

Opg. 29) Vrije elektromagnetische golfverg: $\square A^\mu(x) - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu(x)) = 0$,
 met $A^\mu(x) \in \mathbb{R}$ voor $\mu=0, \dots, 3$ de elektromagn. 4-vectorpotentiaal.
 Lorentz-transf: $A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') \equiv G^\mu_\nu(\Lambda) A^\nu(x)$ (G = reële inverteerbare tensor).

(i) Relativiteitsprincipe: uit $\square A^\nu(x) - \partial^\nu(\partial_\sigma A^\sigma(x)) = 0$ in inertiaalsysteem S
 moet automatisch volgen dat in inertiaalsysteem S' geldt dat
 $\square' A'^\mu(x') - \partial'^\mu(\partial'_\rho A'^\rho(x')) = G^\mu_\lambda(\Lambda) \square A^\lambda(x) - \Lambda^\mu_\lambda \partial^\lambda [\partial_\sigma (\Lambda'^\sigma_\rho G^\rho_\tau(\Lambda) A^\tau(x))] = 0$
 $\underline{G^\mu_\nu(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu}$ $\Lambda^\mu_\lambda \left\{ \square A^\lambda(x) - \overbrace{(\Lambda'^\sigma_\rho \Lambda^\rho_\tau)}^{\partial^\sigma_\tau} \partial^\lambda \partial_\sigma A^\tau(x) \right\} = \Lambda^\mu_\lambda (\square A^\lambda(x) - \partial^\lambda(\partial_\sigma A^\sigma(x))) = 0$

volgt inderdaad uit $\square A^\nu(x) - \partial^\nu(\partial_\sigma A^\sigma(x)) = 0$ in S .

De elektromagnetische 4-vectorpotentiaal transformeert dan als een contravariant vectorveld: $A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$.

(ii) Infinitesimale rotatie over $d\gamma$ rond \hat{e}_n ; $\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + d\gamma \hat{e}_n \times \vec{x}$.

Schrijf dit als $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu = x^\mu + d\omega^\mu_\nu x^\nu$, waarbij

$$d\omega^\mu_\nu \stackrel{\text{opg. 26}}{\begin{cases} 0 & \text{als } \mu=0 \vee \nu=0 \\ -d\gamma \sum_{l=1}^3 \epsilon^{jkl} \hat{e}_n^l & \text{als } \mu=j \text{ en } \nu=k \end{cases}} \quad (j, k = 1, 2, 3)$$

uit (i) volgt $A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) = A^\mu(x) + d\omega^\mu_\nu A^\nu(x)$

$\Rightarrow A'^0(x') = A^0(x)$

$$A'^j(x') = \sum_{k=1}^3 (\delta^{jk} - d\gamma \sum_{l=1}^3 \epsilon^{jkl} \hat{e}_n^l) A^k(x) \equiv \sum_{k=1}^3 (\mathbb{I} - \frac{d\gamma}{k} \hat{e}_n \cdot \hat{S})^{jk} A^k(x),$$

m.b.v. $(\hat{S})^{jk} \equiv -ik \epsilon^{jkl} = -ik \epsilon^{jkl}$ werkende op de "ruimtelijke" intrinsieke vrijheidsgraden (d.w.z. de vectorpotentiaal $\vec{A}(x)$).

(iii) De operator \hat{S} is dus de generator van infinitesimale rotaties in de 4-dim. ruimte opgespannen door $A^\mu(x)$ ($\mu=0, \dots, 3$) $\Rightarrow \hat{S}$ = spinoperator.
 De operator \hat{S}^2 werkt als een matrix in deze ruimte:

$$(\hat{S}^2)^{jj'} = \sum_{k,l=1}^3 (\hat{S})^{jk} (\hat{S})^{klj'} \stackrel{(ii)}{=} -k^2 \sum_{k,l=1}^3 \epsilon^{jlk} \epsilon^{klj'} = k^2 \sum_{k,l=1}^3 \epsilon^{kj'l} \epsilon^{klj'} \stackrel{\text{hint}}{=} 2k^2 \delta^{jj'}$$

\uparrow
 $\epsilon^{ljk} = -\epsilon^{kjl}$

$\Rightarrow \hat{S}^2 = 2k^2 \mathbb{I} \equiv s(s+1)k^2 \mathbb{I} \Rightarrow s=1$, oftewel de deeltjes beschreven door $A^\mu(x)$ hebben spin 1!

Opg. 30) Gekwantiseerd elektromagnetisch veld in een afgesloten ruimte met periodieke randvoorwaarden.

