Opg. 32) Atomair warmtebad; gelocaliseerde spin-0 atomen, met twee niet-ontaarde energie-eigentoest. $|\psi_A\rangle$ en $|\psi_B\rangle$ bij de energie-eigenwaarden E_A en $E_B = E_A - \hbar\omega$ $(\omega > 0)$.

Thermisch evenwicht tussen het warmtebad en elektromagn. straling bij temperatuur T $\Rightarrow$ 1-fotonprocessen $A \rightleftarrows B+\gamma$ zijn in evenwicht.
Evenwichtspopulaties (gemiddeld) v/d atomaire toestanden: $N(A)$ en $N(B)$

(i) Evenwicht: evenveel absorptie- als emissie-overgangen per seconde

$$\Rightarrow \quad N(B)\, w_{B+\gamma\to A} = N(A)\, w_{A\to B+\gamma}$$

Gevolg: $$\frac{w_{A\to B+\gamma}}{w_{B+\gamma\to A}} = \frac{N(B)}{N(A)} \underset{\text{stat.}}{\overset{\text{MB-}}{=}} e^{-\beta(E_B-E_A)} = e^{\beta\hbar\omega} = e^{\hbar\omega/k_BT}$$

gelocaliseerde atomen

(ii) $$e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}_j}\,\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{e}_k)\cdot\hat{\vec{p}}_j = \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{e}_k)\cdot\hat{\vec{p}}_j\, e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}_j} + \underbrace{[e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}_j}, \hat{\vec{p}}_j]}_{\text{hint}:\ -\hbar\vec{k}\, e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}_j}}\cdot\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{e}_k)$$

$$\overset{\vec{k}\cdot\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{e}_k)=0}{=} \quad \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{e}_k)\cdot\hat{\vec{p}}_j\, e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}_j} \quad \text{voor het } j^e \text{ atoom}$$

(iii) zie emissie

$$|\langle\psi_B^{(j)}|e^{-i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}_j}\,\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{e}_k)\cdot\hat{\vec{p}}_j|\psi_A^{(j)}\rangle|^2 = |\langle\psi_B^{(j)}|e^{-i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}_j}\,\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{e}_k)\cdot\hat{\vec{p}}_j|\psi_A^{(j)}\rangle^*|^2$$

$\in \mathbb{R}^3$ — zie absorptie

$$= |\langle\psi_A^{(j)}|\,\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{e}_k)\cdot\hat{\vec{p}}_j\, e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}_j}|\psi_B^{(j)}\rangle|^2 \overset{(ii)}{=} |\langle\psi_A^{(j)}|e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}_j}\,\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{e}_k)\cdot\hat{\vec{p}}_j|\psi_B^{(j)}\rangle|^2$$

(iv) Gemiddeld gezien is er geen voorkeursrichting $\Rightarrow$ $\bar{n}_{\vec{k},\lambda} = \bar{n}$ voor alle fotontoestanden met kwantumgetallen λ en $\{\vec{k} : k = \omega_k/c = \omega/c\}$.
De eis $\omega_k = \omega$ volgt uit de δ-functie voor energiebehoud in w^{em} en w^{abs}: $\delta(E_B - E_A + \hbar\omega_k) = \delta(\hbar\omega_k - \hbar\omega)$ ← Fermi's Gouden Regel
Afzonderlijke bijdragen v/h j^e atoom in 1e-orde storingstheorie:

laat $\hat{V}_{spin}(t)$ weg

$$\frac{w^{em}_{A^{(j)}\to B^{(j)}+\gamma_{\vec{k},\lambda}}}{w^{abs}_{B^{(j)}+\gamma_{\vec{k},\lambda}\to A^{(j)}}} \underset{\text{v/h dictaat}}{\overset{(384)-(386)}{=}} \frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}\,\frac{|\langle\psi_B^{(j)}|e^{-i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}_j}\,\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{e}_k)\cdot\hat{\vec{p}}_j|\psi_A^{(j)}\rangle|^2}{|\langle\psi_A^{(j)}|e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}_j}\,\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{e}_k)\cdot\hat{\vec{p}}_j|\psi_B^{(j)}\rangle|^2} \overset{(iii)}{=} \frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}$$

