<u>Opg. 6)</u> Lineaire harmonische oscillator; orthonormale basis $\{|n\rangle : n=0,1,\dots\}$.
<u>Coherente toestanden</u>; $\{|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\lambda|^2/2} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle : \lambda \in \mathbb{C}\} \Rightarrow \hat{a}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$.

<u>(i)</u> $\langle\lambda'|\lambda\rangle = \sum_{n,n'=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2-\frac{1}{2}|\lambda'|^2} \frac{(\lambda'^*)^{n'}}{\sqrt{n'!}} \frac{(\lambda)^n}{\sqrt{n!}} \underbrace{\langle n'|n\rangle}_{\delta_{n,n'}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2-\frac{1}{2}|\lambda'|^2} \frac{(\lambda'^*\lambda)^n}{n!} = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2-\frac{1}{2}|\lambda'|^2+\lambda\lambda'^*}$

$\Rightarrow$ overlapwaarschijnlijkheid $= |\langle\lambda'|\lambda\rangle|^2 = e^{-|\lambda|^2-|\lambda'|^2+\lambda\lambda'^*+\lambda^*\lambda'} = e^{-|\lambda-\lambda'|^2}$.

<u>(ii)</u> $|\lambda\rangle$ en $|\lambda'\rangle$ zijn eigentoestanden van $\hat{a}$. Als $\lambda \neq \lambda'$, dan geldt echter niet dat $\langle\lambda'|\lambda\rangle = 0$. Dit kan omdat $\hat{a} \neq \hat{a}^\dagger$ niet hermitisch is.

<u>(iii)</u> Schrijf $|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$ en stel dat $\hat{a}^\dagger|\psi\rangle = \gamma|\psi\rangle$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \xRightarrow{\text{basis}} \gamma c_0 = 0$ en $\gamma c_{n+1} = \sqrt{n+1}\, c_n$
voor $n \geq 0 \Rightarrow \forall_n\, c_n = 0$

Dus, $\hat{a}$ heeft wel eigentoestanden omdat n van onderen begrensd is en van boven onbegrensd, maar $\hat{a}^\dagger$ niet omdat daarvoor het omgekeerde nodig is.

<u>(iv)</u> "Klassieke toestanden": $|\lambda| \gg 1 \xRightarrow{(i)} |\langle\lambda'|\lambda\rangle|^2$ is i.h.a. zeer klein (tenzij $\lambda \approx \lambda'$), zodat er sprake is v/e verwaarloosbare overlap. Dit is precies wat je klassiek verwacht, omdat de systeemtoestanden dan onafhankelijk moeten zijn.

<u>(v)</u> $\hat{S}(\lambda) \equiv e^{\lambda\hat{a}^\dagger - \lambda^*\hat{a}}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ definieert een <u>unitaire transformatie</u>.
$[\hat{a}, \hat{S}(\lambda)] \xlongequal{\text{hint}} \partial\hat{S}(\lambda)/\partial\hat{a}^\dagger = \lambda\hat{S}(\lambda)$
$\Rightarrow \hat{c} \equiv \hat{S}(\lambda)\,\hat{a}\,\hat{S}^\dagger(\lambda) = (\hat{a}\hat{S}(\lambda) - \lambda\hat{S}(\lambda))\hat{S}^\dagger(\lambda) = \boxed{\hat{a} - \lambda\hat{1} = \hat{c}}$ en $\boxed{\hat{c}^\dagger = \hat{a}^\dagger - \lambda^*\hat{1}}$
zijn de getransformeerde annihilatie- en creatie-operatoren, die we herkennen als de quasi-deeltjes annihilatie- en creatie-operatoren behorende bij de gedwongen oscillator. Het verband tussen beide sets is dus inderdaad m.b.v. een unitaire transformatie te beschrijven.

<u>Opg. 7)</u> N identieke spin-0 bosonen in de basistoestand $|\psi\rangle$ gekarakteriseerd door de bezettingsgetallen $n_{\vec{k}}^{(0)}$ in de (discrete) impulsrepresentatie.
$\rho_1(\vec{r}-\vec{r}') \equiv \langle\psi|\hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}(\vec{r}')|\psi\rangle$: <u>1-deeltjes correlatiefunctie in de plaatsruimte.</u>
veldoperatoren in de plaatsrepresentatie

<u>(i)</u> $\hat{\psi}^\dagger(\vec{r})\hat{\psi}(\vec{r}')$: annihilatie v/e deeltje op positie $\vec{r}'$ en gelijktijdige creatie op positie $\vec{r}$
$\Rightarrow \rho_1(\vec{r}-\vec{r}')$ bepaalt de invloed van deze verplaatsing op $|\psi\rangle$ = maat ruimtelijke QM correlaties.

