annihileren quasi-deeltjes

Opg. 10) Fermionische Bogolyubov-transf.: $\hat{c}_1 = u_1 \hat{a}_1 + v_1 \hat{a}_2^\dagger$, $\hat{c}_2 = u_1 \hat{a}_2 - v_1 \hat{a}_1^\dagger$,

met $u_1, v_1 \in \mathbb{R}$ z.d.d. $u_1^2 + v_1^2 = 1$.

(i) Genormeerde quasi-deeltjes vacuümtoestand : $|\tilde{0}\rangle$ z.d.d. $\hat{c}_{1,2}|\tilde{0}\rangle = 0$.

Ontbinden t.o.v. de oorspronkelijke telbasis : $|\tilde{0}\rangle = \sum_{n_1,n_2=0}^{1} f_{n_1,n_2}|n_1,n_2\rangle$ ($\in \mathbb{C}$ en $\sum_{n_1,n_2}|f_{n_1 n_2}|^2 = 1$)

$\hat{a}_2^\dagger|1,0\rangle = -|1,1\rangle$

$$\hat{c}_1|\tilde{0}\rangle = (u_1\hat{a}_1 + v_1\hat{a}_2^\dagger)|\tilde{0}\rangle = (u_1 f_{11} + v_1 f_{00})|0,1\rangle + u_1 f_{10}|0,0\rangle - v_1 f_{10}|1,1\rangle = 0$$

$$\hat{c}_2|\tilde{0}\rangle = (u_1\hat{a}_2 - v_1\hat{a}_1^\dagger)|\tilde{0}\rangle = (-u_1 f_{11} - v_1 f_{00})|1,0\rangle - v_1 f_{01}|1,1\rangle + u_1 f_{01}|0,0\rangle = 0$$

$\hat{a}_2|1,1\rangle = -|1,0\rangle$

u_1, v_1 niet allebei 0 $\Longrightarrow$ $f_{01} = f_{10} = 0$ en $f_{11}u_1 + f_{00}v_1 = 0$.

willekeurige fasefactor

Gevolg: $|\tilde{0}\rangle = e^{i\gamma}(u_1|0,0\rangle - v_1|1,1\rangle) = e^{i\gamma}(u_1 - v_1\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger)|0,0\rangle$

$$\overset{u_1 \neq 0}{=} e^{i\gamma}u_1 \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-v_1}{u_1}\right)^n \frac{(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger)^n}{n!}|0,0\rangle = e^{i\gamma}u_1 e^{-\frac{v_1}{u_1}\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger}|0,0\rangle,$$

omdat $(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger)^n = 0$ als $n > 1$.

Gemiddelde bezetting v/h quasi-deeltjes vacuüm in termen v/d oorspronkelijke deeltjes : $\langle\tilde{0}|\hat{n}_{1,2}|\tilde{0}\rangle = 0 * u_1^2 + 1 * v_1^2 = v_1^2$.

(ii) $u_1 = 1, v_1 = 0$ $\Rightarrow$ $\hat{c}_1^\dagger = \hat{a}_2$, $\hat{c}_2^\dagger = -\hat{a}_1$; de quasi-deeltjes zijn in dit geval gaten in de bezetting v/d andere 1-deeltjestoestand.

Pauli-uitsluitingsprincipe voor gaten : je kan maar één keer een gat creëren in de bezetting v/e fermionische toestand.

Fermionen: $u_1 = 1, v_1 = 0$ impliceert $\hat{c}_1^\dagger = \hat{a}_2$, $\hat{c}_2^\dagger = -\hat{a}_1$

$$\Rightarrow \hat{1} = \{\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger\} = \{\hat{c}_2^\dagger, \hat{c}_2\} = \{\hat{c}_2, \hat{c}_2^\dagger\}$$
$$\hat{1} = \{\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger\} = \{\hat{c}_1^\dagger, \hat{c}_1\} = \{\hat{c}_1, \hat{c}_1^\dagger\}$$

correcte fermionische anticommutatierelaties

Bosonen: $u_1 = 1, v_1 = 0$ impliceert $\hat{c}_1^\dagger = \hat{a}_2$, $\hat{c}_2^\dagger = \hat{a}_1$

$$\Rightarrow \hat{1} = [\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = [\hat{c}_2^\dagger, \hat{c}_2] = -[\hat{c}_2, \hat{c}_2^\dagger]$$
$$\hat{1} = [\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] = [\hat{c}_1^\dagger, \hat{c}_1] = -[\hat{c}_1, \hat{c}_1^\dagger]$$

incorrecte bosonische commutatierelaties

$\Rightarrow$ zo'n speciale Bogolyubov-transformatie is wel mogelijk voor fermionen, maar niet voor bosonen.

(iii) Beschouw de veeldeeltjesobservabele $\hat{A} = a\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1 + b\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2$ $\Rightarrow$ $\hat{a}_1^\dagger$ creëert een deeltje met eigenw. a , $\hat{a}_2^\dagger$ creëert een deeltje met eigenw. b.

Onder de Bogolyubov-transformatie met $u_1 = 1, v_1 = 0$ verandert dit in

$\hat{A} = a\hat{c}_2\hat{c}_2^\dagger + b\hat{c}_1\hat{c}_1^\dagger = -b\hat{c}_1^\dagger\hat{c}_1 - a\hat{c}_2^\dagger\hat{c}_2 + (a+b)\hat{1}$, d.w.z. $\hat{c}_1^\dagger$ creëert een quasi-deeltje met eigenw. $-b$, $\hat{c}_2^\dagger$ creëert een quasi-deeltje met eigenw. $-a$.