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \vec{u}_{\vec{k}, \lambda}(\vec{r}) \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\vec{k}}}} [\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}(t) + \eta_{\lambda} \hat{a}_{-\vec{k}, \lambda}^{\dagger}(t)] \quad , \quad \dot{\hat{a}}_{\vec{k}, \lambda}(t) = -i\omega_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}(t) \quad (1)$$

$\vec{u}_{\vec{k}, \lambda}(\vec{r}) \propto e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

Bijdrage tot de Hamilton-operator t.g.v. het gekwantiseerde \vec{E} -veld:

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int_V d\vec{r} \hat{\vec{E}}(\vec{r}, t) \cdot \hat{\vec{E}}^{\dagger}(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V d\vec{r} \frac{\partial \hat{\vec{A}}}{\partial t}(\vec{r}, t) \cdot \frac{\partial \hat{\vec{A}}^{\dagger}}{\partial t}(\vec{r}, t)$$

$$(1) \quad \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \int_V d\vec{r} \vec{u}_{\vec{k}, \lambda}(\vec{r}) \cdot \vec{u}_{\vec{k}', \lambda'}^*(\vec{r}) \frac{\hbar}{2} \sqrt{\omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'}} [\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}(t) - \eta_{\lambda} \hat{a}_{-\vec{k}, \lambda}^{\dagger}(t)] [\hat{a}_{\vec{k}', \lambda'}^{\dagger}(t) - \eta_{\lambda'} \hat{a}_{-\vec{k}', \lambda'}(t)]$$

$$(E.5) \quad \frac{1}{4} \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \hbar \omega_{\vec{k}} [\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}(t) - \eta_{\lambda} \hat{a}_{-\vec{k}, \lambda}^{\dagger}(t)] [\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger}(t) - \eta_{\lambda} \hat{a}_{-\vec{k}, \lambda}(t)] \quad (2)$$

Bijdrage tot de Hamilton-operator t.g.v. het gekwantiseerde \vec{B} -veld:

$$\frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int_V d\vec{r} \hat{\vec{B}}(\vec{r}, t) \cdot \hat{\vec{B}}^{\dagger}(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int_V d\vec{r} (\nabla \times \hat{\vec{A}}(\vec{r}, t)) \cdot (\nabla \times \hat{\vec{A}}^{\dagger}(\vec{r}, t))$$

$$(1) \quad \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \sum_{\lambda, \lambda'=1}^2 \int_V d\vec{r} (\vec{e}_{\vec{k}} \times \vec{u}_{\vec{k}, \lambda}(\vec{r})) \cdot (\vec{e}_{\vec{k}'} \times \vec{u}_{\vec{k}', \lambda'}^*(\vec{r})) \frac{\hbar}{2} \sqrt{\omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'}} [\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}(t) + \eta_{\lambda} \hat{a}_{-\vec{k}, \lambda}^{\dagger}(t)] [\hat{a}_{\vec{k}', \lambda'}^{\dagger}(t) + \eta_{\lambda'} \hat{a}_{-\vec{k}', \lambda'}(t)]$$

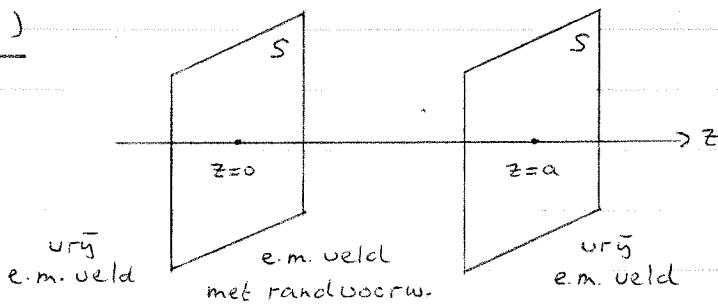
$c\vec{k} = \omega_{\vec{k}}$

$$(E.6) \quad \frac{1}{4} \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \hbar \omega_{\vec{k}} [\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}(t) + \eta_{\lambda} \hat{a}_{-\vec{k}, \lambda}^{\dagger}(t)] [\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger}(t) + \eta_{\lambda} \hat{a}_{-\vec{k}, \lambda}(t)] \quad (3)$$

$$\Rightarrow \hat{H} = (2) + (3) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}} (\hat{a}_{\vec{k}, \lambda}(t) \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger}(t) + \hat{a}_{-\vec{k}, \lambda}^{\dagger}(t) \hat{a}_{-\vec{k}, \lambda}(t)) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \hbar \omega_{\vec{k}} (\hat{n}_{\vec{k}, \lambda} + \frac{1}{2} \hat{1}) = \hat{H}$$

