & \text{als } k \text{ oneven} \end{cases}, \quad \text{m.b.v. } (\vec{\sigma}\cdot\vec{e}_n)^2 = \vec{e}_n^{\,2} I = I$$

$$\Rightarrow S(\Lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \underbrace{(-i\pi)^{2k}}_{(-1)^k \pi^{2k}} I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \underbrace{(-i\pi)^{2k+1}}_{-i(-1)^k \pi^{2k+1}} \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{e}_n & \emptyset \\ \emptyset & \vec{\sigma}\cdot\vec{e}_n \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{hint}}{=} \cos(\pi)\, I - i\sin(\pi) \begin{pmatrix} \vec{\sigma}\cdot\vec{e}_n & \emptyset \\ \emptyset & \vec{\sigma}\cdot\vec{e}_n \end{pmatrix} = -I \leftarrow$$

projectieve (meerwaardige) representatie v/d rotatiegroep

In de niet-relativistische QM geldt dat de spin-½ spinvector van teken omslaat bij rotaties over 2π. In de relativistische QM zien we hetzelfde gebeuren met de Dirac-spinoren, die twee spin-½ deeltjes beschrijven

Extra 2) Dirac-verg. voor vrije deeltjes : $(i\hbar\not{\partial} - mc)\psi(x) = 0$

Ruimtelijke inversie : $x'^{\mu} = (\Lambda_p)^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$, $(\Lambda_p)^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & \emptyset \\ \emptyset & \begin{smallmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{smallmatrix} \end{pmatrix}$

$\psi'(x') = S(\Lambda_p)\psi(x)$, $S(\Lambda_p)$ unitair

(i) $(i\hbar\not{\partial}' - mc)\psi'(x') = 0$ volgt rechtstreeks uit $(i\hbar\not{\partial} - mc)\psi(x) = 0$ als

$$S^{-1}(\Lambda_p)\gamma^{\rho}S(\Lambda_p) = (\Lambda_p)^{\mu}{}_{\nu}\gamma^{\nu} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} S^{-1}(\Lambda_p)\gamma^0 S(\Lambda_p) = \gamma^0 \Rightarrow [S(\Lambda_p), \gamma^0] = 0 \\ S^{-1}(\Lambda_p)\vec{\gamma}\, S(\Lambda_p) = -\vec{\gamma} \Rightarrow \{S(\Lambda_p), \vec{\gamma}\} = 0 \end{matrix}} \quad (1)$$

(ii) Beschouw vervolgens de basismatrices $I, \gamma^{\mu}, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^{\mu}\gamma^5, \gamma^5$ en ontbindt $S(\Lambda_p)$ in termen van deze basis. Vermenigvuldigd met γ^{ρ} $(\rho = 0, \cdots, 3)$ gaat deze basis één-op-één over in een specifieke permutatie van deze basis. Dus als een bepaalde basismatrix niet voldoet aan de commutatie/anticommutatierelaties (1), dan moet de bijbehorende coëff. 0 zijn.

Tabel: een entry $\pm$ in de γ^{ρ} rij betekent $\gamma^{\rho}\Gamma_j = \pm \Gamma_j \gamma^{\rho}$

Γ_j ← basismatrix

γ-matrix \ basis-matrix	I	γ^0	γ^1	γ^2	γ^3	σ^{01}	σ^{02}	σ^{03}	σ^{12}	σ^{13}	σ^{23}	$\gamma^0\gamma^5$	$\gamma^1\gamma^5$	$\gamma^2\gamma^5$	$\gamma^3\gamma^5$	γ^5	we willen
γ^0	+	+	−	−	−	−	−	−	+	+	+	−	+	+	+	−	+
γ^1	+	−	+	−	−	−	+	+	−	−	+	+	−	+	+	−	−
γ^2	+	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	−	−
γ^3	+	−	−	−	+	+	+	−	+	−	−	+	+	+	−	−	−

$\Uparrow$

Dus blijft over $S(\Lambda_p) = \text{const.} * \gamma^0$, met $\gamma^{0\dagger} = (\gamma^0)^{-1} = \gamma^0$

$\Rightarrow$ voor $S(\Lambda_p)$ unitair moet gelden dat const. $= e^{i\varphi_p}$ $(\varphi_p \in \mathbb{R})$.

