Opg. 8) Deel 1: Bogolyubov-transformatie voor bosonen (zie §1.6.5):

$\hat c_1 = u_1\hat a_1 + v_1 \hat a_2^\dagger$, $\hat c_2 = u_1 \hat a_2 + v_1 \hat a_1^\dagger \Rightarrow \hat a_1 = u_1\hat c_1 - v_1\hat c_2^\dagger$, $\hat a_2 = u_1\hat c_2 - v_1 \hat c_1^\dagger$,

quasi-deeltjes — deeltjes

waarbij $u_1^2 - v_1^2 = 1$.

(i) Beschouw de genormeerde toestand $|\tilde 0\rangle \equiv \frac{1}{u_1} e^{-\frac{v_1}{u_1}\hat a_1^\dagger \hat a_2^\dagger}|0,0\rangle = \frac{1}{u_1}\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{-v_1}{u_1}\right)^n |n,n\rangle$

met $|n_1,n_2\rangle$ de telbasistoestanden in de oorspronkelijke deeltjesinterpretatie

$\Rightarrow \hat a_1|\tilde 0\rangle = \frac{1}{u_1} \cancel{e^{-\frac{v_1}{u_1}\hat a_1^\dagger \hat a_2^\dagger}\hat a_1 |0,0\rangle} + \frac{1}{u_1}[\hat a_1, e^{-\frac{v_1}{u_1}\hat a_1^\dagger \hat a_2^\dagger}]|0,0\rangle \overset{\text{hint}}{=} \frac{-v_1}{u_1^2}\hat a_2^\dagger e^{-\frac{v_1}{u_1}\hat a_1^\dagger \hat a_2^\dagger}|0,0\rangle$

$= -\frac{v_1}{u_1}\hat a_2^\dagger|\tilde 0\rangle$ en evenzo $\hat a_2|\tilde 0\rangle = -\frac{v_1}{u_1}\hat a_1^\dagger|\tilde 0\rangle$.

(ii) $\hat c_1|\tilde 0\rangle = u_1(\hat a_1 + \frac{v_1}{u_1}\hat a_2^\dagger)|\tilde 0\rangle \overset{(i)}{=} 0$ en evenzo $\hat c_2|\tilde 0\rangle = 0$

$\Rightarrow$ $|\tilde 0\rangle$ is te interpreteren als quasi-deeltjes vacuümtoestand!

$\hat c_1^\dagger|\tilde 0\rangle = (u_1\hat a_1^\dagger + v_1\hat a_2)|\tilde 0\rangle \overset{(i)}{=} (u_1 - v_1^2/u_1)\hat a_1^\dagger|\tilde 0\rangle \overset{u_1^2-v_1^2=1}{=} \frac{1}{u_1}\hat a_1^\dagger|\tilde 0\rangle$

en evenzo $\hat c_2^\dagger|\tilde 0\rangle = \frac{1}{u_1}\hat a_2^\dagger|\tilde 0\rangle$.

(iii) $\langle\tilde 0|\hat a_1^\dagger \hat a_1|\tilde 0\rangle = \langle \tilde 0|(\cancel{u_1\hat c_1^\dagger} - v_1\hat c_2)(\cancel{u_1\hat c_1} - v_1\hat c_2^\dagger)|\tilde 0\rangle = v_1^2\langle\tilde 0|\underbrace{\hat c_2\hat c_2^\dagger}_{\hat 1+\hat c_2^\dagger\hat c_2}|\tilde 0\rangle = v_1^2\langle\tilde 0|\tilde 0\rangle = v_1^2$

en evenzo $\langle\tilde 0|\hat a_2^\dagger\hat a_2|\tilde 0\rangle = v_1^2$: gemiddelde bezetting v/d oorspronkelijke deeltjestoestanden in het quasi-deeltjes vacuüm.

Deel 2: benadering voor de grondtoestand v/h spin-0 systeem in §1.6.4

$$|\Psi_{grond}\rangle \approx |\Psi_{Bog}\rangle \equiv \prod_{\substack{(\vec q,-\vec q)\neq \vec 0\\ \text{paren}}} \frac{1}{u_{\vec q}} e^{-\frac{v_{\vec q}}{u_{\vec q}}\hat b_{\vec q}^\dagger \hat b_{-\vec q}^\dagger} |n_{\vec 0}=N, n_{\vec k\neq\vec 0}=0\rangle$$

$\hat a_1,\hat a_2,u_1,v_1$ in deel 1 $\to \hat b_{\vec q}, \hat b_{-\vec q}, u_{\vec q}, v_{\vec q}$

= toestand zonder excitaties (benaderd door de quasi-deeltjes).

