Opgaven voor ART

collegejaar 2009-2010

1 College 1

1.1 Exponentiatie van operatoren

Laat T een of andere matrix voorstellen. Vorm nu het object

$$B = \left(1 + \frac{a}{N}T\right)^N$$

waarbij a een niet-infinitesimaal getal is, en N zeer groot genoemen wordt (uiteindelijk oneindig). Laat nu zien dat geldt :

$$B = \exp(aT)\,\left(1 - \frac{a^2}{2N}T^2 + \cdots\right)$$

waarbij de $\cdots$ termen voorstellen van orde $1/N^2$ of hoger. Maak om dit te doen gebruik van het binominaaltheorema, *ofwel* bekijk $\log(B)$.

1.2 Minimale Lorentz transformaties

we bestuderen de Minkoski ruimte met de gebruikelijke Cartesische coördinaten. Een minimale Lorentz transformatie $\Lambda(p \to q)^\mu{}_\nu$ heeft de eigenschap dat ze een vector p^μ in een vector q^μ overvoert (waardoor dus $p \cdot p = q \cdot q$), maar iedere vector r^μ invariant laat waarvoor geldt dat $p \cdot r = q \cdot r = 0$. We nemen aan dat $p \cdot p \neq 0$.

1. Laat zien dat de vorm van deze transformatie de volgende moet zijn :

   $$\Lambda(p \to q)^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - \frac{2}{(p+q)^2}(p+q)^\mu(p+q)_\nu + \frac{2}{p \cdot p}q^\mu p_\nu$$

   Doe dit door te laten zien dat inderdaad

   (a) $\Lambda(p \to q)^\mu{}_\nu\, p^\nu = q^\mu$
   (b) $\Lambda(p \to q)^{\mu\nu} = \Lambda(q \to p)^{\nu\mu}$
   (c) $\Lambda(p \to q)^\mu{}_\nu\, r^\nu = r^\mu$

2. Laat zien dat de vorm van deze transformatie zowel rotaties als boosts bevat (NB dit is gemakkelijk!)

3. We gaan nu de infinitesimale vorm bekijken. Om dit te doen kiezen we

   $$q^\mu = p^\mu + \epsilon\, t^\mu \quad , \quad p \cdot t = 0$$

   waarbij ϵ infinitesimaal is. Laat zien dat we dan inderdaad kunnen schrijven

   $$\Lambda(p \to q)^\mu{}_\nu \approx \delta^\mu{}_\nu + \epsilon\, T^\mu{}_\nu$$

   en bepaal de vorm van T voor een rotatie en voor een boost.

1.3 Niet-commuterende boosts : Larmor precessie

Bekijk een deeltje in rust ; noem zijn impuls p^μ. Het deeltje heeft ook een spin-richting, dwz een eenheidsvector loodrecht op p. Voer nu de drie volgende operaties uit :

1. Boost (met de minimale Lorentz transformaties uit het vorige probleem) van p^μ naar een andere impuls q^μ, dwz pas $\Lambda(p \to q)$ toe op p ;
2. Boost dan (weer minimaal) van q naar weer ee ander momentum t^μ ;
3. Boost tenslotte minimaal van t naar p.

Laat zien dat het deeltje weer zijn oorspronkelijke impuls terug heeft, maar dat de spin vector in het algemeen geroteerd is. In welk vlak ligt deze rotatie ?

1.4 Determinant van de minimale Lorentz transformatie

De determinant van een 4×4 matrix M in Minkowski ruimte wordt gegeven door

$$\det(M) = -\frac{1}{4!}\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\,\epsilon^{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}\;M^{\mu_1}{}_{\nu_1}\,M^{\mu_2}{}_{\nu_2}\,M^{\mu_3}{}_{\nu_3}\,M^{\mu_4}{}_{\nu_4}$$

waarbij ϵ het volledig antisymmetrische Levi-Civita symbool is, en helaam lvastgelegd wordt door de deefinitie

$$\epsilon_{0123} = +1.$$

1. Laat zien dat de eenheidsmatrix $\delta^\mu{}_\nu$ inderdaad determinant 1 heeft.
2. Bereken de determinant van $\Lambda(p \to q)^\mu{}_\nu$.

2 Zwarte gaten

2.1 Een waterig zwart gat

Bezie een bol die uniform gevuld is met water van overal gelijke dichtheid. Bereken de straal die de bol moet hebben om een zwart gat te vormen. **NB!** Verfieer eerst de formule voor het volumue van een bol in de Schwartzschild metriek!