(iii) De stationaire vlakke-golf opl. v/d vrije Dirac-verg. in het rustsysteem zijn eigenfuncties van γ^0 en dus $S(\Lambda_p)$ bij de eigenwaarden ± 1 — $+$: $E = +mc^2$, $-$: $E = -mc^2$

(intrinsieke pariteit)

Opg. 27) Vrije Dirac-theorie : $\hat{H} = c\vec{\alpha}.\hat{\vec{p}} + \beta mc^2$, $\hat{\vec{S}}$ = spinoperator

Er geldt : $[\beta, \hat{S}^j] = 0$ (2) , $[\alpha^k, \hat{S}^j] = i\hbar \sum_{n=1}^{3} \epsilon^{kjn}\alpha^n$ $(j,k = 1,2,3)$ (3)

$[\hat{H}, \hat{\vec{p}}] = 0$ want $\hat{H}$ is onafh. van $\hat{\vec{r}}$, $[\hat{\vec{p}}, \hat{\vec{p}}.\hat{\vec{S}}] = 0$ want $\hat{\vec{p}}, \hat{\vec{S}}$ werken op verschillende ruimten , $[\hat{H}, \hat{\vec{p}}.\hat{\vec{S}}] \overset{\downarrow}{=} \hat{\vec{p}}.[\hat{H}, \hat{\vec{S}}] \overset{(2)}{=} c \sum_{j,k=1}^{3} \hat{p}^j \hat{p}^k [\alpha^k, \hat{S}^j] \overset{(3)}{=} i\hbar c \sum_{j,k,n=1}^{3} \underbrace{\epsilon^{kjn}}_{\text{antisymm.}} \underbrace{\hat{p}^j\hat{p}^k}_{\text{symm.}} \alpha^n = 0$

$\Rightarrow$ $\underbrace{\hat{H}, \hat{\vec{p}} \text{ en } \hat{\vec{p}}.\hat{\vec{S}}}$ zijn commensurabel ($\hat{\vec{p}}.\hat{\vec{S}} = |\vec{p}| *$ heliciteitsoperator).

$\hat{\vec{p}}$ symm. onder rotaties rond $\vec{e}_p$ en $\hat{\vec{p}}.\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{p}}.\hat{\vec{S}}$

Opg. 28) Dirac-verg. voor spin-½ deeltjes met lading q en rustmassa m o.i.v. een klassiek e.m. veld: $(i\hbar\not\partial - mc - q\not A(x))\,\psi(x) = 0$ (1).

<u>Ladingsconjugatie</u>: $\boxed{\psi_c(x) \equiv \gamma^2\psi^*(x)}$ in de Dirac-representatie.

$$\text{Dirac-repr.}: \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & \emptyset \\ \emptyset & -I \end{pmatrix} = (\gamma^0)^*, \quad \vec\gamma = \begin{pmatrix} \emptyset & \vec\sigma \\ -\vec\sigma & \emptyset \end{pmatrix} \quad (2).$$

Er geldt $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\sigma^1)^*$, $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -(\sigma^2)^*$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (\sigma^3)^*$

$\Rightarrow \gamma^\mu = (\gamma^\mu)^*$ voor $\mu = 0,1,3$ en $\gamma^\mu = -(\gamma^\mu)^*$ voor $\mu = 2$ (3).

Met behulp van $\gamma^2\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^2$ voor $\mu \neq 2$ en $\gamma^2\gamma^\mu = \gamma^\mu\gamma^2$ voor $\mu = 2$ is dit te herschrijven als $\gamma^2(\gamma^\mu)^* = -\gamma^\mu\gamma^2$ (4)

(i) Complexe conjugatie van (1) $\Rightarrow [-i\hbar\partial_\mu(\gamma^\mu)^* - mc - qA_\mu(x)(\gamma^\mu)^*]\,\psi^*(x) = 0$, gebruik makende v/h feit dat $A_\mu(x) \in \mathbb{R}$ voor $\mu = 0,\ldots,3$.

