Opg. 3) Identiek N-deeltjessysteem: discrete 1-deeltjesbasis $\{|q_j\rangle : j=1,2,\ldots\}$
met bijbehorende creatie- en annihilatie-operatoren $\hat{a}_j^\dagger$ en $\hat{a}_j$
$\Rightarrow$ N-deeltjesbasis: $\{|n_1,n_2,\ldots\rangle : \sum_j n_j = N\}$.
aangegeven met $\{n_j\}_N$

Beschouw verder de continue 1-deeltjesbasis $\{|k\rangle : k \in$ continu spectrum$\}$.
Basistransformatie: $\hat{a}^\dagger(k) = \sum_j \langle q_j|k\rangle \hat{a}_j^\dagger$, $\hat{a}(k) = \sum_j \langle k|q_j\rangle \hat{a}_j$ ①,
met unitariteitsconditie $\int dk \, \langle q_j|k\rangle\langle k|q_{j'}\rangle = \delta_{jj'}$ ②.

(i) Omdat $\{|n_1,n_2,\ldots\rangle : \sum_j n_j = N\}$ een orthonormale N-deeltjesbasis vormt,
geldt de volledigheidsrelatie $\sum_{\{n_j\}_N} |n_1,n_2,\ldots\rangle\langle n_1,n_2,\ldots| = \hat{1}_N$ ← eenheidsoperator in de N-deeltjes toestandsruimte

(ii) + (iii) Definieer de N-deeltjestoestand $\{|k_1,\ldots,k_N\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}}\hat{a}^\dagger(k_1)\cdots\hat{a}^\dagger(k_N)|\Psi^{(0)}\rangle : k_1,\ldots,k_N \in \{k\}\}$

$$\Rightarrow \int dk_1\cdots\int dk_N \, |k_1,\ldots,k_N\rangle\langle k_1,\ldots,k_N| = \frac{1}{N!}\int dk_1\cdots\int dk_N \, \hat{a}^\dagger(k_1)\cdots\hat{a}^\dagger(k_N)|\Psi^{(0)}\rangle\langle\Psi^{(0)}|\hat{a}(k_N)\cdots\hat{a}(k_1)$$

$$\overset{①}{=} \frac{1}{N!}\sum_{i_1,\ldots,i_N}\sum_{i_1',\ldots,i_N'}\int dk_1\cdots\int dk_N \langle q_{i_1}|k_1\rangle\langle k_1|q_{i_1'}\rangle\cdots\langle q_{i_N}|k_N\rangle\langle k_N|q_{i_N'}\rangle \, \hat{a}_{i_1}^\dagger\cdots\hat{a}_{i_N}^\dagger|\Psi^{(0)}\rangle\langle\Psi^{(0)}|\hat{a}_{i_N'}\cdots\hat{a}_{i_1'}$$

$$\overset{②}{=} \frac{1}{N!}\sum_{i_1,\ldots,i_N}\hat{a}_{i_1}^\dagger\cdots\hat{a}_{i_N}^\dagger|\Psi^{(0)}\rangle\langle\Psi^{(0)}|\hat{a}_{i_N}\cdots\hat{a}_{i_1} = \frac{1}{N!}\underbrace{\sum_{i_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{i_N=1}^{\infty}}_{N \text{ deeltjes}}\hat{a}_{i_1}^\dagger\cdots\hat{a}_{i_N}^\dagger|\Psi^{(0)}\rangle\langle\Psi^{(0)}|\hat{a}_{i_N}\cdots\hat{a}_{i_1}$$

$$= \frac{1}{N!}\sum_{\{n_j\}_N}\frac{N!}{n_1!n_2!\cdots}(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}\cdots|\Psi^{(0)}\rangle\langle\Psi^{(0)}|\cdots(\hat{a}_2)^{n_2}(\hat{a}_1)^{n_1}.$$