2.2 Geen zwart gat in twee dimensies ?

Bekijk een tijdruimte waarin de ruimte geen drie maar slechts twee dimensies heeft. Schrijf op hoe een statische, 'bol'symmetrische metriek er uit zou moeten zien. Bereken dan de Ricci tensor. Laat zien dat $R_{\mu\nu} = 0$ geen andere oplossing heeft dan de vlakke ruimte (dwz de 'Minkowski'-metriek in 2+1 dimensies).

3 De cosmologische constante

We bekijken een ruimte waarin geen materie of energie aawezig is, maar wel een cosmologische constante Λ.

1. De Einsteinvergelijkingen luiden nu

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g^{\mu\nu} + \Lambda\, g^{\mu\nu} = 0$$

   Laat zien dat dit ewquivalent is aan

$$R^{\mu\nu} = \Lambda\, g^{\mu\nu}$$

2. Neem aan dat de metriek bolsymmetrisch is. Los nu de Einstein vergelijkingen expliciet op. Laat zien dat t altijd zo gekozen kan worden dat de metriek ook statisch is.

3. Laat zien dat de oplossing voor de metriek de volgende vorm heeft:

$$(ds)^2 = k(r)(cdt)^2 - \frac{1}{k(r)}(dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2(\sin\theta)^2(d\phi)^2$$

   met

$$k(r) = 1 + a/r + r^2\Lambda/3$$

   We nemen nu verder aan dat $a = 0$.

4. Schrijf de geodetische vergelijkingen op. Laat zien dat $\theta(s) = theta_0$ en $\phi(s) = \phi_0$ met θ_0, ϕ_0 constanten, oplossingen van de geodetsiche vergelijkingen zijn. Elke beweging van dit type is dus zuiver radiëel.

5. Laat zien dat als $r(s)$ constant is, dit alleen een oplossing van de geodetische vergelijkingen is als $r(s) = 0$. Dwz als je een deeltje in stilstand op $r = 0$ plaatst het daar ook zal blijven.

6. Laat mbv de geodetische vergelijking voor t zien dat

$$\frac{dt}{ds} = \frac{A/c}{k(r)}$$

   waarbij A een willekeurige constante is.

7. Laat nu mbv de kinematsiche conditie zien dat

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = A^2 - k(r)$$

8. Laat zien dat dit inhoudt dat

$$\frac{d^2r}{(ds)^2} + \frac{\Lambda}{3} r = 0$$

   en los deze vergelijkingen op voor $\Lambda > 0$ en $\Lambda < 0$. Laat zien dat een stationnair deeltje met r =constant> 0 geen geodeet volgt.

9. Neem aan dat $\Lambda > 0$. Laat zien dat een deeltje in geodetische beweging een pad volgt dat vertrekt bij $r = 0$ en na een 'tijdspanne' $s = sqrt3/\Lambda$ weer bij $r = 0$ terug is.
10. Neem nu aan dat $\Lambda < 0$. Laat zien dat alle geodeten (behalve $r = 0$) zich ofwel voor positieve ofwel voor negatieve s zich exponentieel snel van de oorsprong verwijderen.

4 De Einstein actie en aanverwanten

4.1 Technische details

Op het college is de Einstein actie voor de lege ruimte behandeld :

$$I = \int d^4x \sqrt{|g|}\, R$$

onder variatie van de metriek :

$$g_{\mu\nu} \quad \rightarrow \quad g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$$

is de variatie van de actie

$$\delta I = \int d^4x \sqrt{|g|} \left(-R^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \delta g_{\mu\nu}$$

waaruit dan de correcte Einstein vergelijking volgt :

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 0$$

Bij deze afleiding is grberuikt gemaakt van twee identiteiten :

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}\, \delta g_{\alpha\beta}\, g^{\beta\nu} \quad , \quad \delta\sqrt{|g|} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}\, g^{\alpha\beta}\, \delta g_{\alpha\beta}$$

Bewijs deze, eventueel gebruikend wat je weet over de afgeleiden van $g^{\mu\nu}$ en $\sqrt{|g|}$.

4.2 Actie met cosmologische constante

De Einstein vergelijking voor de lege ruimte met cosmologische constante Λ luidt

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + \Lambda\, g^{\mu\nu} = 0$$

Bepaal de actie die deze vergelijking als resultaat heeft.

4.3 Het 'cosmologische constante probleem'

Een werkelijk fundamentele theorie die zowel gravitatie als quantummechanica en relativiteitstheorie omvat moet gebaseerd zijn op de drie fundamentele natuurconstanten

$$G_N = 6.67\ 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ sec}^2}\ \ ,\ \ c = 3.00\ 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\ \ ,\ \ \hbar = 1.05\ 10^{-34}\ \frac{\mathrm{kg\ m}^2}{\mathrm{sec}}$$

Combineer deze constanten tot een fundamentele afstand, een fundamentele tijd, een fundamentele energie en een fundamentele massa : dit zijn de zgn Planck grootheden. Bepaal de waarde die je op grond van zo'n fundamentele theorie zou verwachten voor de cosmologische constante Λ, en vergelijk met het experimentele resultaat, ongeveer $10^{-50}\,\mathrm{m}^{-2}$. Is er een discrepantie ? Zo ja, is er dan ook een probleem ?

