Opg. 33) Dirac-veldoperator voor vrije spin-1/2 deeltjes:

$$\hat{\psi}(x) \underset{(418),1^e}{=\!=} \sum_{\vec{p},\lambda} \sqrt{\frac{mc^2}{E_{\vec{p}}}}\, u_{\vec{p}}(\vec{x}) \Big[u^+_\lambda(\vec{p})\, \underbrace{\hat{a}_{\vec{p},\lambda}(t)}_{\hat{a}_{\vec{p},\lambda} e^{-iE_{\vec{p}}t/\hbar}} + u^-_\lambda(\vec{p})\, \overbrace{\hat{b}^\dagger_{-\vec{p},\lambda}(t)}^{\hat{b}^\dagger_{-\vec{p},\lambda} e^{iE_{\vec{p}}t/\hbar}} \Big] \quad (1)$$

met $\vec{p} = \frac{2\pi\hbar}{L}\vec{\nu}$, $\nu_{x,y,z} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ en $E_{\vec{p}} \equiv \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2} > 0$

De Fourier-componenten $u_{\vec{p}}(\vec{x})$ voldoen aan de voll. relatie $\sum_{\vec{p}} u_{\vec{p}}(\vec{x})\, u^*_{\vec{p}}(\vec{x}\,') = \delta(\vec{x}-\vec{x}\,')$ (2)

De Dirac-spinoren $u^\pm_\lambda(\vec{p})$ voldoen aan de Dirac-vergl. in de impulsrepresentatie en komen overeen met de heliciteitseigenwaarden $\lambda = +1/2$ of $-1/2$.

Ze voldoen ook aan een voll. relatie: $\sum_\lambda \left[u^+_\lambda(\vec{p})\, u^+_\lambda(\vec{p})^\dagger + u^-_\lambda(\vec{p})\, u^-_\lambda(\vec{p})^\dagger \right] = \frac{E_{\vec{p}}}{mc^2} I$ (3)

(i) $\{\hat{\psi}_i(\vec{x},t), \hat{\psi}_{i'}(\vec{x}\,',t)\} = \{\hat{\psi}^\dagger_i(\vec{x},t), \hat{\psi}^\dagger_{i'}(\vec{x}\,',t)\} = 0$ volgt onmiddellijk uit het feit

component in spinorruimte

dat $\hat{a}_{\vec{p},\lambda}(t)$, $\hat{a}_{\vec{p}\,',\lambda'}(t)$, $\hat{b}^\dagger_{-\vec{p},\lambda}(t)$ en $\hat{b}^\dagger_{-\vec{p}\,',\lambda'}(t)$ onderling anticommuteren.

$$\{\hat{\psi}_i(\vec{x},t), \hat{\psi}^\dagger_{i'}(\vec{x}\,',t)\} \overset{(1)}{=\!=} \sum_{\vec{p},\vec{p}\,'} \sum_{\lambda,\lambda'} \frac{mc^2}{\sqrt{E_{\vec{p}}E_{\vec{p}\,'}}}\, u_{\vec{p}}(\vec{x})\, u^*_{\vec{p}\,'}(\vec{x}\,') \Big\{ (u^+_\lambda(\vec{p}))_i\, \hat{a}_{\vec{p},\lambda}(t) + (u^-_\lambda(\vec{p}))_i\, \hat{b}^\dagger_{-\vec{p},\lambda}(t),$$

$$(u^+_{\lambda'}(\vec{p}\,')^\dagger)_{i'}\, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,',\lambda'}(t) + (u^-_{\lambda'}(\vec{p}\,')^\dagger)_{i'}\, \hat{b}_{-\vec{p}\,',\lambda'}(t) \Big\}$$

$$= \hat{1} \sum_{\vec{p}} u_{\vec{p}}(\vec{x})\, u^*_{\vec{p}}(\vec{x}\,') \frac{mc^2}{E_{\vec{p}}} \sum_\lambda \left(u^+_\lambda(\vec{p})\, u^+_\lambda(\vec{p})^\dagger + u^-_\lambda(\vec{p})\, u^-_\lambda(\vec{p})^\dagger \right)_{ii'}$$

$$\overset{(3)}{=\!=} \hat{1}\, \delta_{ii'} \sum_{\vec{p}} u_{\vec{p}}(\vec{x})\, u^*_{\vec{p}}(\vec{x}\,') \overset{(2)}{=\!=} \delta_{ii'}\, \delta(\vec{x}-\vec{x}\,')\, \hat{1},$$

$= 0$ als $\vec{x} \neq \vec{x}\,'$ $\Rightarrow$ localiteit oké

gebruik makende v/d anticommutatierelaties $\{\hat{a}_{\vec{p},\lambda}(t), \hat{a}^\dagger_{\vec{p}\,',\lambda'}(t)\} = \{\hat{b}_{\vec{p},\lambda}(t), \hat{b}^\dagger_{\vec{p}\,',\lambda'}(t)\} = \delta_{\vec{p}\vec{p}\,'}\delta_{\lambda\lambda'}\hat{1}$, overige anticommutatoren zijn 0.

(ii) Dus $\hat{\psi}^\dagger_i(\vec{x},t)$ en $\hat{\psi}_i(\vec{x},t)$ voldoen aan fermionische anticommutatierelaties in de plaatsrepresentatie $\Rightarrow$ mogen worden geïnterpreteerd als creatie- en annihilatie-operatoren voor quasi-deeltjes (in het Heisenbergbeeld)!

(iii) Elektron-vacuüm $|0_e\rangle$: $\hat{\psi}(x)|0_e\rangle \equiv 0$, $\langle 0_e|0_e\rangle \equiv 1$ ← quasi-deeltjes vacuüm

De 1-quasideeltjestoestanden volgen uit $\hat{\psi}^\dagger(x)|0_e\rangle$, hetgeen de volgende orthonormaliteitseigenschap heeft: $\langle 0_e|\hat{\psi}_i(\vec{x},t)\,\hat{\psi}^\dagger_{i'}(\vec{x}\,',t)|0_e\rangle$

$= \langle 0_e| \left(\{\hat{\psi}_i(\vec{x},t), \hat{\psi}^\dagger_{i'}(\vec{x}\,',t)\} - \hat{\psi}^\dagger_{i'}(\vec{x}\,',t)\, \underbrace{\hat{\psi}_i(\vec{x},t)) |0_e\rangle}_{0} \overset{(i)}{=\!=} \delta_{ii'}\, \delta(\vec{x}-\vec{x}\,')\, \underbrace{\langle 0_e|0_e\rangle}_{1}.$