Dit klopt met de notie dat het creëren v/e gat gelijk is aan het verwijderen v/e deeltje.

Opg. 11) Vervalproces: er worden twee verschillende (onderscheidbare) spin-0 deeltjes geproduceerd in de pure paartoestand $|\psi\rangle = \int d\vec{p}_1\, f(\vec{p}_1)\, \underbrace{\hat{a}^\dagger(\vec{p}_1)\,\hat{b}^\dagger(\vec{P}-\vec{p}_1)}_{\text{paarimpuls } \vec{P}}|0\rangle$.

Hier zijn $\hat{a}^\dagger(\vec{p}_1)$ en $\hat{b}^\dagger(\vec{P}-\vec{p}_1)$ de creatie-operatoren voor deeltje 1 resp. 2 in de impulsrepresentatie, zodat $[\hat{a}(\vec{p}_1), \hat{a}^\dagger(\vec{p}_1{}')] = \delta(\vec{p}_1-\vec{p}_1{}')\,\hat{1}$

en $[\hat{b}(\vec{p}_2), \hat{b}^\dagger(\vec{p}_2{}')] = \delta(\vec{p}_2-\vec{p}_2{}')\,\hat{1}$ ①.

(i) Beschouw een observabele $\hat{A}$ die alleen betrekking heeft op deeltje 1
$\Rightarrow$ $[\hat{A}, \hat{b}(\vec{p}_2)] = [\hat{a}(\vec{p}_1), \hat{b}(\vec{p}_2)] = [\hat{a}^\dagger(\vec{p}_1), \hat{b}(\vec{p}_2)] = 0$ en evenzo voor $\hat{b}^\dagger(\vec{p}_2)$, omdat $\hat{b}(\vec{p}_2)$ en $\hat{b}^\dagger(\vec{p}_2)$ uitsluitend betrekking hebben op deeltje 2 en $\hat{a}(\vec{p}_1)$, $\hat{a}^\dagger(\vec{p}_1)$ en $\hat{A}$ uitsluitend op deeltje 1.

(ii) $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \int d\vec{p}_1 \int d\vec{p}_1{}'\, f^*(\vec{p}_1) f(\vec{p}_1{}')\, \langle 0|\hat{b}(\vec{P}-\vec{p}_1)\hat{a}(\vec{p}_1)\hat{A}\,\hat{a}^\dagger(\vec{p}_1{}')\,\hat{b}^\dagger(\vec{P}-\vec{p}_1{}')|0\rangle$

$$\overset{(i)}{=} \int d\vec{p}_1 \int d\vec{p}_1{}'\, f^*(\vec{p}_1) f(\vec{p}_1{}')\, \langle 0|\hat{a}(\vec{p}_1)\hat{A}\,\hat{a}^\dagger(\vec{p}_1{}')\,\underbrace{\hat{b}(\vec{P}-\vec{p}_1)\hat{b}^\dagger(\vec{P}-\vec{p}_1{}')}_{\overset{①}{=}\ \cancel{\hat{b}^\dagger(\vec{P}-\vec{p}_1{}')\hat{b}(\vec{P}-\vec{p}_1)} + \delta(\vec{p}_1-\vec{p}_1{}')\hat{1}}|0\rangle$$

$$= \int d\vec{p}_1\, |f(\vec{p}_1)|^2 \langle 0|\hat{a}(\vec{p}_1)\hat{A}\hat{a}^\dagger(\vec{p}_1)|0\rangle \equiv \int d\vec{p}_1\, \underbrace{|f(\vec{p}_1)|^2}_{\text{stat. gewicht}}\, \underbrace{\langle\vec{p}_1|\hat{A}|\vec{p}_1\rangle}_{\text{verw. waarde}},$$

met $|\vec{p}_1\rangle \equiv \hat{a}^\dagger(\vec{p}_1)|0\rangle$ de impulseigentoestand van deeltje 1 bij de impuls $\vec{p}_1$.

(iii) Introduceer de dichtheidsoperator $\hat{\rho}_1 = \int d\vec{p}_1\, |f(\vec{p}_1)|^2\, |\vec{p}_1\rangle\langle\vec{p}_1|$ die een gemengd ensemble beschrijft gekarakteriseerd door de impulseigentoest. $|\vec{p}_1\rangle$ van deeltje 1 met statistische gewichten $W(\vec{p}_1) = |f(\vec{p}_1)|^2$.

Gevolg: $Tr(\hat{A}\hat{\rho}_1) \equiv \int d\vec{p}_1{}' \langle\vec{p}_1{}'|\hat{A}\hat{\rho}_1|\vec{p}_1{}'\rangle = \int d\vec{p}_1{}' \int d\vec{p}_1\, |f(\vec{p}_1)|^2 \langle\vec{p}_1{}'|\hat{A}|\vec{p}_1\rangle \underbrace{\langle\vec{p}_1|\vec{p}_1{}'\rangle}_{\delta(\vec{p}_1-\vec{p}_1{}')}$

$$= \int d\vec{p}_1\, |f(\vec{p}_1)|^2 \langle\vec{p}_1|\hat{A}|\vec{p}_1\rangle \overset{(ii)}{=} \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle.$$

Door de vrijheidsgraden van deeltje 2 uit te integreren (weg te laten) is er een gemengd ensemble ontstaan voor de QM beschrijving van deeltje 1 !

dit is bijvoorbeeld van belang als er alleen metingen (kunnen) worden verricht aan deeltje 1