Opg. 12) Gemengd ensemble van spin-½ deeltjes met gelijke hoeveelheden deeltjes in de pure toestanden $|\chi_{m_{s_z}=1/2}\rangle$, $|\chi_{m_{s_y}=1/2}\rangle$ en $|\chi_{m_{s_x}=1/2}\rangle$

(i) $\hat{\rho} = \frac{1}{3}\left(\underbrace{|\chi_{m_{s_z}=1/2}\rangle\langle\chi_{m_{s_z}=1/2}|}_{\text{pure toest.}} + \underbrace{|\chi_{m_{s_y}=1/2}\rangle\langle\chi_{m_{s_y}=1/2}|}_{\text{pure toest.}} + \underbrace{|\chi_{m_{s_x}=1/2}\rangle\langle\chi_{m_{s_x}=1/2}|}_{\text{pure toest.}} \right)$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{3}\left(\underbrace{\tfrac{1}{2}[I + \vec{\sigma}.\vec{e}_z]}_{\rho_{\vec{P}=\vec{e}_z}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}[I + \vec{\sigma}.\vec{e}_y]}_{\rho_{\vec{P}=\vec{e}_y}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}[I + \vec{\sigma}.\vec{e}_x]}_{\rho_{\vec{P}=\vec{e}_x}} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(I + \frac{1}{3}\vec{\sigma}.\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2/3 & \frac{1-i}{6} \\ \frac{1+i}{6} & 1/3 \end{pmatrix}$$

(ii) + (iii) $\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{\sigma}.\vec{P}) \Rightarrow$ polarisatievector $\boxed{\vec{P} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$

$\Rightarrow$ polarisatiegraad : $|\vec{P}| = 1/\sqrt{3}$, polarisatierichting : $\vec{e}_P = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Opg. 13) Puur ensemble bestaande uit spin-½ deeltjes, beschreven door een pure spintoestandsfunctie (spinvector) $|\chi\rangle$.

Spinverwachtingswaarden : $\langle\hat{S}_x\rangle = 0$, $\langle\hat{S}_y\rangle > 0$, $\langle\hat{S}_z\rangle = \frac{\lambda\hbar}{2}$ $(0<\lambda<1)$

(i) Pure toestand : ρ wordt vastgelegd door $\vec{P} \in \mathbb{R}^3$ met $\vec{P}^2 = 1$, d.w.z. twee onafh. reële parameters + een teken

$$\vec{P} = \frac{2}{\hbar}[\hat{\vec{S}}] \underset{\text{toest.}}{\overset{\text{pure}}{=}} 0.\vec{e}_x + \frac{2}{\hbar}\langle\hat{S}_y\rangle\vec{e}_y + \lambda\vec{e}_z \quad (0<\lambda<1)$$

alleen teken nodig

$\vec{P}^2 = 1$, $\langle\hat{S}_y\rangle > 0 \Rightarrow \vec{P} = \sqrt{1-\lambda^2}\,\vec{e}_y + \lambda\vec{e}_z$

Dus $\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{\sigma}.\vec{P}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\lambda & -i\sqrt{1-\lambda^2} \\ i\sqrt{1-\lambda^2} & 1-\lambda \end{pmatrix}$

(ii) Voor een puur ensemble is ρ een projectiematrix met eigenw. 0 en 1.

*) De pure toestand v/h spinsysteem is een eigenvector van ρ bij de eigenwaarde 1 $\Rightarrow$ $|\chi\rangle$ voldoet aan $\rho|\chi\rangle = |\chi\rangle$

*) ρ projecteert op $|\chi\rangle$, d.w.z. $\hat{\rho} = |\chi\rangle\langle\chi|$ ← makkelijkste methode

$\Rightarrow |\chi\rangle = \text{const.}\ \rho\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

om te normeren

Resultaat : $|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{1+\lambda}\\ i\sqrt{1-\lambda}\end{pmatrix}$ ← ligt op fasefactor na vast