Van links vermenigvuldigen met γ^2 geeft dan

$$[-i\hbar\partial_\mu\,\gamma^2(\gamma^\mu)^* - mc\gamma^2 - qA_\mu(x)\,\gamma^2(\gamma^\mu)^*]\,\psi^*(x)$$

ladingsgeïnverteerde vergelijking

$$\overset{(4)}{=\!=} [i\hbar\partial_\mu\gamma^\mu - mc + qA_\mu(x)\gamma^\mu]\,\gamma^2\psi^*(x) = [i\hbar\not\partial - mc + q\not A(x)]\,\psi_c(x) = 0$$

(ii) Pas nu twee keer ladingsconjugatie toe: $(\psi_c)_c = \gamma^2(\psi_c)^* = \gamma^2(\gamma^2\psi^*)^*$
$\overset{(3)}{=\!=} -\gamma^2\gamma^2\psi = +I\psi = \psi \Rightarrow$ (ladingsconjugatie)$^2 = \hat 1$.

(iii) Statisch e.m. veld $A_\mu(x) = A_\mu(\vec r)$. Beschouw nu een oplossing van (1) bij de negatieve energie-eigenw. $-E$: $\psi^{(-E)}(x) = e^{iEt/\hbar}\begin{pmatrix} \psi_1(\vec r) \\ \psi_2(\vec r) \\ \psi_3(\vec r) \\ \psi_4(\vec r) \end{pmatrix} \equiv e^{iEt/\hbar}\begin{pmatrix} \psi_u(\vec r) \\ \psi_D(\vec r) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \psi_c^{(-E)}(x) = e^{-iEt/\hbar}\,\gamma^2\begin{pmatrix} \psi_u^*(\vec r) \\ \psi_D^*(\vec r) \end{pmatrix} \overset{(2)}{=\!=} e^{-iEt/\hbar}\begin{pmatrix} \sigma^2\psi_D^*(\vec r) \\ -\sigma^2\psi_u^*(\vec r) \end{pmatrix},$$

zodat $-E \xrightarrow{c} +E$, $\psi_u = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c} \begin{pmatrix} -i\psi_4^* \\ i\psi_3^* \end{pmatrix} = \sigma^2\psi_D^*$, $\psi_D = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{c} \begin{pmatrix} i\psi_2^* \\ -i\psi_1^* \end{pmatrix} = -\sigma^2\psi_u^*$.

pos. energie opl.

Spinverwachtingswaarde: $\langle\psi^{(-E)}|\hat{\vec S}|\psi^{(-E)}\rangle = \frac{\hbar}{2}\int d\vec r\,(\psi_u^\dagger(\vec r)\vec\sigma\psi_u(\vec r) + \psi_D^\dagger(\vec r)\vec\sigma\psi_D(\vec r))$

$$\xrightarrow{c} \frac{\hbar}{2}\int d\vec r\,(\psi_D^{\dagger *}\underbrace{\sigma^2\vec\sigma\sigma^2}\psi_D^* + \psi_u^{\dagger *}\sigma^2\vec\sigma\sigma^2\psi_u^*) = -\frac{\hbar}{2}\int d\vec r\,(\psi_D^{\dagger *}\vec\sigma^*\psi_D^* + \psi_u^{\dagger *}\vec\sigma^*\psi_u^*)$$

$$\sigma^2\sigma^k\sigma^2 = \begin{cases} \sigma^k & k=2 \\ -\sigma^k & k=1,3 \end{cases} = (-\sigma^k)^*$$

$$= -\langle\psi^{(-E)}|\hat{\vec S}|\psi^{(-E)}\rangle^* \overset{\hat{\vec S} = \hat{\vec S}^\dagger}{=\!=} -\langle\psi^{(-E)}|\hat{\vec S}|\psi^{(-E)}\rangle$$

klapt van teken om