Symm. onder $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ comm. relaties: $\hat{n}_{\vec{k}, \lambda} + \hat{1}$ $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ Spectrum $\{ \sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \hbar \omega_{\vec{k}} (n_{\vec{k}, \lambda} + \frac{1}{2}) ; n_{\vec{k}, \lambda} \in \mathbb{N} \}$ van onderen begrensd door $\sum_{\vec{k}} \sum_{\lambda} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}}$

Opg. 31)



S groot, perfect geleidende platen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} \Rightarrow a$$

$$\vec{E}_{||}(\vec{r}_{||}, z=0, t) = \vec{E}_{||}(\vec{r}_{||}, z=a, t) = \vec{0}$$

$$\vec{B}_z(\vec{r}_{||}, z=0, t) = \vec{B}_z(\vec{r}_{||}, z=a, t) = 0$$

↑ coördinaten // platen,

d.w.z. in xy-vlak

(i) $\vec{A}_{||}(\vec{r}_{||}, z=0, t) = \vec{A}_{||}(\vec{r}_{||}, z=a, t) = \vec{0}$, met $\vec{E} = -\nabla\vec{A}/\partial t$ en $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ in de Coulomb- $\bar{5}K \Rightarrow$ *) $\vec{E}_{||} = \vec{0}$ op de platen, omdat $\vec{A}_{||} = \vec{0}$ op de platen voor alle tijden t ,

*) $B_z = \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x = 0$ op de platen, omdat $\vec{A}_{||} = \vec{0} \Rightarrow A_x = A_y = 0$ voor alle coördinaten op de platen.

(ii) $\vec{A}_{||} = \vec{0}$ op de platen $\Rightarrow \vec{A}_{||}$ is te ontbinden in termen van Fourier-modes die precies een heel- of halftalig aantal oscillaties hebben tussen $z=0$ en $z=a$. Tussen de platen valt $\vec{A}_{||}$ samen met de vectorpotentiaal afkomstig v/e periodieke e.m. veld met periode $2a$ in de z -richting. Omdat $\partial A_z / \partial z \stackrel{\text{Coulomb-}}{\text{conditie}} = -\vec{\nabla}_{||} \cdot \vec{A}_{||}$ zal hetzelfde gelden voor de z -component A_z .

(iii) Gekwantiseerd e.m. veld met periodieke randvoorw. (periode $2a$) in de z -richting en een continuüm/limiet in de $\vec{r}_{||}$ -richtingen:
 k_z is gekwantiseerd volgens $k_z = \frac{2\pi}{2a} \nu = \nu \pi/a$ ($\nu \in \mathbb{Z}$),
 $\vec{k}_{||}$ heeft een continu waardenbereik met $\frac{S}{4\pi^2} d\vec{k}_{||}$ toestanden in het interval $[\vec{k}_{||}, \vec{k}_{||} + d\vec{k}_{||}]$ (zie verg. (375) in het dictaat)
 $\Rightarrow \omega_k = ck = c\sqrt{k_{||}^2 + k_z^2} = c\sqrt{k_{||}^2 + (\nu\pi/a)^2}$.

Gevolg: nulpuntsenergie van zo'n periodiek e.m. veld binnen het volume $2Sa$

$$E_0(2Sa) = \frac{S}{4\pi^2} \int d\vec{k}_{||} \sum_{\nu} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{2} \hbar \omega_k \stackrel{\int d\vec{k}_{||} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dk_{||} |k_{||}|}{=} \frac{\hbar c S}{4\pi} \int_0^{\infty} dk_{||}^2 \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sqrt{k_{||}^2 + (\nu\pi/a)^2}$$

(iv) Vrij e.m. veld: $\sum_{\nu} \rightarrow \frac{2a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \Rightarrow E_0(2Sa) = \frac{\hbar c S}{4\pi} \int_0^{\infty} dk_{||}^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \sqrt{k_{||}^2 + (\nu\pi/a)^2}$
 (cont. i.p.v. som)

(v) Genormaliseerde nulpuntsenergie voor het e.m. veld tussen de platen:
 $E_0^{ren}(a) = \frac{1}{2} E_0(2Sa) - \frac{1}{2} E_0^{vrij}(2Sa) = -\frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c S}{a^3}$ na flink wat rekenwerk,