4.4 Actie met cosmisch stof

De Einstein vergelijking voor een ruimte gevuld met 'cosmisch stof' is op het college gepresenteerd als

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\,R = \frac{8\pi G_N}{c^2}\rho u^\mu\, u^\nu$$

waarbij ρ de dichtheid en $u^\mu = dx^\mu/ds$ de snelheid van het stof is. Bepaal de actie waarvan deze vergelijking afgeleid kan worden. Gebruik hierbij eventueel de nuttige combinatie

$$p^\mu = \rho\ u^\mu\ \sqrt{|g|}$$

5 Hogere dimensies

5.1 Newtoniaanse zwaartekracht in hogere dimensies

In de lege ruimte rondom een puntmassa wordt de Newtoniaanse zwaartekrachtspotentiaal $\phi(\vec{x})$ beschreven door de Poisson vergelijking

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = 0$$

Laat het aantal dimensies van de ruimte nu eens niet 3 zijn zoals gebruikelijk maar D.

1. Neem aan dat de potentiaal de vorm

$$\phi(\vec{x}) = |\vec{x}|^k$$

   heeft, en bepaal k.

2. Laat zien dat je resultaat overeenkomt met wat je op grond van de wet van Gauss zou verwachten.

3. Geef aan welke dimensionaliteit de zwaartkrachtsconstante G moet hebben in D dimensies.

5.2 De Schwarzschild oplossing in 5 dimensies

Neem aan dat de tijdruimte geen 1+3 dimensies heeft maar 1+4.

1. Beschrijf het 4-dimensionale ruimtelijke stuk van de tijdruimte met poolcoördinaten. Geef aan hoe de metriek van zo een 4-dimensionale ruimte er uit ziet in het geval deze ruimte vlak is (dwz een Euclidische 4-dimensonale ruimte).

2. Geef de algemene vorm (in poolcoördinaten) van een bolsymmetrische metriek in de algemene 1+4-dimensionale ruimte.

3. Bereken $R_{\mu\nu}$ en los de vergelijking $R_{\mu\nu} = 0$ op. Dwz bereken de Schwarzschild oplossing in 1+4 dimensies. Volg hierbij de stappen zoals op het college uitgevoerd voor 1+3 dimensies.

4. Bereken de Newtoniaanse gravitatiepotentiaal die hier uit volgt. Vergelijk met het antwoord op de vorige vraag.

5.3 De Sitter in 5 dimensies

Bereken de bolsymmetrische metriek in 1+4 dimensies die voldoet aan de vergelijking voor de lege ruimte met cosmologische constante :

$$R_{\mu\nu} = \Lambda \, g_{\mu\nu}$$

Geef die oplossing die niet singulier is in de oorsprong.

6 Gravitatiegolven en het graviton

Bij de volgende opgaven gebruiken we *gelineariseerde* ART! En bovendien nemen we voor de lichtsnelheid $c = 1$.

6.1 + en ×

De metriek voor een '+'-gepolariseerde gravitatiegolf in de x richting luidt

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (1 - \lambda(t-x))(dy)^2 - (1 + \lambda(t-x))(dz)^2$$

en die voor een '×' gepolariseerde

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 - 2\mu(t-x)(dy)(dz)$$

Laat zien dat dmv een rotatie in het $y - z$ vlak deze twee polarisaties in elkaar kunnen worden overgevoerd, en vind het verband tussen λ en μ.

6.2 Een gravitatie'schok'golf

We bekijken een '+'-gepolariseerde gravitatiegolf in de x richting :

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (1 - \lambda(t-x))(dy)^2 - (1 + \lambda(t-x))(dz)^2$$

waarbij we (zoals boven vermeld) zullen aannemen dat $\lambda << 1$, dwz $\lambda^2 \approx 0$.

1. Bereken de Christoffelsymbolen van de eerste soort.
2. Bereken de Christoffelsymbolen van de tweede soort.
3. Bereken de Riemann tensor.
4. Laat zien dat in onze benadering de Ricci tensor nul is.
5. Bepaal de geodetische vergelijkingen en de kinematische conditie.
6. Laat zien dat $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ een oplossing van de geodetische vergelijking zijn, en bepaal $\dot{t}$.
7. Neem nu voor λ de volgende vorm :

$$\lambda(u) = \begin{cases} 0 & \text{als } u < 0 \\ \epsilon u & \text{als } 0 \leq u \leq \kappa \\ \epsilon\kappa & \text{als } u > \kappa \end{cases}$$

   Hierbij is natuurlijk weer $\epsilon^2 \approx 0$. We stellen ons nu op op het punt $x = 0$. Laat zien dat hier de ruimte vlak is behalve op de momenten $t = 0$ en $t = \kappa$. Laat zien dat het terecht is om van een 'schok'golf te spreken.

