Opg. 16) Spin-½ deeltje in een kubus met ribben $L \Rightarrow$ volume $V = L^3$,
oppervlak $S = 6L^2$.

Energie-eigenw.: $E_\nu = \dfrac{\hbar^2\pi^2\nu^2}{2mL^2}$, $\nu^2 = \nu_x^2 + \nu_y^2 + \nu_z^2$ $\quad (\nu_{x,y,z} = 1, 2, \dots)$.

Energie-eigenfu.: $\psi_{\vec{\nu}, m_s}(\vec{r}, \sigma) = \left(\dfrac{2}{L}\right)^{3/2} \sin\left(\dfrac{\nu_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\dfrac{\nu_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\dfrac{\nu_z \pi}{L} z\right) \chi_{\frac{1}{2}, m_s}$

($m_s = \pm 1/2$)

Gevolg: in de $\vec{\nu}$-ruimte bevat een eenheidskubus precies één ruimtelijke kwantumtoestand, mits $\nu_{x,y,z} > 0 \Rightarrow 2s+1 = 2$ volledig gespecificeerde kwantumtoestanden inclusief spin.

Randeffect 1: energie-eigenw. bij $\nu_x = 0 \vee \nu_y = 0 \vee \nu_z = 0$ moeten worden uitgesloten.

(i) Aantal kwantumtoest. $N(k)$ met lengte v/d golfvector kleiner dan $k = \pi|\vec{\nu}|/L \equiv \pi\nu/L$:

$N(k) \xrightarrow[\text{limiet}]{\text{cont.}} 2 *$ [volume bol met straal $\nu = kL/\pi$ binnen octant $\nu_{x,y,z} > 0$
$- \frac{1}{2} *$ oppervlak snijvlakken v/d bol met het octant]

(zie plaatje op p.72 v/h collegedictaat)

(drie kwartcirkels)

$$\Rightarrow N(k) \approx 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi\nu^3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi\nu^2 = \frac{1}{3}\pi\nu^3 - \frac{3}{4}\pi\nu^2 = \frac{k^3L^3}{3\pi^2} - \frac{3k^2L^2}{4\pi} = \frac{V}{3\pi^2}\left(k^3 - \frac{3\pi S}{8V}k^2\right).$$

(ii) Toestandsdichtheid: $D(E_{kin}) = \dfrac{dk}{dE_{kin}} D(k) = \left(\dfrac{dk}{dE_{kin}}\right)\dfrac{dN(k)}{dk} \overset{(i)}{\approx} \left(\dfrac{dk}{dE_{kin}}\right)\left[\dfrac{V}{\pi^2}k^2 - \dfrac{S}{4\pi}k\right]$

($S\lambda(E_{kin})/8V \ll 1$ als $L \gg \lambda(E_{kin})$)

$$\underset{\overline{\overline{\qquad\qquad}}}{\overset{k = \sqrt{2mE_{kin}/\hbar^2}}{=}} \frac{1}{2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} E_{kin}^{-1/2}\left[\frac{V}{\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)E_{kin} - \frac{S}{4\pi}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2}E_{kin}^{1/2}\right] = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}E_{kin}^{1/2}\left[1 - \frac{\pi S}{4V}\left(\frac{2mE_{kin}}{\hbar^2}\right)^{-1/2}\right].$$

(geldt voor willekeurige V, S)

(iii) Bekijk nu een Fermi-gas van zulke deeltjes. We weten dat de toestandsdichtheid voor gegeven E_{kin} met een constante $* S$ wordt verlaagd als randeffecten worden meegenomen $\Rightarrow$ in de grondtoestand v/h Fermi-gas moeten hogere energieniveaus worden gevuld dan in afwezigheid van randeffecten. Omdat voor alle waarden van de kinetische energie $D(E_{kin})$ kleiner is geworden zal ook $E^{T=0}_{tot,kin}$ hoger uitvallen!
Voor een bol is S/V minimaal en wordt dus de laagste grondtoestandsenergie v/h Fermi-gas gevonden voor gegeven V! ← (kernen zijn bij voorkeur bolvormig)
Het opbreken v/h volume kost oppervlakte-energie, aangezien daarbij het volume niet verandert terwijl er extra oppervlak wordt toegevoegd door toedoen v/d scheidingswand! ← (kernen vallen niet zomaar in druppels uit elkaar)

Randeffect 2: $\psi_{\vec{\nu},m_s}(\vec{r},\sigma) = 0$ op de rand v/d kubus.

(iv) Bekijk $\psi_{\vec{\nu},m_s}(\vec{r},\sigma)$ als functie van x in de buurt van x=0 en stel $\nu_x = n_F$:
$|\psi_{\vec{\nu},m_s}(\vec{r},\sigma)| \propto |\sin(\frac{n_F\pi}{L}x)|$, hetgeen het eerste maximum bereikt
als $n_F\pi x/L = \pi/2 \Rightarrow \boxed{x_{1^e\,max} = \frac{L}{2n_F} = \frac{1}{4}\text{ golflengte}}$.