Alle atomen en fotontoest.: $$\frac{w_{A\to B+\gamma}}{w_{B+\gamma\to A}} = \frac{\sum_{j,\vec{k},\lambda} w^{em}_{A^{(j)}\to B^{(j)}+\gamma_{\vec{k},\lambda}}}{\sum_{j,\vec{k},\lambda} w^{abs}_{B^{(j)}+\gamma_{\vec{k},\lambda}\to A^{(j)}}} \approx \frac{\bar{n}+1}{\bar{n}} \leftarrow \text{onafh. van } j, \vec{k}, \lambda$$

(v) Kwantumstatistiek voor fotonen met kwantumgetallen λ en $\{\vec{k} : k = \omega/c\}$:

$$\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}} \overset{(iv)}{=} \frac{w_{A\to B+\gamma}}{w_{B+\gamma\to A}} \overset{(i)}{=} e^{\hbar\omega/k_BT} \Rightarrow \boxed{\bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_BT} - 1}} \leftarrow \text{Bose-Einstein verdeling met } \mu = 0$$

Opg. 33) Dirac-veldoperator voor vrije spin-1/2 deeltjes:

$$\hat{\psi}(x) \overset{(418),1^e}{=\!=} \sum_{\vec{p},\lambda} \sqrt{\frac{mc^2}{E_{\vec{p}}}}\, u_{\vec{p}}(\vec{x}) \Big[u^+_\lambda(\vec{p})\, \underbrace{\hat{a}_{\vec{p},\lambda}(t)}_{=\hat{a}_{\vec{p},\lambda}e^{-iE_{\vec{p}}t/\hbar}} + u^-_\lambda(\vec{p})\, \overbrace{\hat{b}^\dagger_{-\vec{p},\lambda}(t)}^{\hat{b}^\dagger_{-\vec{p},\lambda}e^{iE_{\vec{p}}t/\hbar}} \Big] \qquad (1)$$

met $\vec{p} = \frac{2\pi\hbar}{L}\vec{\nu}$, $\nu_{x,y,z} = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ en $E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2} > 0$

De Fourier-componenten $u_{\vec{p}}(\vec{x})$ voldoen aan de voll. relatie $\sum_{\vec{p}} u_{\vec{p}}(\vec{x})\, u^*_{\vec{p}}(\vec{x}\,') = \delta(\vec{x}-\vec{x}\,')$ (2)
De Dirac-spinoren $u^\pm_\lambda(\vec{p})$ voldoen aan de Dirac-verg. in de impulsrepresentatie en komen overeen met de heliciteitseigenwaarden $\lambda = +1/2$ of $-1/2$.
Ze voldoen ook aan een voll. relatie: $\sum_\lambda \left[u^+_\lambda(\vec{p})\, u^+_\lambda(\vec{p})^\dagger + u^-_\lambda(\vec{p})\, u^-_\lambda(\vec{p})^\dagger \right] = \frac{E_{\vec{p}}}{mc^2} I$ (3)

(i) $\{\hat{\psi}_i(\vec{x},t), \hat{\psi}_{i'}(\vec{x}\,',t)\} = \{\hat{\psi}^\dagger_i(\vec{x},t), \hat{\psi}^\dagger_{i'}(\vec{x}\,',t)\} = 0$ volgt onmiddellijk uit het feit
component in spinorruimte
dat $\hat{a}_{\vec{p},\lambda}(t)$, $\hat{a}_{\vec{p}\,',\lambda'}(t)$, $\hat{b}^\dagger_{-\vec{p},\lambda}(t)$ en $\hat{b}^\dagger_{-\vec{p}\,',\lambda'}(t)$ onderling anticommuteren.