Hier zijn de combinaties $\hat{a}_{i_1}^\dagger\cdots\hat{a}_{i_N}^\dagger$ gehergangschikt tot $\pm(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}\cdots$ en $\hat{a}_{i_N}\cdots\hat{a}_{i_1}$ tot $\pm\cdots(\hat{a}_2)^{n_2}(\hat{a}_1)^{n_1}$, zodat de (anti)commutatietekens $\pm$ onderling wegvallen. Verder is de sommatie $\sum_{i_1,\ldots,i_N}$ vervangen door een sommatie over alle mogelijke sets bezettingsgetallen $\{n_j\}_N$, waarbij elke configuratie van bezettingsgetallen $N!/\prod_k n_k!$ bijdragen krijgt ten gevolge van de verschillende permutaties van de kwantumgetallen $i_1,\ldots,i_N$.

Er geldt: $|n_1,n_2,\ldots\rangle = \prod_k \frac{(\hat{a}_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}}|\Psi^{(0)}\rangle$ en $\langle n_1,n_2,\ldots| = \langle\Psi^{(0)}|\left(\prod_k\frac{(\hat{a}_k^\dagger)^{n_k}}{\sqrt{n_k!}}\right)^\dagger$

$$\Rightarrow \boxed{\int dk_1\cdots\int dk_N \, |k_1,\ldots,k_N\rangle\langle k_1,\ldots,k_N| = \sum_{\{n_j\}_N}|n_1,n_2,\ldots\rangle\langle n_1,n_2,\ldots| \overset{(i)}{=} \hat{1}_N}$$

(iv) Willekeurige N-deeltjestoest. $|\Psi\rangle$ in de k-repr.: $\psi(k_1,\dots,k_N) \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}} \overbrace{\langle \Psi^{(0)} | \hat{a}(k_N)\dots\hat{a}(k_1)|\Psi\rangle}^{\langle k_1,\dots,k_N|\Psi\rangle}$.

Deze functie is volledig symmetrisch/antisymmetrisch onder verwisseling v/d coördinaten k_j voor bosonen/fermionen, immers

$\langle \dots, k_j, \dots, k_l, \dots | = \pm^{B}_{F} \langle \dots, k_l, \dots, k_j, \dots |$ i.v.m. het feit dat de annihilatie-operatoren onderling commuteren/anticommuteren.$^{D}_{\circ}$

(de operatoren tussen $\hat{a}(k_l)$ en $\hat{a}(k_j)$ moeten 2x gepasseerd worden ⇒ +)

Opg. 4) Identieke spin-s deeltjes met onderlinge int. $u(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ ⇒ totale paarint.

$$\hat{U}_{paar} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma_1,\sigma_2} \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2\, u(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\, \hat{\psi}^{\dagger}_{\sigma_1}(\vec{r}_1)\hat{\psi}^{\dagger}_{\sigma_2}(\vec{r}_2)\hat{\psi}_{\sigma_2}(\vec{r}_2)\hat{\psi}_{\sigma_1}(\vec{r}_1),$$

(spincomp. σ_i langs kwantisatie-as)

met $\hat{\psi}^{\dagger}_{\sigma}(\vec{r})$ en $\hat{\psi}_{\sigma}(\vec{r})$ de creatie- en annihilatie-operatoren in de plaatsrepr.

(i) Dit is een observabele bij een additieve 2-deeltjesgrootheid, immers de deeltjes dragen in tweetallen bij aan deze interactie en het totale aantal deeltjes blijft behouden onder deze interactie (elke term bevat evenveel creatie- als annihilatie-op.)

(ii) Stel $u(\vec{r}_1-\vec{r}_2) \propto \delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$ en de deeltjes zijn spin-½ deeltjes

$$\Rightarrow \hat{U}_{paar} \propto \frac{1}{2}\sum_{\sigma_1,\sigma_2}\int d\vec{r}\, \hat{\psi}^{\dagger}_{\sigma_1}(\vec{r})\hat{\psi}^{\dagger}_{\sigma_2}(\vec{r})\hat{\psi}_{\sigma_2}(\vec{r})\hat{\psi}_{\sigma_1}(\vec{r}).$$