Opg. 17) Vrije spin-½ deeltjes binnen een macroscopische 3-dimensionale omsluiting met constante zijden $L = V^{1/3}$ en ondoordringbare wanden.
Aantal deeltjes: $N \gg 1$, constant.

1-deeltjes energie-eigenwaarden in de ultra-relativistische limiet:

$$E_\nu = \underbrace{\frac{\hbar\pi c}{L}\nu}\quad\text{met}\quad \nu = \sqrt{\nu_x^2+\nu_y^2+\nu_z^2}\qquad (\nu_{x,y,z} = 1,2,\ldots)$$

$\Longrightarrow E(k) = \hbar c k$ in termen v/d gekwantiseerde golfvectoren $\vec{k} = \pi\vec{\nu}/L$

In het collegedictaat is afgeleid dat $D(k) = Vk^2/\pi^2$

$$\Rightarrow \text{toestandsdichtheid: } D(E_{kin}) = \left(\frac{dk}{dE_{kin}}\right)D(k) \xrightarrow{k = E_{kin}/\hbar c} \frac{V}{\pi^2}\frac{1}{\hbar c}\left(\frac{E_{kin}}{\hbar c}\right)^2 = \frac{VE_{kin}^2}{\pi^2\hbar^3c^3}.$$

Fermi-gas bij T=0: alle 1-deeltjestoestanden zijn bezet tot aan de Fermi-energie

$$N = \int_0^{E_F} dE_{kin}\,D(E_{kin}) = \frac{VE_F^3}{3\pi^2(\hbar c)^3} \Rightarrow \text{Fermi-energie: } \boxed{E_F = \hbar c\,(3\pi^2\underbrace{N/V}_{\rho_N})^{1/3}}.$$

$$\bar{E}_{kin} = \frac{E_{kin,tot}^{T=0}}{N} = \frac{1}{N}\int_0^{E_F} dE_{kin}\,E_{kin}\,D(E_{kin}) = \frac{1}{N}\frac{VE_F^4}{4\pi^2(\hbar c)^3} = \boxed{\frac{3}{4}E_F = \bar{E}_{kin}} \leftarrow \text{gemiddelde kin. energie per deeltje}$$

$$\Rightarrow \text{gasdruk } P = -\left(\frac{\partial E_{kin,tot}^{T=0}}{\partial V}\right)_N = -\frac{3}{4}N\left(\frac{\partial E_F}{\partial V}\right)_N = \frac{1}{4}N\frac{E_F}{V} = \boxed{\frac{1}{4}\rho_N E_F = P}.$$

Dit soort Fermi-gassen is belangrijk voor de thermodynamische behandeling van neutrino's bij lage temperaturen of elektronen/neutronen in het binnenste van zware geïmplodeerde sterren.

Opg. 18) Fermi-gas model voor zware kernen (Thomas-Fermi model): twee onafhankelijke Fermi-gassen bij $T=0$ (Z protonen en $A-Z$ neutronen, met $M_p \simeq M_n$) gehouden binnen een bol met straal R d.m.v. een constante potentiaal $V=-V_0<0$ binnen de bol.

Uniforme deeltjesdichtheid: $\rho_N = \frac{3A}{4\pi R^3} = \frac{3}{4\pi r_0^3} \simeq 0.17 \times 10^{45}$ nucleonen/m^3

$\Rightarrow \rho_N^{(p)} = \frac{2Z}{A}(\rho_N/2)$ voor de protonen, $\rho_N^{(n)} = \frac{2A-2Z}{A}(\rho_N/2)$ voor de neutronen.

Als $Z=A/2$, dan is $E_F = \frac{\hbar^2}{2M_p}(3\pi^2 \rho_N/2)^{2/3}$ de Fermi-energie van beide gassen.

(i) Totale kinetische energie: $E^{T=0}_{tot,kin} = \frac{3}{5} Z E_F^{(p)} + \frac{3}{5}(A-Z) E_F^{(n)}$,

met $E_F^{(p)} = \left(\frac{\rho_N^{(p)}}{\rho_N/2}\right)^{2/3} E_F$ en $E_F^{(n)} = \left(\frac{\rho_N^{(n)}}{\rho_N/2}\right)^{2/3} E_F$

$\Rightarrow E^{T=0}_{tot,kin} = \frac{3}{5} E_F \left(\frac{A}{2}\right)\left[x^{5/3} + (2-x)^{5/3}\right]$, met $x = \frac{2Z}{A}$

Minimaliseren voor vaste A: $dE^{T=0}_{tot,kin}/dx = 0 \Rightarrow x^{2/3} - (2-x)^{2/3} = 0 \Rightarrow x=1$, d.w.z. $Z=A/2$.