(iv) $|n_{\vec 0}=N, n_{\vec k\neq\vec 0}=0\rangle$ = N-deeltjestoestand $\Rightarrow$ $|\Psi_{Bog}\rangle$ ook, want de operatoren $\hat b_{\pm\vec q}^\dagger = \hat a_{\vec 0}\hat a_{\pm\vec q}^\dagger$ exciteren deeltjes uit de 1-deeltjes grondtoestand en beïnvloeden derhalve het totale aantal deeltjes niet.

$\approx \sum_{\vec k\neq\vec 0}\hat b_{\vec k}^\dagger\hat b_{\vec k}$ o.g.v. §1.6.4

(v) $\langle\Psi_{Bog}|\hat n_{\vec 0}|\Psi_{Bog}\rangle = \langle\Psi_{Bog}|\hat N - \sum_{\vec k\neq\vec 0}\hat a_{\vec k}^\dagger\hat a_{\vec k}|\Psi_{Bog}\rangle \overset{(iii)}{\approx} N - \sum_{\vec k\neq \vec 0} v_{\vec k}^2$.

$\uparrow \approx N$ o.g.v. benaderingsmethode in §1.6.4 $\Rightarrow \sum_{\vec k\neq\vec 0} v_{\vec k}^2 \ll N$ is vereist

Opg. 9) Twee onderscheidbare deeltjes met impulsen $\vec p_1$ en $\vec p_2$ z.d.d. $|\vec k_{1,2}| \equiv |\vec p_{1,2}|/\hbar \geq k_F$.

paarbasistoestanden — paarimpulsbehoud

Hamilton-operator: $\hat H = \frac{\hat{\vec p}_1^{\,2} + \hat{\vec p}_2^{\,2}}{2m} + \hat V$, $\langle \vec k_1', \vec k_2'|\hat V|\vec k_1,\vec k_2\rangle = -\lambda\,\delta_b\,\delta_{b'}\,\delta_{\vec k_1+\vec k_2,\, \vec k_1'+\vec k_2'}$ ①

met $\lambda>0$ en $\delta_b \equiv \begin{cases}1 & \text{als } k_F\le|\vec k_{1,2}|\le k_H\\ 0 & \text{anders}\end{cases}$ ($\delta_{b'}$: $\vec k_{1,2}'$ i.p.v. $\vec k_{1,2}$).

$\uparrow$ interactieband

<u>Grondtoestand</u> : de totale paarimpuls is behouden op grond van (1)

$$\Rightarrow \; |\psi_{\vec{Q}}\rangle \equiv \sum_{\vec{q}} \delta_b \, C_{\vec{Q}}(\vec{q}) \; |\vec{k}_1 = \tfrac{1}{2}\vec{Q} + \vec{q}\,,\; \vec{k}_2 = \tfrac{1}{2}\vec{Q} - \vec{q}\rangle .$$

↑ totale CM impuls $\hbar\vec{Q}$ ligt vast ↑ relatieve impuls $\hbar\vec{q}$ is variabel

<u>(i)</u> Het toevoegen van paarbasistoestanden $|\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle$ is

*) verboden als $|\vec{k}_1| < k_F$ of $|\vec{k}_2| < k_F$ (i.v.m. de bezette Fermi-zee),

*) niet zinvol voor $|\vec{k}_1| > k_M$ of $|\vec{k}_2| > k_M$, anders wordt er extra kinetische energie door zo'n paar toegevoegd zonder extra negatieve interactie-energie $\Rightarrow$ het weglaten van zulke paren is energetisch gunstiger.