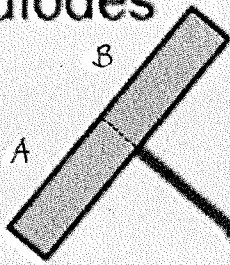
$F_0^{ren}(a) = -\frac{\partial}{\partial a} E_0^{ren}(a) = -\frac{\pi^2}{240} \frac{\hbar c S}{a^4}$ ← aantrekkende kracht tussen de platen (Casimir-effect)

"dimensie" v/d druk P

(vi) Power-counting: $[P] = [F/S] = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$, $[\hbar] = \text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$, $[c] = \text{m s}^{-1}$, $[a] = \text{m}$
 $P \equiv \text{const. } \hbar^\gamma c^\beta a^\delta \Rightarrow \gamma=1, \beta=1, \delta=-4$. (eendige syst. parameters)

Op dimensionele gronden verwachten we dus dat $P = \text{const. } \hbar c / a^4$ ← klopt!

photodiodes



laser

cantilever

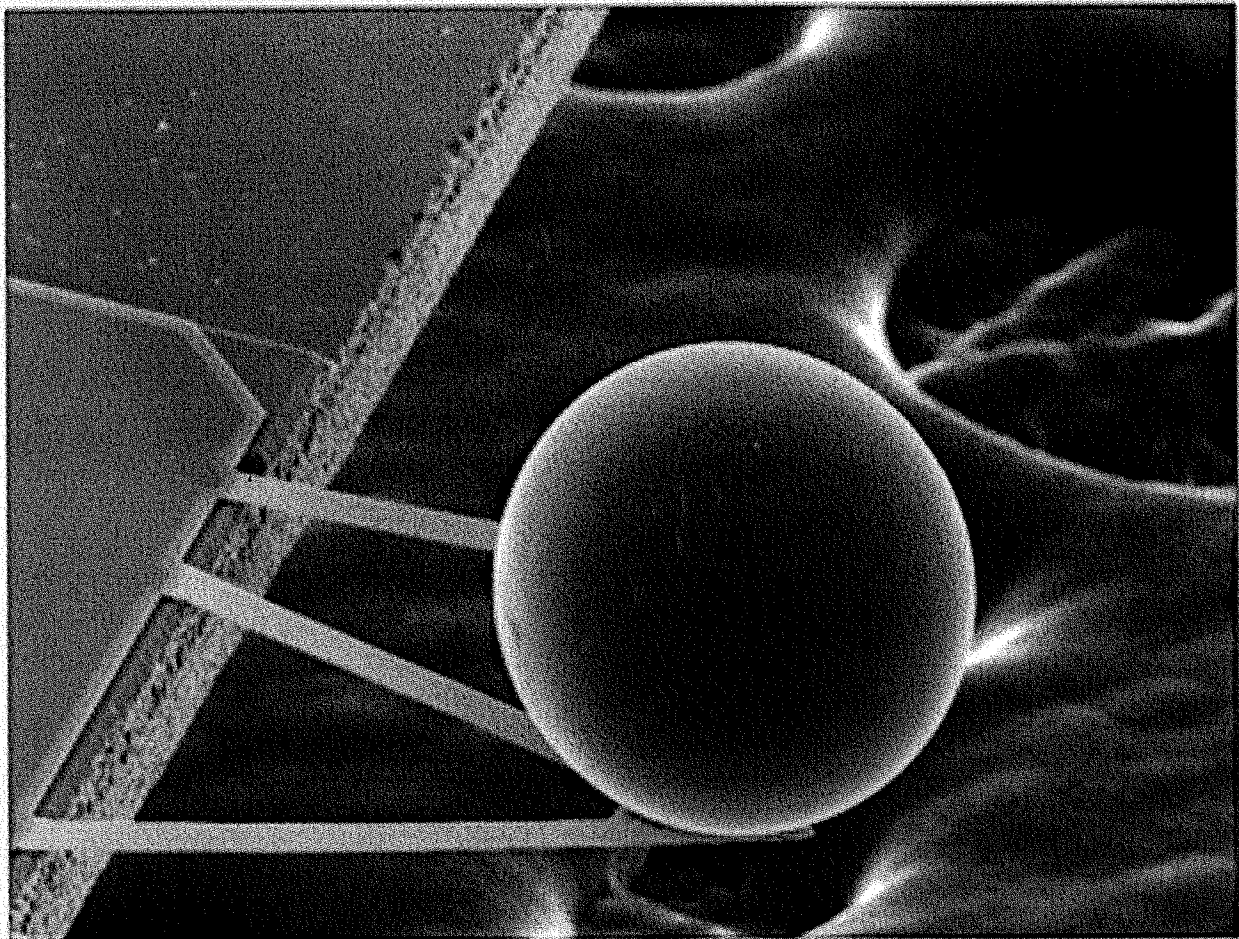
sphere

radius = 100 μm

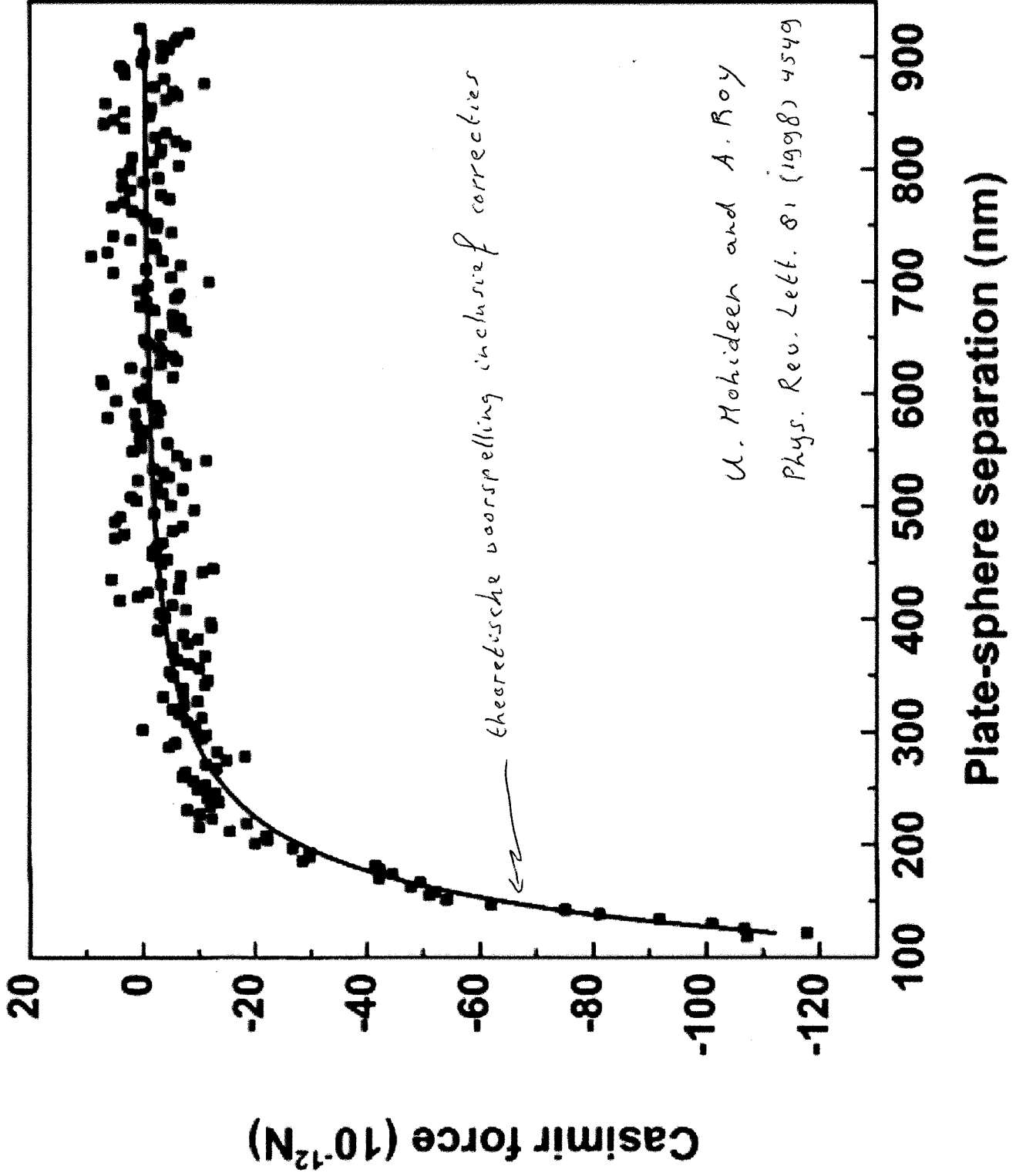
$d = a$ (0.1-0.9 μm)

plate

piezoelectric platform,
can be lowered
and raised



Experimentele bevestiging v/h Casimir-effect



U. Mohideen and A. Roy

Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 4549

theoretische voorspelling inclusief correcties

Plate-sphere separation (nm)