(ii) Stel $x = 1-\lambda$, $0 \le \lambda \ll 1 \Rightarrow E^{T=0}_{tot,kin} = \frac{3}{10} A E_F \left[(1-\lambda)^{5/3} + (1+\lambda)^{5/3}\right]$

$$\overset{\lambda \ll 1}{\approx} \frac{3}{5} A E_F \left(1 + \frac{5}{9}\lambda^2 + \dots\right) \approx \frac{3}{5} A E_F + \frac{(A-2Z)^2}{3A} E_F .$$

Asymmetriecoëff.: $\frac{1}{3} E_F \simeq 13$ MeV vs 23.2 MeV experimenteel ← ~ 50 % verklaard

Coulomb-energie bolvormige kern

(iii) Minimaliseer $E^{T=0}_{tot} = E^{T=0}_{tot,kin} - AV_0 + \Delta V_{Coul} \overset{(i)}{=} \frac{3}{10} A E_F \left(x^{5/3} + (2-x)^{5/3}\right) - AV_0 + \frac{3\alpha\hbar c}{20 r_0} A^{5/3} x^2$

zie §2.5.5 voor E_{grav}

$\xRightarrow[\text{vast}]{A} dE^{T=0}_{tot}/dx = 0$, oftewel $\boxed{x^{2/3} - (2-x)^{2/3} + \frac{3\alpha\hbar c}{5 r_0 E_F} A^{2/3} x = 0}$.

$Z < A-Z$: minder protonen dan neutronen

Gevolg: minimum voor $x = 2Z/A < 1$, sterkere afwijking t.o.v. $x=1$ voor grotere A.

(iv) Kwantummechanische Coulomb-correcties t.g.v. protonpaarinteracties zijn afhankelijk v/d totale spin v/d twee protonen:

spin-triplet ($S=1$) $\Rightarrow$ ruimtelijk antisymmetrisch $\Rightarrow$ meer afstand tussen de protonen $\Rightarrow$ zwakkere Coulomb-effecten,

spin-singlet ($S=0$) $\Rightarrow$ ruimtelijk symmetrisch $\Rightarrow$ minder afstand tussen de protonen $\Rightarrow$ sterkere Coulomb-effecten.

t.o.v. klassieke aanpak

Opg. 19) Zware witte dwerg, model 1: ultra-relativistisch elektrongas bij $T=0$ binnen een bolvormig volume $\Rightarrow \rho_N^{(e)} = \dfrac{N_e}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \dfrac{(M/AM_p)Z}{\frac{4}{3}\pi R^3}$.

(i) Totale energie v/d ster (zie dictaat): $E_T = N_e \underbrace{\bar{E}_{kin}}_{\text{kinetische energie}} - \underbrace{\frac{3}{5}\frac{G_N M^2}{R}}_{\text{grav. energie}}$ M massa ster, R straal ster

$$\overset{\text{opg. 17}}{=} \frac{MZ}{AM_p}\,\frac{3}{4}\hbar c\left(\frac{3\pi^2(MZ/AM_p)}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)^{1/3} - \frac{3}{5}\frac{G_N M^2}{R} \equiv \boxed{b\,\frac{M^{4/3}}{R} - \frac{3}{5}\frac{G_N M^2}{R} = E_T},$$

met $b = \frac{3}{4}\left(9\pi/4\right)^{1/3}\hbar c\left(\dfrac{Z}{AM_p}\right)^{4/3} \overset{Z=A/2}{\approx} 9.096\times 10^{9}\ \mathrm{J\,m\,kg^{-4/3}}$.

(ii) Evenwicht: er is nu geen minimum voor E_T als functie v/d straal R. (i.t.t. het NR geval in het dictaat)

$E_T<0$: kinetische energie < | gravitatie-energie |
$\Rightarrow$ ster blijft instorten, want kleinere R betekent een lagere energie én de toenemende kin. energie blijft ultra-relativistisch.

$E_T>0$: kinetische energie > | gravitatie-energie |
$\Rightarrow$ ster zet uit, want grotere R betekent een lagere energie. Echter, de afnemende kinetische energie wordt langzaam maar zeker steeds minder relativistisch $\Rightarrow$ uiteindelijk zal de ster een stabiele evenwichtswaarde voor R bereiken, aangezien een niet-relativistische witte dwerg een stabiel minimum voor E_T heeft!