8. Op het college is de 'lineaal'afstand tussen twee 'stof'deeltjes behandeld, dwz de afstand gemeten langs een als star aangenomen meetlat. In de y en z richting zijn deze

$$dY = \frac{dy}{\sqrt{-g_{yy}}} \quad , \quad dZ = \frac{dz}{\sqrt{-g_{zz}}}$$

   Bij $t < 0$ plaatsen we op $x = 0$ een rooster van stil-hangende stofdeeltjes met coördinaten (Y, Z) die gehele getallen zijn, dwz een vierkant rooster van stofdeeltjes. Werk uit hoe dit rooster deformeert tijdens het passeren van de 'schok'golf. Laat zien dat de *oppervlakte* van een rechthoek met vier stofdeeltjes als hoekpunten niet verandert.

6.3 Algebra over het gravitonveld

Vanuit de deeltjes-fysica gedacht, moet het gravitatieveld (gelineariseerd!) eventueel gezien kunnen worden als corresponderend met een type deeltje : het graviton. De metriek schrijven we dan als

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

Hierbij is η de Minkowski metriek en h het gravitonveld.

1. Laat zien dat g (en daarmee h) in eerste aanleg 10 onafhankelijke componenten (dof, degrees of freedom) heeft.

2. Laat zien dat $h^\mu{}_\mu = 0$ en dat daarom het aantal dof van h vermiderd wordt tot 9

3. Neem even aan dat het graviton massa ongelijk 0 heeft. We kunnen dan in het rustsysteem van een graviton gaan zitten. De dof van het gravitonveld komen dan overeen met de lineair onafhankelijke *ruimtelijke* polarizatierichtingen, dwz $h_{0\mu} = 0$ (dit geldt voor elk massief spinnend deeltje : in het rustsysteem is de spin een puur *ruimtelijke* vector). Laat zien dat nu het aantal dof wordt teruggebracht tot 5.

4. Laat zien dat het terecht is om te zeggen dat zo'n graviton een spin-2 deeltje is.

5. Definieer de vector x^μ als de vier-vector die component 1 heeft in de x-richting, en waarvan de overige componenten 0 zijn. De definitie van t^μ, y^μ en z^μ is analoog. Definieer tevens

$$x_\pm{}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^\mu \pm i y^\mu\right)$$

   Laat zien dat

$$x_+ \cdot x_+ = x_- \cdot x_- = x_+ \cdot z = x_- \cdot z = 0 \quad , \quad x_+ \cdot x_- = z \cdot z = -1$$

6. We kunnen nu (complexe) polarizatie-tensoren voor het graviton opstellen:

$$\begin{aligned}
h(2)^{\mu\nu} &= x_+{}^\mu\, x_+{}^\nu \\
h(1)^{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_+{}^\mu z^\nu + z^\mu x_+{}^\nu\right) \\
h(0)^{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(x_+{}^\mu x_-{}^\nu + x_-{}^\mu x_+{}^\nu - 2 z^\mu z^\nu\right) \\
h(-1)^{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_-{}^\mu z^\nu + z^\mu x_-{}^\nu\right) \\
h(-2)^{\mu\nu} &= x_-{}^\mu\, x_-{}^\nu
\end{aligned}$$

   Laat zien dat deze voldoen aan

$$h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu} \ \ , \ \ h_{0\mu} = 0 \ \ , \ \ h^\mu{}_\mu = 0$$

   zodat ze geldige tensoren voor een graviton zijn.

7. Laat zien dat de 5 tensoren orthonormaal zijn in de zin dat

$$h(i)^{\mu\nu} h(j)^*{}_{\mu\nu} = \delta_{i,j}$$

   en dat ze zo een basis vormen voor een quantumbeschrijving van het graviton.

8. We gaan nu het graviton laten bewegen, door een Lorentz boost in de z richting uit te voeren. Laat zien dat $h(\pm 2)$ hieronder niet verandert, en de andere *wel*.

9. We gaan nu het graviton *massaloos* maken door een oneindig grote Lorentz boost uit te voeren, dwz een die het deeltje de lichtsnelheid geeft. Laat zien dat $h(\pm 1)$ en $h(0)$ in dat geval divergeren.

10. Geef het argument dat aantoont dat voor een massaloos graviton er slechts 2 fysische polarizaties mogelijk zijn.