Pauli-uitsluitingsprincipe: $(\hat{\psi}^{\dagger}_{\sigma}(\vec{r}))^2 = (\hat{\psi}_{\sigma}(\vec{r}))^2 = 0 \Rightarrow \sigma_1 \neq \sigma_2$:

$$\hat{U}_{paar} \propto \frac{1}{2}\int d\vec{r}\,\Big(\underbrace{\hat{\psi}^{\dagger}_{\uparrow}}_{\sigma=+1/2}(\vec{r})\underbrace{\hat{\psi}^{\dagger}_{\downarrow}}_{\sigma=-1/2}(\vec{r})\hat{\psi}_{\downarrow}(\vec{r})\hat{\psi}_{\uparrow}(\vec{r}) + [\uparrow \leftrightarrow \downarrow]\Big) \overset{\text{anticomm.}}{=} \int d\vec{r}\, \hat{\psi}^{\dagger}_{\uparrow}(\vec{r})\hat{\psi}^{\dagger}_{\downarrow}(\vec{r})\hat{\psi}_{\downarrow}(\vec{r})\hat{\psi}_{\uparrow}(\vec{r})$$

(antisymm. in spinruimte ⇒ spin singlet $S=0$)

(ruimtelijke symmetrie: $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$)

(iii) Plaatsrepr. → impulsrepr.: $\hat{\psi}_{\sigma}(\vec{r}) = \int d\vec{p}\, \frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\hat{a}_{\sigma}(\vec{p})$, $\quad u(\vec{r}) \equiv \int d\vec{k}\, \mathcal{U}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$$\text{Gevolg: } \hat{U}_{paar} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma_1,\sigma_2}\int d\vec{p}_1 \dots \int d\vec{p}_4 \int d\vec{k}\, \mathcal{U}(\vec{k})\, \hat{a}^{\dagger}_{\sigma_1}(\vec{p}_1)\hat{a}^{\dagger}_{\sigma_2}(\vec{p}_2)\hat{a}_{\sigma_2}(\vec{p}_4)\hat{a}_{\sigma_1}(\vec{p}_3) \;*$$

$$* \underbrace{\int d\vec{r}_1 \frac{e^{i(\hbar\vec{k}+\vec{p}_3-\vec{p}_1)\cdot\vec{r}_1/\hbar}}{(2\pi\hbar)^3}}_{\delta(\hbar\vec{k}+\vec{p}_3-\vec{p}_1)} \underbrace{\int d\vec{r}_2 \frac{e^{-i(\hbar\vec{k}+\vec{p}_2-\vec{p}_4)\cdot\vec{r}_2/\hbar}}{(2\pi\hbar)^3}}_{\delta(\hbar\vec{k}+\vec{p}_2-\vec{p}_4)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\sigma_1,\sigma_2}\int d\vec{k}\int d\vec{p}_1\int d\vec{p}_2\, \mathcal{U}(\vec{k})\, \hat{a}^{\dagger}_{\sigma_1}(\vec{p}_1)\hat{a}^{\dagger}_{\sigma_2}(\vec{p}_2)\hat{a}_{\sigma_2}(\vec{p}_2+\hbar\vec{k})\hat{a}_{\sigma_1}(\vec{p}_1-\hbar\vec{k}).$$

(iv) Hier geldt behoud van totale paarimpuls: $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = (\vec{p}_1 - \hbar\vec{k}) + (\vec{p}_2 + \hbar\vec{k})$, immers de interactie $u(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$ is invariant onder constante translaties.

(v) $$\mathcal{U}(\vec{k}) \equiv (2\pi)^{-3}\int d\vec{r}\, u(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \underset{\text{z-as} \parallel \vec{k}}{\overset{u(\vec{r})=u(r)}{=}} (2\pi)^{-2}\int_0^{\infty} dr \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, r^2 u(r)\, e^{-i|\vec{k}|r\cos\theta}$$

⇒ $\mathcal{U}(\vec{k})$ hangt alleen van $|\vec{k}|$ af, i.v.m. de rotatie-invariantie van $u(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)$