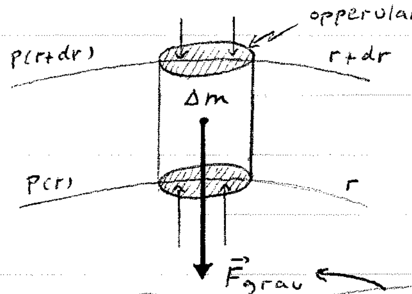
Dus is er een bovengrens op de massa v/e stabiele witte dwerg:
$$b\,M^{4/3} \geq \frac{3}{5}G_N M^2 \Rightarrow M \leq M_c = (5b/3G_N)^{3/2} \overset{Z=A/2}{\approx} \frac{15\sqrt{5\pi}}{64}\,\frac{(\hbar c/G_N)^{3/2}}{M_p^2} \ \underline{\text{hint}}\ 1.72\,M_\odot.$$

Zware witte dwerg, model 2: verfijning van model 1.

Massadichtheid $\rho_M(r) = \dfrac{AM_p}{Z}\rho_N^{(e)}(r) \equiv \rho_c\,\Theta^3(r)$, met $\Theta(0)\equiv 1$ en $\Theta(R)\equiv 0$ (definieert de straal v/d ster)

$\Rightarrow$ elektrongasdruk $P(r) \overset{\text{opg. 17}}{=} \frac{1}{4}\hbar c\,(3\pi^2)^{1/3}\left(\dfrac{Z}{AM_p}\right)^{4/3}\rho_M^{4/3}(r) \equiv K\rho_M^{4/3}(r) = K\rho_c^{4/3}\Theta^4(r)$. (polytroop)

(iii)



Evenwicht: $\underbrace{F_r}_{\text{radiële kracht}} = \Delta m\,\dfrac{d^2r}{dt^2} = \underbrace{-\dfrac{G_N\,\Delta m\,m(r)}{r^2}}_{\text{zwaartekracht}} + \underbrace{dA\,(\underbrace{P(r)-P(r+dr)}_{-P'(r)\,dr})}_{\text{kracht t.g.v. gasdruk}}$

$$= dA\,dr\left(-\frac{G_N\,m(r)\,\rho_M(r)}{r^2} - P'(r)\right) = 0$$

sterkte $\dfrac{G_N\,\Delta m\,m(r)}{r^2} = \dfrac{G_N\,dA\,dr\,\rho_M(r)\,m(r)}{r^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{m(r) = -\dfrac{r^2}{G_N\,\rho_M(r)}P'(r)}$ (massa v/d ster binnen straal r)

Invullen v/d polytroop $P(r) = K\rho_M^{4/3}(r) = K\rho_c^{4/3}\Theta^4(r)$ levert dan

$$m(r) = -\frac{r^2}{G_N\,\rho_c\,\Theta^3(r)}\,4K\rho_c^{4/3}\,\Theta^3(r)\,d\Theta(r)/dr = -\frac{4K}{G_N}\,\rho_c^{1/3}\,r^2\,d\Theta(r)/dr\,.$$

(iv) Definitie $\rho_c\,\Theta^3(r) = \rho_M(r) \equiv \dfrac{dm(r)/dr}{4\pi r^2} \overset{(iii)}{=\!=} -\dfrac{K}{\pi G_N}\,\rho_c^{1/3}\,\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\,d\Theta(r)/dr\right)$

$$\underline{\underline{r = \rho_c^{-1/3}\left(\frac{K}{\pi G_N}\right)^{1/2}\xi}} \Longrightarrow \boxed{\Theta^3 + \frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\,d\Theta/d\xi\right) = 0} \longleftarrow$$

Lane-Emden verg. voor $n=3$, bevat geen sterafhankelijke parameters meer !

(v) De oplossing wordt vastgelegd door de randvoorwaarden $\Theta(0)=1$, $\Theta'(0)=0$.

evenwicht

Straal R: $\xi = \xi_R = 6.897$ z.d.d. $\Theta = 0$, $\xi^2 d\Theta/d\xi = -2.018$.

Massa ster: $M_c \equiv m(R) \overset{(iii)}{=\!=} -4\pi\dfrac{K}{\pi G_N}\,\rho_c^{1/3}\,R^2\,d\Theta/dr\Big|_{r=R} \overset{r\to\xi}{=\!=} -4\pi\left(\dfrac{K}{\pi G_N}\right)^{3/2}\xi^2\,d\Theta/d\xi\Big|_{\xi=\xi_R}$

$$= 8.072\,\pi\left(\frac{K}{\pi G_N}\right)^{3/2} \overset{Z=A/2}{\approx} 8.072\,\frac{\sqrt{3\pi}}{32}\,\frac{(\hbar c/G_N)^{3/2}}{M_p^2} \overset{\text{hint}}{=\!=} 1.44\,M_\odot\,.$$

Dit is de zogenaamde Chandrasekhar limiet, hetgeen de bovengrens aangeeft op de massa v/e stabiele witte dwerg !

en niet roterende