$$\{\hat{\psi}_i(\vec{x},t), \hat{\psi}^\dagger_{i'}(\vec{x}\,',t)\} \overset{(1)}{=\!=} \sum_{\vec{p},\vec{p}\,'} \sum_{\lambda,\lambda'} \frac{mc^2}{\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{p}\,'}}}\, u_{\vec{p}}(\vec{x})\, u^*_{\vec{p}\,'}(\vec{x}\,') \Big\{ (u^+_\lambda(\vec{p}))_i\, \hat{a}_{\vec{p},\lambda}(t) + (u^-_\lambda(\vec{p}))_i\, \hat{b}^\dagger_{-\vec{p},\lambda}(t),$$
$$(u^+_{\lambda'}(\vec{p}\,')^\dagger)_{i'}\, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,',\lambda'}(t) + (u^-_{\lambda'}(\vec{p}\,')^\dagger)_{i'}\, \hat{b}_{-\vec{p}\,',\lambda'}(t) \Big\}$$

$$= \hat{1} \sum_{\vec{p}} u_{\vec{p}}(\vec{x})\, u^*_{\vec{p}}(\vec{x}\,')\, \frac{mc^2}{E_{\vec{p}}} \sum_\lambda \left(u^+_\lambda(\vec{p})\, u^+_\lambda(\vec{p})^\dagger + u^-_\lambda(\vec{p})\, u^-_\lambda(\vec{p})^\dagger \right)_{ii'}$$

$$\overset{(3)}{=\!=} \hat{1}\, \delta_{ii'} \sum_{\vec{p}} u_{\vec{p}}(\vec{x})\, u^*_{\vec{p}}(\vec{x}\,') \overset{(2)}{=\!=} \delta_{ii'}\, \delta(\vec{x}-\vec{x}\,')\, \hat{1},$$

$= 0$ als $\vec{x} \neq \vec{x}\,'$
$\Rightarrow$ localiteit oké

gebruik makende v/d anticommutatierelaties $\{\hat{a}_{\vec{p},\lambda}(t), \hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,',\lambda'}(t)\} = \{\hat{b}_{\vec{p},\lambda}(t), \hat{b}^\dagger_{\vec{p}\,',\lambda'}(t)\} = \delta_{\vec{p}\vec{p}\,'}\, \delta_{\lambda\lambda'}\, \hat{1}$, overige anticommutatoren zijn 0.

(ii) Dus $\hat{\psi}^\dagger_i(\vec{x},t)$ en $\hat{\psi}_i(\vec{x},t)$ voldoen aan fermionische anticommutatierelaties in de plaatsrepresentatie $\Rightarrow$ mogen worden geïnterpreteerd als creatie- en annihilatie-operatoren voor quasi-deeltjes (in het Heisenbergbeeld) !

(iii) Elektron-vacuüm $|0_e\rangle$: $\hat{\psi}(x)|0_e\rangle \equiv 0$, $\langle 0_e|0_e\rangle \equiv 1$ ← quasi-deeltjes vacuüm
De 1-quasideeltjestoestanden volgen uit $\hat{\psi}^\dagger(x)|0_e\rangle$, hetgeen de volgende orthonormaliteitseigenschap heeft: $\langle 0_e|\hat{\psi}_i(\vec{x},t)\, \hat{\psi}^\dagger_{i'}(\vec{x}\,',t)|0_e\rangle$
$= \langle 0_e|\big(\{\hat{\psi}_i(\vec{x},t), \hat{\psi}^\dagger_{i'}(\vec{x}\,',t)\} - \underbrace{\hat{\psi}^\dagger_{i'}(\vec{x}\,',t)\, \hat{\psi}_i(\vec{x},t)\big)|0_e\rangle}_{=0} \overset{(i)}{=\!=} \delta_{ii'}\, \delta(\vec{x}-\vec{x}\,')\, \underbrace{\langle 0_e|0_e\rangle}_{1}$.