<u>(ii)</u> Impulsrepr.: $\rho_1(\vec{r}-\vec{r}') = \langle\psi|\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}'} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}'}\hat{a}_{\vec{k}'}|\psi\rangle$
$= \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}}\langle\psi|\hat{n}_{\vec{k}}|\psi\rangle e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')} = \frac{1}{V}\sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}}^{(0)} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}$,
omdat $\langle\psi|\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger\hat{a}_{\vec{k}'}|\psi\rangle = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}\langle\psi|\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger\hat{a}_{\vec{k}}|\psi\rangle$ voor een basistoestand in de bezettingsgetalrepresentatie bij de 1-deeltjes impulsoperator.

(iii) Kwantummechanisch gezien verwachten we ruimtelijke correlaties over afstanden $|\vec r-\vec r'|$ als de "de Broglie-golflengte" $= h/|\vec p| = 2\pi/|\vec k| \gtrsim \mathcal{O}(|\vec r-\vec r'|)$!

(iv) $\rho_1(\vec 0) = \langle\Psi|\hat\psi^\dagger(\vec r)\hat\psi(\vec r)|\Psi\rangle$ = verwachtingswaarde v.d. deeltjesdichtheidsoperator

$= \frac{1}{V} \sum_{\vec k}\langle\Psi|\hat n_{\vec k}|\Psi\rangle = \frac{1}{V}\langle\Psi|\hat N|\Psi\rangle \xrightarrow{N\text{-deeltjestoest.}} N/V$ constant.

Voor $|\vec r-\vec r'|=0$ doen o.g.v. (iii) alle Fourier-modes even sterk mee. Het resultaat zegt dat het systeem gemiddeld gezien een constante locale deeltjesdichtheid heeft !

(v) Stel $n^{(0)}_{\vec 0} = \mathcal{O}(N)$ en $n^{(0)}_{\vec k\neq\vec 0} \ll N$, zodat er sprake is v/e macroscopisch bezette 1-deeltjes grondtoestand (Bose-Einstein condensaat):

$$\lim_{|\vec r-\vec r'|\to\infty}\rho_1(\vec r-\vec r') = \frac{1}{V} \lim_{|\vec r-\vec r'|\to\infty}\sum_{\vec k}\overbrace{\langle\Psi|\hat n_{\vec k}|\Psi\rangle}^{n^{(0)}_{\vec k}}\, e^{-i\vec k\cdot(\vec r-\vec r')}.$$

Neem aan dat $n^{(0)}_{\vec k\neq\vec 0}$ langzaam varieert tussen naburige $\vec k$-waarden, d.w.z. $n^{(0)}_{\vec k} = n^{(0)}_{\vec 0}\,\delta_{\vec k,\vec 0} + f(\vec k)$ met $f(\vec k)$ een "gladde functie"

↑ (continuümlimiet (zie later))

Er treedt dan destructieve interferentie op tenzij $\vec k\cdot(\vec r-\vec r')=0$, d.w.z.

*) $\vec k = \vec 0 \Rightarrow$ bijdrage $n^{(0)}_{\vec 0}/V$

*) $\vec k\perp(\vec r-\vec r') \Rightarrow$ verwaarloosbare som t.o.v. $\sum_{\vec k\neq\vec 0} n^{(0)}_{\vec k}/V = (N-n^{(0)}_{\vec 0})/V$

↑ (2-dim. subset van $\vec k$-waarden)

Gevolg: $\rho_1(\vec r-\vec r') \xrightarrow{|\vec r-\vec r'|\to\infty} n^{(0)}_{\vec 0}/V \Rightarrow$ voor een condensaat met $n^{(0)}_{\vec 0}=\mathcal{O}(N)$ gaat de correlatiefunctie asymptotisch naar een eindige $\mathcal{O}(N/V)$ waarde ("off-diagonal long-range order"), terwijl de correlatiefunctie asymptotisch verdwijnt voor situaties waarbij de 1-deeltjes grondtoestand niet macroscopisch bezet is. Op grond van (iii) draagt namelijk alleen de $\vec k=\vec 0$ mode asymptotisch bij aan de correlatiefunctie $\Rightarrow$ verwaarloosbaar t.o.v. N/V als $n^{(0)}_{\vec 0}\ll N$ (normaal kwantumgas) en niet verwaarloosbaar als $n^{(0)}_{\vec 0}=\mathcal{O}(N)$ (condensaat) !

($\vec r\neq\vec r'$)

Deze lange-afstandscorrelaties worden dan ook gebruikt als indicatoren voor Bose-Einstein condensaten; de QM invloed is over alle afstanden merkbaar. In de aanpak van Bogolyubov wordt derhalve $\hat\psi(\vec r)$ in geval van een condensaat vervangen door $e^{i\varphi_0}\sqrt{n^{(0)}_{\vec 0}/V} + \delta\hat\psi(\vec r)$ (onder de aanname dat het deeltjesaantal N er niet toe doet, aangezien nu $\langle\Psi|\hat\psi(\vec r)|\Psi\rangle\neq 0$).

(dit wordt een ordeparameter genoemd: condensaat ≈ coherente toestand)