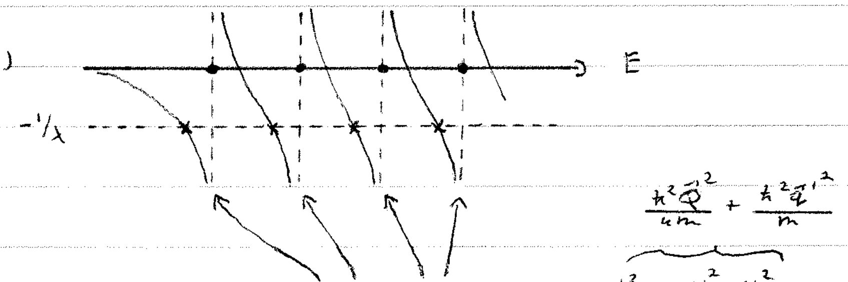
<u>(ii)</u> E.v.s. : $0 = \langle \underbrace{\tfrac{1}{2}\vec{Q} + \vec{q}\,'}_{\vec{k}_1'}, \underbrace{\tfrac{1}{2}\vec{Q} - \vec{q}\,'}_{\vec{k}_2'} | (\hat{H} - E\hat{1}) | \psi_{\vec{Q}}\rangle = \sum_{\vec{q}} \delta_b \, C_{\vec{Q}}(\vec{q}) \left\{ \delta_{\vec{q}\,',\vec{q}} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{[\vec{k}_1^2 + \vec{k}_2^2]}_{\frac{1}{2}\vec{Q}^2 + 2\vec{q}^2} - E \right) - \lambda \delta_{b'} \right\}$

$$\Rightarrow \; 0 = \delta_{b'} \left\{ C_{\vec{Q}}(\vec{q}\,') \left(\frac{\hbar^2 \vec{Q}^2}{4m} + \frac{\hbar^2 \vec{q}\,'^2}{m} - E \right) - \lambda \sum_{\vec{q}} \delta_b \, C_{\vec{Q}}(\vec{q}) \right\} ,$$

oftewel : $\boxed{C_{\vec{Q}}(\vec{q}\,') = \dfrac{-\lambda}{E - \frac{\hbar^2\vec{Q}^2}{4m} - \frac{\hbar^2 \vec{q}\,'^2}{m}} \sum_{\vec{q}} \delta_b \, C_{\vec{Q}}(\vec{q})}$ voor $k_F \le |\tfrac{1}{2}\vec{Q} \pm \vec{q}\,'| \le k_M$.

<u>(iii)</u> $\underbrace{\sum_{\vec{q}\,'} \delta_{b'} \, C_{\vec{Q}}(\vec{q}\,')}_{\neq 0} \overset{(ii)}{=\!=} - \sum_{\vec{q}\,'} \dfrac{\lambda \delta_{b'}}{E - \frac{\hbar^2\vec{Q}^2}{4m} - \frac{\hbar^2\vec{q}\,'^2}{m}} \sum_{\vec{q}} \delta_b \, C_{\vec{Q}}(\vec{q}) \Rightarrow \boxed{-\dfrac{1}{\lambda} = \sum_{\vec{q}\,'} \dfrac{\delta_{b'}}{E - \frac{\hbar^2\vec{Q}^2}{4m} - \frac{\hbar^2\vec{q}\,'^2}{m}} \equiv F_{\vec{Q}}(E)}$.

<u>(iv)</u> Plaatje voor $F_{\vec{Q}}(E)$



- Telkens als E een totale kinetische energie-eigenw. $\frac{\hbar^2}{2m}(\vec{k}_1'^2 + \vec{k}_2'^2)$ passeert, dan schiet $F_{\vec{Q}}(E)$ van $-\infty$ naar $+\infty$ $\Rightarrow$ voor alle $\vec{q}\,'$-waarden die binnen de impulsband liggen is er een oplossing $E < \frac{\hbar^2\vec{Q}^2}{4m} + \frac{\hbar^2\vec{q}\,'^2}{m} = \frac{\hbar^2}{2m}(\vec{k}_1'^2 + \vec{k}_2'^2)$ v/d vergelijking $F_{\vec{Q}}(E) = -1/\lambda$. Laagste eigenw. : $|\vec{k}_{1,2}'| = |\vec{k}_{1,2}'|_{min} = k_F$
  $\Rightarrow$ <u>$E_{grond} < \hbar^2 k_F^2/m$ = laagste energie v/d twee afzonderlijke deeltjes</u> !
  Er is dus een "gebonden" paartoestand $\forall_{\lambda > 0}$ (<u>Cooper-instabiliteit</u>) !
- Dit is <u>niet hetzelfde als de binding in een potentiaalputje</u> (zoals geldt binnen een molecuul), aangezien $E_{grond} > 0$ = laagste kinetische energieniveau in afwezigheid v/d Fermi-zee $\Rightarrow$ <u>los v/d invloed v/d Fermi-zee valt de "binding" weg</u>.
- Fermionen uit de Fermi-zee gaan paarsgewijs naar hogere kinetische toestanden totdat het toevoegen van nog een paar de totale energie niet meer verlaagt !

(hangt af van λ en het aantal beschikbare energieniveaus)